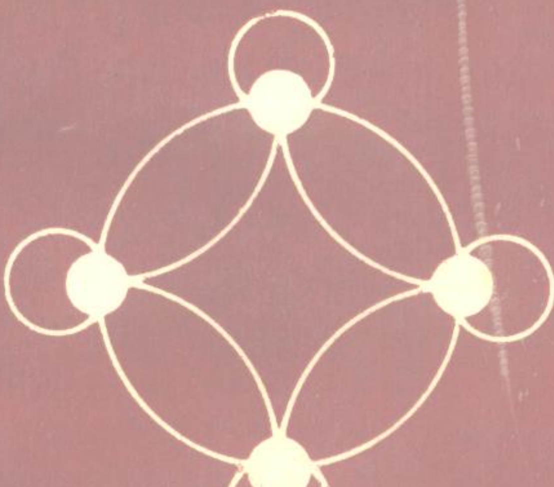
# 信息理论与编码

（下　册）

姜　丹　编著



中国科学技术大学出版社

# 信息理论与编码

## （下　册）

姜　丹　钱玉美　编著

中国科学技术大学出版社

1992・合肥

(皖)新登字08号

# 信息理论与编码

姜 丹 钱玉美 编著

*

中国科学技术大学出版社出版

(安徽省合肥市金寨路96号 邮政编码230026)

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

*

开本：850×1168/32 印张：29.875 字数：773千

1992年10月第1版 1992年10月第1次印刷

印数：1—2500册

ISBN7-312-00402-4/TN·15 上、下册 定价：9.10元

# 目　　次

## （下　　册）

# 第十一章　无噪离散信道编码

通信的根本任务，是要既有效、又可靠地传输信息。要把信源的信息高速度、高质量地通过信道传送给信宿，一般要通过信源编码和信道编码来完成(如图11.1所示)。“信源编码”的作用主

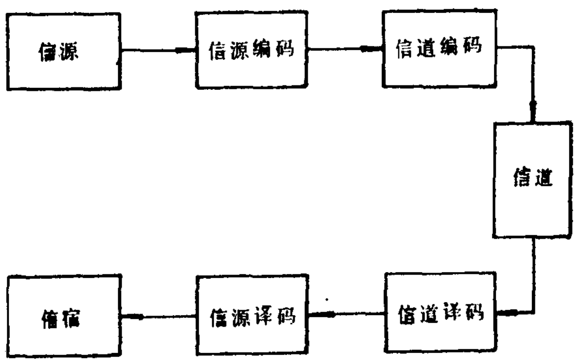



图　11.1

要是用信道能传输的符号来代表信源发出的消息，使信源适合于信道的传输。并且，在不失真或允许一定失真的条件下，用尽可能少的符号来传送信源信息，提高信息传输率。“信道编码”的作用主要是在信道受干扰的情况下，增加信号的抗干扰能力，同时又保持尽可能大的信息传输率。一般而言，提高抗干扰能力往往是以降低信息传输率为代价的；反之，要提高信息传输率又常常会使抗干扰能力减弱。二者是有矛盾的。然而，在信息论的编码定理中，已从理论上证明，至少存在某种最佳的编码或信息处理方法，能够解决上述矛盾，做到既有效、又可靠地传输信息。这些结论对各种通信系统的设计和估价具有重大的理论指导意义。

在前面的十章中，我们比较系统地讨论了单符号离散通信系统、多符号离散通信系统和连续通信系统的信源信息输出率（信源的熵）和信道的信息传输率（信道的平均交互信息量）、信道容量等基本概念。从这一章开始，我们将运用这些基础理论来研究信源编码、信道编码问题。在这一章中，我们着重讨论对离散信源进行无失真信源编码的要求、方法及理论极限，导出一个极为重要的极限定理。

## 第一节　单义可译定理

在实际通信中，首先碰到这样一个问题：设原始信源$S$发出$q$种不同的符号，其符号集$S$：$\{s_1,s_2,\cdots,s_q\}$。传输信息的信道$\{X\ \ P(Y/X)\ \ Y\}$的输入符号集$X$：$\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$。这样，信源$S$发出的消息(符号)$s_i$ $(i=1,2,\cdots,q)$与信道能传递的符号$a_i$ $(i=1,2,\cdots,r)$不一致，即信源$S$不适合于信道$\{X\ \ P(Y/X)\ \ Y\}$的传输，信源$S$发出的消息（符号）不能通过信道，也就不能传输信息。怎样来解决这个问题呢？为此，我们引入信源编码问题。显然，为了能使信源$S$的$q$种不同的消息（符号）$s_i(i=1,2,\cdots,q)$都能通过输入符号集为$X$：$\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$的信道，在信道输入端前，必须用信道能传输的符号集$X$：$\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$中的符号$a_i(i=1,2,\cdots,r)$，对信源$S$中的每一种不同的消息（符号）$s_i(i=1,2,\cdots,q)$进行编码，用符号集$X$：$\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$中的某种符号序列$W_i(i=1,2,\cdots,q)$代表$S$：$\{s_1,s_2,\cdots,s_q\}$中的每一种消息$s_i(i=1,2,\cdots,q)$。因为$W_i(i=1,2,\cdots,q)$是由信道能通过的信道输入符号集$X$：$\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$中的符号$a_i(i=1,2,\cdots,r)$组成的符号序列，所以必能通过信道，这就相当于它们各自代表的信源$S$中的每一种不同消息$s_i(i=1,2,\cdots,q)$必能通过信道，使之适合于信道的传输。以上这个过程就是信源编码。编码器的作用，如图（11.2）所示。符号集$X$：$\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$称

为码符号集，$W_i(i=1,2,\cdots,q)$ 称为码字。

对于通信来说，除了要求信源$S$能适合于信道传输之外，还

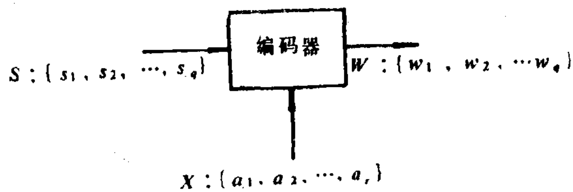



图 11.2

要求能无失真传递信源$S$发出的每种不同的消息$s_i(i=1,2,\cdots,q)$，以及$S$的$N$次扩展信源$\boldsymbol{S}=S_1S_2\cdots S_N$的每一种不同的消息

$$\alpha_i=(s_{i1}s_{i2}\cdots s_{iN}),$$
$$s_{i1},s_{i2},\cdots,s_{iN}\in\{s_1,s_2,\cdots,s_q\},$$
$$i1,i2,\cdots,iN=1,2,\cdots,q,\quad i=1,2,\cdots,q^N.$$

即信源$S$的$N$个符号序列。要解决这一问题，必须对以上的编码再提出更为严格的要求，即每一种码字$W_i(i=1,2,\cdots,q)$必须与信源$S$发出的每一种不同消息（符号）$s_i(i=1,2,\cdots,q)$一一对应，与信源$S$的$N$(任意有限大)次扩展信源 $\boldsymbol{S}=S_1S_2\cdots S_N$ 的每一种不同消息 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,q^N)$ （信源$S$的长度为$N$的符号序列）一一对应，或者说要求任意有限长$N$的信源$S$的符号序列要与任意有限长$N$的码字序列一一对应。这样，才能保证任何一个码字或码字序列只能唯一地翻译成它相对应的信源$S$的符号或符号序列，达到无失真传递信源$S$发出的消息的目的。符合这种单义可译的条件的码$W$：$\{W_1,W_2,\cdots,W_q\}$(或$W$：$\{W_1,W_2,\cdots,W_{qN}\}$) 称为单义可译码。这就是说，要无失真地传递信源$S$发出的消息，对于信源编码来说，必须编出单义可译码。当然，要无失真地传递信源$S$发出的消息，对信道来说，必须是无噪信道。

例如，信源$S$有四种不同的符号$s_1,s_2,s_3,s_4$，它们的先验概率分别为$p(s_1)$，$p(s_2)$，$p(s_3)$，$p(s_4)$，信道的输入符号集$X$：$\{0, 1\}$。现用码符号集$X$：$\{0, 1\}$对信源$S$的四种不同的符

号$s_1,s_2,s_3,s_4$进行编码，得表（11.1）中所示的五种码。

**表 11.1**

| 信源符号 $s_i$ | 概率$p(s_i)$ | 码1：$W(1)$ | 码2：$W(2)$ | 码3：$W(3)$ | 码4：$W(4)$ | 码5：$W(5)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | $p(s_1)$ | 0 | 0 | 00 | 1 | 1 |
| $s_2$ | $p(s_2)$ | 11 | 10 | 01 | 10 | 01 |
| $s_3$ | $p(s_3)$ | 00 | 00 | 10 | 100 | 001 |
| $s_4$ | $p(s_4)$ | 11 | 01 | 11 | 1000 | 0001 |

我们分别来分析一下这五种码的情况。

对于码1—$W(1)$，因为$s_2$对应码字$W_2=11$，$s_4$对应码字$W_4=11$，而$W_2$和$W_4$都是11，所以它不是每一种不同的信源符号$s_i$与每一种不同的码字$W_i$一一对应。这种码我们称之为奇异码，它显然不是单义可译码。

对于码2—$W(2)$，因为$W(2)$中的四个码字$W_1=0,W_2=10,W_3=00,W_4=01$，各不相同，而且各自对应信源$S$中的四种不同的符号$s_1,s_2,s_3,s_4$，这种码称为非奇异码。那么，$W(2)$是不是单义可译码呢？要判断一个码是否是单义可译码，不仅要看它的每一个码字与信源$S$的每一种不同符号$s_i(i=1,2,\cdots,q)$是否一一对应，即不仅要看它是否是一个非奇异码，而且要看它的码字序列是否与信源$S$符号序列一一对应。假如，我们接到一个码字序列01000，我们可翻译为信源符号序列$s_4s_3s_1$，但还可翻译为信源符号序列$s_1s_2s_3$、$s_1s_2s_1s_1$、$s_4s_1s_1s_1$等。所以，这种码从单个码字来看，虽然是非奇异的，但从码符号序列来看，不是非奇异的，即不是单义可译码。对此，我们只要把信源$S$的二次扩展信源$S=S_1S_2$的$q^N=4^2=16$种不同符号序列相对应的$W(2)$的码字序列（码符号序列）写出来（表（11.2））就可以

看得很清楚了。例如：$s_3s_1$和$s_1s_3$对应于同一个码字序列 000；$s_4s_1$和$s_1s_2$对应于同一个码字序列010等。

**表 11.2**

| $\boldsymbol{S}=S_1S_2$ | $W_i$ | $\boldsymbol{S}=S_1S_2$ | $W_i$ | $\boldsymbol{S}=S_1S_2$ | $W_i$ | $\boldsymbol{S}=S_1S_2$ | $W_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1s_1$ | 00 | $s_2s_1$ | 100 | $s_3s_1$ | 000 | $s_4s_1$ | 010 |
| $s_1s_2$ | 010 | $s_2s_2$ | 1010 | $s_3s_2$ | 0010 | $s_4s_2$ | 0110 |
| $s_1s_3$ | 000 | $s_2s_3$ | 1000 | $s_3s_3$ | 0000 | $s_4s_3$ | 0100 |
| $s_1s_4$ | 001 | $s_2s_4$ | 1001 | $s_3s_4$ | 0001 | $s_4s_4$ | 0101 |

对于码 3 —$W(3)$，它的一个显著特点是每个不同码字中所含码符号的个数（码字长度或简称码长）都相同，这种码称为固定长度码或简称定长码。反之，如码字中的码符号个数不相同（如码 1 和码 2），则称这种码为变化长度码，或简称为变长码。显然，由于$W(3)$中各码字都不相同，它是一个非奇异码。而且因为码字长度相同，任意有限长$N$的信源符号序列与码字序列一定是一一对应的，即一定是单义可译码。这就是说，定长非奇异码一定是单义可译码。

对于码 4 —$W(4)$和码 5 —$W(5)$，显然它们都是非奇异码，而且每一种不同的码字序列唯一地对应一种信源符号序列，所以它们都是单义可译码。

在这里，我们要强调指出的是，虽然$W(4)$和$W(5)$都是单义可译码，但它们之间存在一个重要的区别。我们先看$W(4)$，当收到一个或几个码符号后，不能即时判断码字是否已经终结，必须等待下一个或几个码符号收到后才能作出判断。例如，当已经收到二个码符号“10”时，我们不能判断码字是否终结，必须等下一个码符号到达后才能决定。如下一个码符号是“1”，则表示

前面已经收到的码符号序列“10”为一码字$W_2$，把它译成对应的信源符号$s_2$；如果下一个码符号仍是“0”，则表示前面收到的码符号序列“10”并不代表一个码字。因为这种码的所有码字的第一个码符号均为“1”，所以，只有当出现“1”后，才表示另一个码字开始，在这“1”前面的码符号组成了一个码字。收到“1”后，只能翻译出前面一个码字。所以，$W(4)$不能即时进行译码。我们再来观察$W(5)$，因为$W(5)$中每个码字都以符号“1”为终端。在接收码符号序列过程中，只要一出现符号“1”，就知道一个码字已经终结，新的码字就将开始。所以，当出现“1”后，就可立即把收到的码符号序列译成对应的信源符号。可见码字中的终端符号“1”起了“逗点”的作用，这种码又称之为逗点码。这种译码时无需参考后续的码符号就能立即作出译码判断的一类码，称之为即时码。当然，在编码中我们总是希望能编出这种即时码。

在简要介绍和分析了以上五种码的情况以后，我们着重来讨论即时码的结构上的特点。比较$W(4)$和$W(5)$的结构，我们发现，$W(4)$中的$W_1=1$是$W_2=10$的前缀，$W_2=10$又是$W_3=100$的前缀，$W_3=100$又是$W_4=1000$的前缀。或者说，$W_2=10$是$W_1=1$的延长（加一个“0”），$W_3=100$又是$W_2=10$的延长（加一个“0”），$W_4=1000$又是$W_3=100$的延长（再加一个“0”）。但是在$W(5)$中，找不到任何一个码字是另外一个码字的前缀，或者说没有任何一个码字是另外一个码字的延长。这就是即时码（亦称为非延长码）结构上的特点。由此得到构造即时码的充分必要条件：

设$W_i$：$(a_{i1}a_{i2}\cdots a_{ik})$是码$W$中的任一码字，而其它码字

$$W_j:\ (a_{j1}a_{j2}\cdots a_{jm})\quad (m<k) \tag{11.1}$$

都不是码字$W_i$的前缀，则此码为即时码（亦称非延长码）。

在了解了即时码结构上的特点后，以上充要条件的证明是显而易见的。如果码$W$中没有一个码字$W_j$是其它任何一个码字

$W_i$的前缀，则在译码过程中，当收到一个完整的码字的码符号序列时，无需等待下一个符号就能立即翻译成对应的信源符号。反之，如果某码$W$是即时码，则要求收到一个完整码字$W_i$时，就要能立即译出与之对应的信源符号$s_i$，不管下一个码符号是什么码符号，都不会与已收到的码字接续构成$W$中的另一个码字，即已收到的码字不可能是另一个码字的前缀。

即时码（非延长码）是单义可译码的一类子码，即时码一定单义可译。反之，单义可译码不一定是即时码。因为有些非即时码具有单义可译性，但不满足前缀的条件（11.1）式。

在阐明即时码的结构特点后，介绍一种构造即时码的简单方法，即所谓树图法。所谓树，即有根、枝，又有节点，如图（11.3）所示。图中$A$点为根，从根出发伸出树枝，树枝的数目

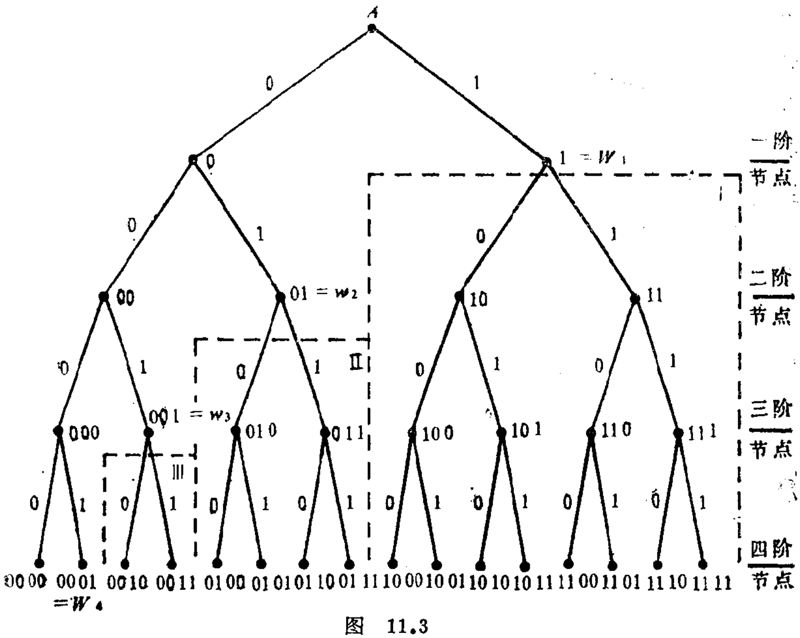



图 11.3

等于码符号集$X$：$\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$的码符号数$r$。如$X$：$\{0,1\}$，即$r=2$，就伸出二条树枝。每条树枝分别标上码符号$a_1,a_2,\cdots$，

$a_r$。当$X$：{0,1}时，就分别标上“0”和“1”。树枝的尽头为节点。从根出发第一次分枝所得节点称为第一阶节点。显然，第一阶节点数为$r$。从根到第一阶节点路经树枝上的码符号为各自第一阶节点码符号序列。从$r$个第一阶节点出发，每个节点再伸出$r$个树枝，每条树枝上按第一次的顺序，同样分别标上码符号$a_1,a_2,\cdots,a_r$，树枝的尽头构成第二阶节点。第二阶节点数为$r\cdot r=r^2$。从根到第二阶节点路经树枝上的码符号组成第二阶节点各自的码符号序列。从$r^2$个第二阶节点出发，各自再伸出$r$个树枝，每条树枝按原来的顺序再分别标上码符号$a_1,a_2,\cdots a_r$，树枝的尽头又构成第三阶节点。第三阶节点数为$r\cdot r\cdot r=r^3$。从根到第三阶节点路经树枝上的码符号组成第三阶节点各自的码符号序列。从$r^3$个第三阶节点出发，各自再伸出$r$个树枝，每条树枝按原来顺序再分别标上码符号$a_1,a_2,\cdots,a_r$，树枝的尽头构成第四阶节点。第四阶节点数为$r\cdot r\cdot r\cdot r=r^4$。从根到第四阶节点路经树枝上的码符号组成第四阶节点各自的码符号序列。如果所要编的码中要求的最大码长为$n$，则这种过程必须继续下去，直至得到第$n$阶节点为止。

码树画好以后，根据对所编码的结构上的要求，从码树上的节点中挑选合适的节点，以它的码符号序列作为码字。例如，表（11.1）中的$W(5)$，它的构码要求当然首先要是即时码（非延长码），在结构上，它要求四个码字的码长分别为$n_1=1,n_2=2$，$n_3=3$，$n_4=4$，码符号集为$X$：{0,1}。我们就可在图（11.3）所示的二进制码树上找四个合适的节点，用它们的码符号序列作为相应的四个码字。对于码长为1（$n_1=1$）的码字，可在第一阶节点中选择。也可选“0”，也可选“1”。假定我们选“1”作为码长为1（$n_1=1$）的码字$W_1=1$。因为从一阶节点“1”伸出树枝所形成二阶节点、三阶节点、四阶节点都是“1”的延长（即在“1”后面再加码符号所构成的），所以在二阶节点中挑选码长为2（$n_2=2$）的码字时，就不能在由一阶节点“1”

延伸出来的树枝的尽头所形成的二阶节点10、11中挑选，只能在由一阶节点“0”延伸出来的树枝的尽头所形成的二阶节点00、01中挑选。假定，我们挑选“01”作为码长为2（$n_2=2$）的码字$W_2=01$。同样，因为从二阶节点“01”伸出树枝所形成的三阶、四阶节点，都是“01”的延长（在“01”后面再加码符号构成），所以在三阶节点中挑选码长为3（$n_3=3$）的码字时，就不能在由二阶节点“01”延伸出来的树枝的尽头所形成的三阶节点010、011中挑选，只能在由二阶节点“00”延伸出来的树枝的尽头所形成的三阶节点000、001中挑选。假定，我们挑选“001”作为码长为3（$n_3=3$）的码字$W_3=001$。同样，因为由三阶节点“001”延伸出来的四阶节点0010、0011都是“001”的延长（在“001”后面分别加“0”和“1”构成），所以，只能在由三阶节点000延伸而成的四阶节点0000、0001中挑选码长为4（$n_4=4$）的码字，我们挑$W_4=0001$。这样，就构成了$W(5)$：$\{W_1=1, W_2=01, W_3=001, W_4=0001\}$。因为在构码过程中，我们把“1”、“01”、“001”、“0001”以下的节点（图(11.3)中虚线框内的节点）都不选为码字，这在结构上保证了$W(5)$的非延长性，$W(5)$一定是一个即时码。

通过以上讨论，对单义可译码，特别是即时码已有初步了解。下面，我们将从理论上来证明一个定理，这个定理说明了存在单义可译码，在结构上必须满足的充分必要条件。我们把这个定理称为单义可译定理。

**定理** 设信源$S$的符号集为$S:\{s_1, s_2, \cdots, s_q\}$，码符号集$X:\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$，又设码字为$W_1, W_2, \cdots, W_q$，其码长分别为$n_1, n_2, \cdots, n_q$。则存在单义可译码的充分必要条件是：$q, r, n_i$（$i=1,2,\cdots,q$）满足 Kraft 不等式，即

$$\sum_{i=1}^{q} r^{-n_i} \leqslant 1. \tag{11.2}$$

**［必要性证明］**

1）即时码

为了叙述的方便，我们不妨以图（11.3）中的$W(5)$为例证明即时码的必要性。

从图中可看出，对于$r$元系统(码符号集中有$r$个码符号)，长度为1的节点数（一阶节点数）是$r^1$，长度为2的节点数（二阶节点数）是$r\cdot r=r^2$，长度为3的节点数（三阶节点数）是$r\cdot r\cdot r=r^3$，长度为4的节点数（四阶节点数）是$r\cdot r\cdot r\cdot r=r^4$。一般地说，长度为$n_i$的节点数（$n_i$阶节点数）是$r^{n_i}$。令节点的最长长度为$n$，则最长节点数（$n$阶节点数）就是$r^n$。

为了保证所构成的码在结构上的非延长性，即保证所构成的码是即时码，在编码过程中，当我们取一阶节点“1”为许用码字$W_1$后，节点“1”以下的所有节点(虚线框Ⅰ之内的所有节点)都不再挑选为其它的许用码字，其中最长节点数是$\frac{r^n}{r^{n_1}}$（其中$n_1$是$W_1=1$的长度$n_1=1$；$n$是最长节点的长度，$n=4$）。当我们取二阶节点“01”作为码长为$n_2$（$n_2=2$）的许用码字$W_2$后，节点“01”以下的所有节点（虚线框Ⅱ之内的所有节点）都不再挑选为其它的许用码字，其中最长节点数是$\frac{r^n}{r^{n_2}}$。当我们取三阶节点“001”作为码长为$n_3$（$n_3=3$）的许用码字$W_3$后，节点“001”之下的所有节点（虚线框Ⅲ之内的所有节点）都不再挑选为其它许用码字，其中最长节点数是$\frac{r^n}{r^{n_3}}$。当我们取四阶节点“0001”作为码长为$n_4$（$n_4=4$）的许用码字后，为了保证码的非奇异性，它本身就不能再被挑选为另一个码长同样是$n_4$的另一个许用码字。这个最长节点数可表示为$\frac{r^n}{r^{n_4}}=\frac{r^n}{r^n}=1$（因为$n_4=4=n$是节点的最长长度）。对于$W(5)$来说，还余下一个最长节点“0000”可被挑选为许用码字，这是一种非用尽的情况。所以，对于

$W(5)$ 这种非用尽的情况，为了取 $W_1,W_2,W_3,W_4$ 作为许用码字，丢掉的最长节点总数小于四阶节点的总数。即

$$\frac{r^n}{r^{n_1}}+\frac{r^n}{r^{n_2}}+\frac{r^n}{r^{n_3}}+\frac{r^n}{r^{n_4}}<r^n \tag{11.3}$$

在（11.3）两边同乘$r^{-n}$（$r^{-n}>0$），可得

$$\frac{1}{r^{n_1}}+\frac{1}{r^{n_2}}+\frac{1}{r^{n_3}}+\frac{1}{r^{n_4}}<1$$

即

$$\sum_{i=1}^{4} r^{-n_i}<1 \tag{11.4}$$

若有另一个即时码$W(6)$：$\{W_1,W_2,W_3,W_4,W_5\}$，各码字的长度分别为$n_1=1$，$n_2=2$，$n_3=3$，$n_4=4$，$n_5=4$，其中$W_1$，$W_2,W_3,W_4$与$W(5)$ 的四个码字相同，取$W(5)$ 余下来的一个最长节点“0000”作为$W_5$。当然，这个四阶节点作为$W(6)$ 的许用码字$W_5$后，就不能再被挑选为许用码字。这个最长节点数可表示为$\frac{r^n}{r^{n_5}}=\frac{r^n}{r^n}=1$（$n_5=n_4=n=4$）。到此，已经没有最长节点可被选用为许用码字，可作为许用码字的最长节点已经用尽。对于这种用尽的情况，为了取$W_1,W_2,W_3,W_4,W_5$作为许用码字，丢掉的最长节点数等于四阶节点的总数，即

$$\frac{r^n}{r^{n_1}}+\frac{r^n}{r^{n_2}}+\frac{r^n}{r^{n_3}}+\frac{r^n}{r^{n_4}}-\frac{r^n}{r^{n_5}}=r^n \tag{11.5}$$

在（11.5）两边同乘$r^{-n}$（$r^{-n}>0$），可得

$$\frac{1}{r^{n_1}}+\frac{1}{r^{n_2}}+\frac{1}{r^{n_3}}+\frac{1}{r^{n_4}}+\frac{1}{r^{n_5}}=1$$

即

$$\sum_{i=1}^{5} r^{-n_i}=1 \tag{11.6}$$

综合用尽和非用尽两种情况，可得

$$\sum_{i=1}^{q} r^{-n_i}\leqslant 1 \tag{11.7}$$

即必要性得证。

2）一般单义可译码

若码 $W$：$\{W_1, W_2, \cdots, W_q\}$ 是单义可译码，各码字 $W_i$（$i=1,2,\cdots,q$）相应的码长为 $n_i$（$i=1,2,\cdots,q$）。设 $L$ 是任意的正整数，则数学上可证明有等式

$$\left[\sum_{i=1}^{q} r^{-n_i}\right]^L = \sum_{i_1=1}^{q}\sum_{i_2=1}^{q}\cdots\sum_{i_L=1}^{q} r^{-(n_{i1}+n_{i2}+\cdots+n_{iL})} \qquad (11.8)$$

其中 $r$ 是码符号集中的码符号数。（11.8）式中的 $n_{i_1}, n_{i_2}, \cdots, n_{iL}$ 都取值且取遍于 $q$ 个码字的长度：$(n_1, n_2, \cdots, n_q)$，所以，可令

$$K_i = (n_{i1}+n_{i2}+\cdots+n_{iL})\ (i=1,2,\cdots,q^L) \qquad (11.9)$$

则 $K_i$ 是 $L$ 个码字组成的码符号序列的长度，而这码符号序列共有 $q^L$ 种（如图（11.4）所示）。当 $L$ 个码字同时取最小长度

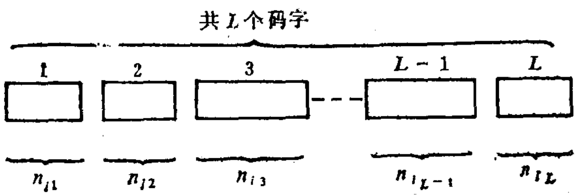



图 11.4

$n_{min}=1$ 时，$K$ 得最小值 $L$；当 $L$ 个码字同时取最大长度 $n_{max}$ 时，$K$ 得最大值 $K_{max}=n_{max}L$，即有

$$L \leqslant K_i \leqslant Ln_{max} \qquad (i=1,2,\cdots,q^L) \qquad (11.10)$$

另一方面，这 $q^L$ 种码符号序列中有的长度是相同的，我们把长度为 $l$ 的序列数记为 $B_l$，这样（11.8）式可改写为

$$\left[\sum_{i=1}^{q} r^{-n_i}\right]^L = \sum_{i=1}^{q^L} r^{-K_i}$$

$$= \sum_{l=L}^{Ln_{max}} B_l r^{-l} \qquad (11.11)$$