线性代数的应用

归行茂　曹冬孙　李重华　编

上海科学普及出版社

线性代数的应用

线性代数的应用

归行茂　曹冬孙　李重华　编

上海科学普及出版社

（沪）新登字第305号

责任编辑　顾蕙兰

线性代数的应用

归行茂　曹冬孙　李重华　编

上海科学普及出版社出版

（上海曹杨路500号　邮政编码200063）

新华书店上海发行所发行　上海市印七厂一分厂印刷

开本787×1092　1/32　印张7.75　字数175000

1994年11月第1版　1994年11月第1次印刷

印数1—5500册

ISBN 7-5427-0881-3/G·233　　定价：8.20元

前　言

科学技术事业的飞速发展，使得线性代数在各个领域的应用越来越广泛。编者在多年的教学实践中，深感学生在学习线性代数之后不知如何应用，为此，在教学之余收集了一些有关线性代数应用的资料，编纂成册，以供学过线性代数课程的大学生、研究生、科技工作者、社会科学工作者参考，本书亦可作为线性代数课程的补充教材及数学模型课程的教学参考书。

本书取材面较为广泛，涉及几何、物理、经济、管理、运筹学、社会学、人口学、遗传学、生物学等方面的应用。由于每一方面的应用的内容都可独立（除个别章节外），所以各章、各节可单独阅读或讲授。也可以改变它们的顺序，以适应各种专业的读者的不同需要。考虑到本书以应用为主，所以有关的证明就省略掉了，有兴趣的读者可参阅有关的专著。

上海交通大学应用数学系裘义端副教授仔细审阅了本书的全部手稿，提出了不少宝贵意见，作者谨向裘义端副教授表示谢意。

由于编者水平有限，还有许多方面的应用尚未涉及，错误与不妥之处在所难免，敬希读者不吝指正。

编　者

1993 年 9 月

目　录

第一章　线性代数在几何学方面的应用

第一节　平　面　几　何

欧几里德于2300年前系统地研究了欧几里德空间的基本性质，他建立公理化体系，并由公理推演出平面几何与立体几何的有关定理。这一节我们将用二维欧几里德空间中向量运算法则证明平面几何的某些基本定理，这种方法比初等几何课程中所用的证明方法更简单、更优美。

在二维欧几里德空间中的向量有一些基本运算法则：

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})$或$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$或$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$

其中$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$为二维欧几里德空间中的向量。

我们可从这些基本运算法则推出新的等式而构成一个定理，而这些定理能够用简练的语言来表达证明的结论。

在介绍应用于平面几何的一些例题之前，先复习向量代数的一些基本概念。

设A、B为平面上的两个点，则AB表示连接A与B的线段（无方向），$\overrightarrow{AB}$表示有向线段，或从点A到点B的向量。

我们用 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 分别表示从一个固定的参照点 O 到点 A 与 B 的向量，

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

我们假定读者已经熟悉向量代数的一般法则，那末比较容易地叙述三点共线的法则。

设 A、B 与 C 为平面上三个点，且设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 分别表示从定点 O 到 A，B 与 C 的三个向量（图 1.2）。当且仅当

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}+(1-\lambda)\boldsymbol{c}\quad(0\leqslant\lambda\leqslant1)$$

时，B 位于线段 AC 上。

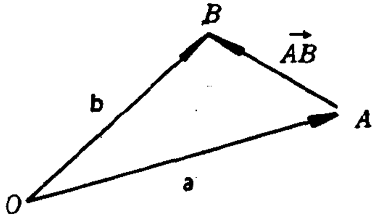

图 1.1

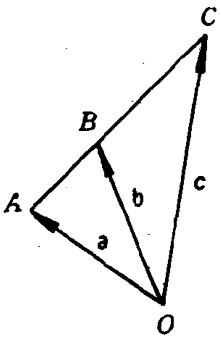

图 1.2

如果点 B 满足上述法则时，则点 B 以 $\frac{\lambda}{1-\lambda}$ 的比例分割线 AC。当 $\lambda=\frac{1}{2}$，即当 $\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ 时，则 B 是 AC 的中点；而当 $\lambda=\frac{1}{3}$，即当 $\boldsymbol{b}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}$ 时，则 B 以比率 1∶2 分割 AC。

两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积（点积或数积）定义为

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=ab\cos\theta,$$

其中 $|\boldsymbol{a}|$ 或 a 是向量 $\boldsymbol{a}$ 的模，而 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\theta$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角。内积的一个很有用的性质是：两个非零向量正交的充分

必要条件是它们的内积为零。

下面列出平面几何的七个定义：

1. 四边形：四条边的多边形（图 1.3）。

2. 梯形：一双对边平行的四边形（图 1.4）。

3. 平行四边形：两双对边平行的四边形（图 1.5）。

图 1.3

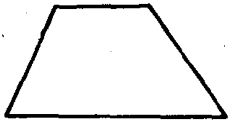

图 1.4

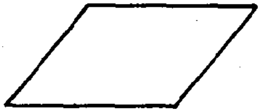

图 1.5

4. 三角形形心：△ABC 的形心 P 是由 $\boldsymbol{p}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$ 所确定的点 P（图 1.6）。

5. 四边形形心（或中心）：四边形 ABCD 的形心 M 是由 $\boldsymbol{m}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$所确定的点 M（图 1.7）。

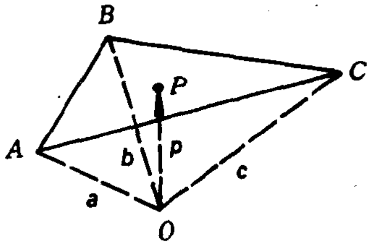

图 1.6

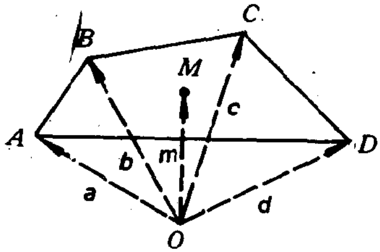

图 1.7

6. 三角形的高：从一个顶点到对边的垂直线段（图 1.8）。

7. 三角形的中线：从顶点到对边中点的线段（图 1.9）。

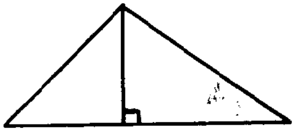

图 1.8

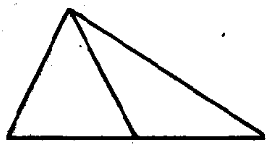

图 1.9

例 1 证明：三角形的三条中线相交于三角形的形心。

证：设 D、E、F 分别为△ABC 的三条边的中点，则有

$$\boldsymbol{d}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}),$$

$$\boldsymbol{e}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

$$\boldsymbol{f}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$

△ABC 的形心 M 由

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\text{所确定。}$$

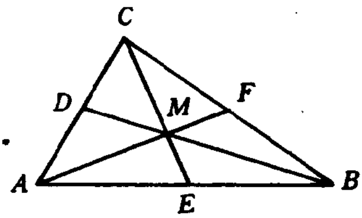

图 1.10

其中，$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$、$\boldsymbol{e}$、$\boldsymbol{f}$ 与 $\boldsymbol{m}$ 分别表示向量$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、$\overrightarrow{OD}$、$\overrightarrow{OF}$与$\overrightarrow{OM}$（O 为一定点）。

把 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{d}$ 代入上面最后一个等式，得

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\frac{2}{3}\boldsymbol{d},$$

由此得知点 M 位于中线 BD 上。

类似地，等式

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{3}\boldsymbol{c}+\frac{2}{3}\boldsymbol{e},$$

$$\boldsymbol{m}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{f}$$

表示 M 也都位于中线 CE 和 AF 上。

注：从 M 的最后三个等式得知三角形的形心按比率 2：1 分割中线。

例 2 证明：三角形的三条高相交于同一点（此点称为三角形的垂心）。

证：设 H 是从顶点 A 与 B 所作高的交点，设 CE 是从顶点 C 连结 H 且与 AB 相交于 E 的线段（图 1.11），我们要证明 CH 垂直于 AB。

由于

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BH}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{b})=0,$

与 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AH}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{a})=0$

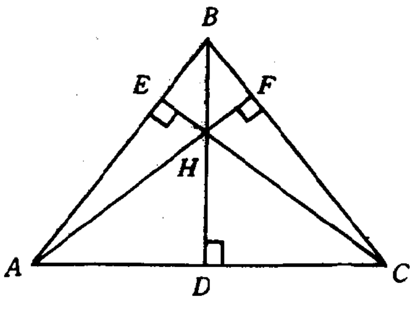

图 1.11

因此

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{c})$

$$
\begin{aligned}
&=[(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{c})\\
&=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{c})\\
&=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\\
&\quad-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\\
&=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\\
&\quad-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{h}-\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\\
&=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\\
&=0,
\end{aligned}
$$

这证明了 $CH\perp AB$，即 $CE\perp AB$。

例 3 证明：三角形三条边的三条垂直平分线相交于同一点（此点称为三角形的外心）。

证： 设 P 是△ABC 两条边 AB 与 AC 的两条垂直平分线的交点，且 F 是 BC 的中点。我们要证明 FP 垂直于 BC（图 1.12）。

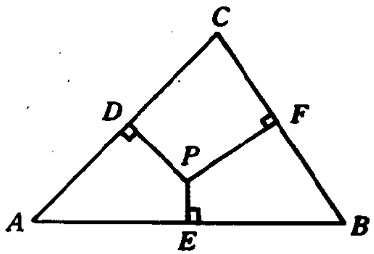

图 1.12

由于

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{EP}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{e})=0,$$

与 $$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DP}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{d})=0,$$

因此

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{FP} &= (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{f})\\
&= [(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{f})\\
&= (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{f})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{f})\\
&= (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot[\boldsymbol{p}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\\
&\quad +(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot[\boldsymbol{p}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\\
&= (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot[\boldsymbol{p}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})]\\
&\quad +(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot[\boldsymbol{p}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]\\
&= (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot[\boldsymbol{p}-\boldsymbol{e}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})]\\
&\quad +(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot[\boldsymbol{p}-\boldsymbol{d}+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})]\\
&= \frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\
&= -\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\\
&= 0
\end{aligned}
$$

这证明了 FP 垂直于 CB。

例 4 证明余弦定理：当 a、b 与 c 是三角形三条边长，且 θ 是边长为 $\boldsymbol{a}$ 的边所对的角，则 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\theta$

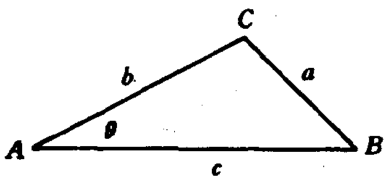

图 1.13

证：设 A、B 与 C 分别为△ABC 的边长为 a、b 与 c 所对的顶点（图 1.13），则有

$$
\begin{aligned}
a^2 &= |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}|^2 = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) \\
&= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}+2(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}) \\
&= \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}-2(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}) \\
&= |\overrightarrow{BA}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AB}|\cos\theta \\
&= b^2+c^2-2bc\cos\theta。
\end{aligned}
$$

练 习 一

1. 证明：顶点是任意四边形 ABCD 各边中点的四边形 EFGH 是平行四边形，并证明这两个四边形有相同的形心。

2. 证明：三角形两边中点连线平行于第三边，且其长度为第三边的一半。

3. 证明：内接于半圆的弓形角为直角。

4. 证明：联接四边形对边中点的两线段在该四边形的形心处相交。

5. 证明：平行四边形的二对角线互相平分，且交点位于平行四边形的形心处。

6. 证明：三角形的外心与它的三个顶点距离相等。

7. 证明：梯形的二对角线互相以相同的比率相交。

8. 设 E 为平行四边形 ABCD 的边 BC 的中点。证明：DE 与对角线 AC 的交点 F 以比率 2：1 分割 AC(图 1.14)。

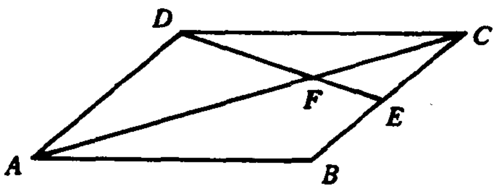

图 1.14

第二节 通过定点的曲线与曲面

线性方程组理论中有一个基本结论为：未知数个数与方程个数相同的线性齐次方程组有非零解的充分必要条件是系数行列式应等于零。

这一节，我们将介绍如何应用这一结论并藉助行列式来建立通过已知点的直线、圆及一般圆锥曲线方程的方法。而且这种方法同样适用于建立通过三维空间中已知点的平面与曲面方程。我们通过例子予以说明。

一、过两定点的直线方程

设平面上有两个不同的已知点 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2)，通过这两点存在唯一的直线，设为

$$a_1x+a_2y+a_3=0 \tag{1}$$

注意到 a_1，a_2，a_3 不全为零。由于 (x_1, y_1) 与 (x_2, y_2) 在同一直线上，故它们满足方程（1），代入后得到两个方程：

$$\begin{cases}a_1x_1+a_2y_1+a_3=0\\a_1x_2+a_2y_2+a_3=0\end{cases} \tag{2}$$

将（2）与（1）合并，得到方程组：

$$\begin{cases}xa_1+ya_2+a_3=0,\\x_1a_1+y_1a_2+a_3=0,\\x_2a_1+y_2a_2+a_3=0。\end{cases} \tag{3}$$

这是一个关于待定系数 a_1、a_2、a_3 的线性齐次方程组，由于 a_1，a_2，a_3 不全为零，即方程组（3）有非零解，于是此方程组的系数行列式应为零，即

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

凡是在直线上的点（x，y）必须满足方程（4），反之，满足方程（4）的每一点（x，y）必在此直线上。因此，方程（4）是通过平面上两定点（x_1，y_1）与（x_2，y_2）的直线方程。

例 1 求通过两点（-1，2）与（3，-4）的直线方程。

解 将这两已知点坐标代入方程（4）得

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

即
$$3x+2y-1=0。$$

二、通过三定点的圆的方程

设平面上有不在同一直线上的三个点(x_1,y_1)，(x_2,y_2)与(x_3,y_3)，由平面解析几何知，通过这三点存在唯一的一个圆，设此圆的方程为：

$$a_1\ (x^2+y^2)\ +a_2x+a_3y+a_4=0。 \tag{5}$$

将上述三点坐标代入方程（5），得

$$\begin{cases} a_1(x_1^2+y_1^2)+a_2x_1+a_3y_1+a_4=0, \\ a_1(x_2^2+y_2^2)+a_2x_2+a_3y_2+a_4=0, \\ a_1(x_3^2+y_3^2)+a_2x_3+a_3y_3+a_4=0。 \end{cases} \tag{6}$$

合并（5）与（6）得到方程组：

$$\begin{cases} (x^2+y^2)a_1+xa_2+ya_3+a_4=0, \\ (x_1^2+y_1^2)a_1+x_1a_2+y_1a_3+a_4=0, \\ (x_2^2+y_2^2)a_1+x_2a_2+y_2a_3+a_4=0, \\ (x_3^2+y_3^2)a_1+x_3a_2+y_3a_3+a_4=0。 \end{cases} \tag{7}$$

这是一个关于 a_1, a_2, a_3, a_4 的线性齐次方程组，由于 a_1, a_2, a_3, a_4 不全为零，即方程组（7）有非零解，故此方程组的系数行列式必为零，即

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

这就是用行列式表示的通过三点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) 与 (x_3, y_3) 的圆的方程。

例2 求通过三点（1，3），（1，－7）与（6，－2）的圆的方程。

解 将这三点坐标代入方程（8）得

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 1^2+3^2 & 1 & 3 & 1 \\ 1^2+7^2 & 1 & -7 & 1 \\ 6^2+2^2 & 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

化简后得 $x^2+y^2-2x+4y-20=0$，

化成标准方程

$$(x-1)^2+(y+2)^2=25,$$

这是一个以（1，－2）为中心，5为半径的圆。

三、通过五个定点的圆锥曲线方程

平面上圆锥曲线（椭圆、双曲线、抛物线）的一般方程为

$$a_1x^2+a_2xy+a_3y^2+a_4x+a_5y+a_6=0,$$

这方程含有六个待定系数，用它们之中不为零的任意一