

PLASTICITY AND
MESOMECHANICS

塑性力学和
细观力学文集

王自强 徐秉业 黄筑平 编

PEKING UNIVERSITY PRESS

北京大学出版社



庆贺林同骈教授八十寿辰

塑性力学和细观力学文集

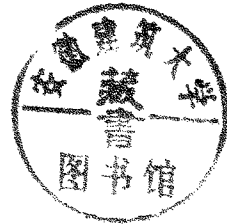
PLASTICITY AND MESOMECHANICS

A Collection of Papers Dedicated to Professor Tung-Hua Lin
in Celebration of His 80th Birthday

王自强 徐秉业 黄筑平 编

Edited by

Wang Tzuchiang, Xu Bingye and Huang Zhuping



北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS

新登字(京)159号

内 容 简 介

本文集汇集了国内塑性力学和细观力学两个领域内的一些学者和专家撰写的 20 余篇学术论文。这些论文从不同侧面对塑性力学和细观力学的近期成果和发展动向作了专题的论述,皆反映了作者的最新研究成果和创新思想。因此,本文集是这两个学科领域中具有总结性和导向性的专题论文集,具有丰富的学术内容和较高的参考价值。

本文集可供高等院校的力学、机械、土木、材料等有关专业的教师、研究生以及科学研究机构的力学家、物理学家、材料科学家参考。

塑性力学和细观力学文集

王自强 徐秉业 黄筑平 编

*

北京大学出版社出版发行

(北京大学校内)

北京大学印刷厂印刷

新华书店经售

*

787×1092 毫米 16 开本 12.5 印张 303 千字

1993 年 3 月第一版 1993 年 2 月第一次印刷

印数: 001—800 册

ISBN 7-301-01954-8/O·297

定价: 12.70 元

序

林同骈教授生于1911年,到1991年正好80岁,为庆祝他的80寿辰,中国力学学会塑性力学专业组特编选本文集以表示我们对林教授的敬意。

林教授早年从事飞机设计与制造工作,抗战期间曾任南川飞机制造厂的工务处长(相当于总工程师),试制成功我国第一架双发动机的运输机。1947年带领飞机设计组赴英,1949年移居美国从事教学与科研。他主要从事物理塑性理论和非弹性结构的研究。1951年以来研究创立了多晶体塑性理论,这个理论适合各项物理条件,且符合试验结果。1968年他发现他研究塑性理论的方法可用于研究金属疲劳裂纹的萌生,并成功地解释了这个裂纹初期在显微镜下照出的许多现象,这正是冶金力学中存在很久而未能解决的一个问题。由于他在材料强度理论方面做出的重要贡献,1988年被美国土木工程师学会授予冯·卡门奖章,1990年被选为美国国家工程科学院院士。他现在虽已年逾古稀,仍孜孜不倦地奋斗于研究的前沿,实为我们后学者的楷模。

林教授长期以来十分关注祖国力学事业的发展,十余年来曾多次回国讲学,帮助培养祖国的力学人才。在历次国际理论与应用力学大会期间多次组织海内外华裔力学学家聚餐交流,勉励有嘉。1991年夏天在我国首次主办的国际理论与应用力学研讨会是关于多晶金属塑性大变形本构关系的会,这正是林教授的本行。他慨然应邀长途跋涉前来参加,并做了塑性力学物理理论的综述报告,极大地支持了研讨会,为会议生色良多。

中国力学学会趁这次研讨会的机会,由塑性力学专业组在北京为林教授组织了祝寿活动,包括在7月20日下午进行的学术报告会,以及当晚举办的祝寿宴会和编辑一本祝寿纪念文集。学术报告会由李敏华教授主持,邀请德国的西奥多·莱曼(Th. Lehmann),法国的约翰·乐梅特(J. Lemaite),美国的杨维训和我国的黄克智,连建设等五位教授做了材料力学性质方面的精辟报告。晚宴由王仁教授主持,出席的有德国、法国、美国、苏联、荷兰、日本、加拿大和国内的同行们及林教授的老朋友特别是抗战时在南川飞机制造厂的同事们共80余人。大家欢聚一堂,致了热情洋溢的祝贺词也回忆了风趣的往事,气氛十分友好热烈。

纪念文集由塑性力学专业组的王自强、徐秉业、黄筑平三位教授负责主编,由于7月20日下午的学术报告会的报告大多已收集在金属大变形塑性本构关系研讨会文集(由北京大学出版社和Springer出版社联合出版,1992)中,本文集是专为林教授祝寿而撰写的论文。我们谨以本文集表达我们对林教授的敬意。祝林教授健康长寿!

中国力学学会理事长

王仁

1992年2月于北京

目 录

序.....王 仁 (i)

· 塑性力学部分 ·

积分型理论中的内时和后继屈服面.....	匡震邦 (1)
单晶体弹塑性变形的 Lagrange 描述.....	黄筑平 (12)
一个三维弹粘塑性本构模型.....	徐 楨 梁乃刚 (20)
蠕变-塑性交互作用的微观机理及其一维本构模型.....	钱正芳 段祝平 范镜泓 (31)
塑性大变形钝化效应和应力/应变场.....	李国琛 刘洪秋 (38)
低碳钢断裂韧性的模拟预测与实验验证——组合.....	张克实 卢智先 郑长卿
功密度模型的应用.....	(47)
土在 π 平面上的屈服轨迹及其对孔隙水压力的影响.....	李广信 (54)
关于 Mohr 平面上的屈服准则和主应力空间上屈服准则之间的联系.....	王文标 (60)
描述饱和软粘土循环蠕变的弹塑性模型.....	王建华 (66)
土的多重屈服面理论与模型.....	郑颖人 (75)
开口薄壁梁弹塑性有限元分析.....	何裕民 黄文彬 (85)
衬里壳的热-塑性屈曲.....	黄怡筠 (92)

· 细观力学部分 ·

形状记忆合金伪弹性行为的细观本构描述.....	黄克智 孙庆平 (100)
晶体塑性理论若干基本问题.....	王自强 (109)
考虑晶界滑动的多晶体塑性大变形本构关系.....	仲 政 杨 卫 黄克智 (118)
体心立方和面心立方金属屈服行为的晶体学及连续力学理论.....	连建设 陈积伟 (127)
细观力学分析和双剪塑性理论.....	俞茂宏 曾文兵 (135)
包含晶粒长大的超塑性变形的本构关系.....	金泉林 徐秉业 (142)
Mechanics of an Extrusion in Single Crystal under High Cycle FatigueQ.Y.Chen S.R.Lin (155)	
铝铜单晶体拉伸变形剪切带的实验研究与力学分析徐 形 董雁瑾 梁乃刚 李焕喜 (167)	
位错的运动和产生与塑性变形的一般关系.....	程经毅 周光泉 (177)
林同骅教授生平简介.....	梁乃刚 (184)
编后记.....	(194)

CONTENTS

Preface.....*Wang Ren* (i)

PLASTICITY

- Subsequent Yield Surfaces and Internal Time in Integral Plastic Constitutive Theory..... *Kuang Zhenbang* (1)
- The Lagrangian Description of the Elastic-Plastic Deformation in Single Crystals *Huang Zhuping* (12)
- A 3-D Constitutive Model for Elasto-Viscoplastic Material *Xu Zhen* and *Liang Naigang* (20)
- Micromechanism and Constitutive Modelling for Creep-Plasticity Interaction *Qian Zhengfang*, *Duan Zhuping* and *Fan Jinghong* (31)
- Plastic Blunting Effects and Stress/Strain Fields During Large Deformation *Li Guochen* and *Liu Hongqiu* (38)
- Numerical Prediction and Experimental Verification of Fracture Toughness for a Low Carbon Steel *Zhang Keshi*, *Lu Zhixian* and *Zheng Changqing* (47)
- Yielding Locus on π -Plane of Soil and its Effect on Hydropressure of Internal Holes *Li Guangxin* (54)
- On the Corresponding Representations in the Principal Stress Space from the Yield Conditions on the Mohr Plane..... *Wang Wenbiao* (60)
- Elastio-Plastic Constitutive Model Describing Cyclic Creeping Strain of Saturated Soft Clay..... *Wang Jianhua* (66)
- Plasticity Theory of Multi-Yielding Surfaces and Constitutive Model for Soil *Zheng Yingren* (75)
- Elastoplastic Finite Element Analysis of Thin-Walled Open Cross-Section Beams *He Yumin* and *Huang Wenbin* (85)
- On the Thermo-Plastic Buckling of Lined Shell..... *Huang Yijun* (92)

MESOMECHANICS

- Micromechanics Description for Pseudo-Elastic Behaviour in Shape Memory Alloys *Hwang Kehchih* and *Sun Qingping* (109)
- Some Basic Problems on Crystal Plasticity..... *Wang Tzuchiang* (109)
- On Finite Deformation Plastic Constitutive Relations of Polycrystals Incorporating Grain Boundary Sliding..... *Zhong Zheng*, *Yang Wei* and *Hwang Kehchih* (118)
- Polycrystalline Yield Surface of BCC and FCC Metals Simulated with Crystallographic and Continuum Mechanics Approaches *Lian Jianshe* and *Chen Jiwei* (127)
- Twin Shear Plasticity and Micromechanics *Yu Maohong* and *Zheng Wenbin* (135)
- The Constitutive Relation for Superplastic Deformation Including Grain Growth *Jin Quanlin* and *Xu Bingye* (142)
- Mechanics of an Extrusion in Single Crystal under High Cycle Fatigue *Chen Qiye* and *S.R.Lin* (155)
- Shear Band of Al-Cu Crystal under tensile Test and its Theoretical Simulation *Xu Tong*, *Dong Yongjin*, *Liang Naiguang* and *Li Huanxi* (167)
- General Relation Between Plastic Deformation and Dislocation Motion and Generation..... *Cheng Jingyi* and *Zhou Guangquan* (177)
- A biographical note on professor Tung-Hua Lin..... *Liang Haigang* (184)
- Postscript (194)

积分型理论中的内时和后继屈服面

匡震邦

(西安交通大学)

摘要 本文推荐一种具有广义度量张量的新内时,用此构造的本构方程可描写弹塑性材料的各向异性硬化性质;用于描写后继屈服面,理论和实验结果颇为一致。

一、引言

复杂加载历史下金属的非弹性变形性质和后继屈服面,长期来吸引了大量的学者^[1-8]。屈服面的形状和尺寸强烈地依赖于屈服面的定义,这使问题更趋复杂。现有文献中存在三种屈服面的定义:采用比例极限或应力应变曲线上偏离直线的点,商定的给定应变值(如 20×10^{-6})处的应力,用后插法从应力应变曲线到弹性线的交点。随着塑性变形的增加,屈服面膨胀(或收缩)、平移、畸变和转动,出现交叉硬化,卸载时存在 Bauschinger 效应。应力和应变的球形分量与偏量分量对非弹性性质的贡献是不同的。对初始不可压缩的各向同性介质,可在 5 维偏量应变或偏量应力空间讨论屈服问题。

Plyushin(Ильюшин, А. А.)^[6-8] 假设偏量应力和偏量应变空间同构。他称 5 维偏量应变空间中偏量应变张量的路径为加载轨迹,指出应力指向 $\sigma_{ij}/\sqrt{\sigma_{ki}\sigma_{kl}}$ 仅仅依赖于上述空间的绝对(内蕴)几何学和运动学参数,即应力是偏量应变路径的泛函数:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \int_0^s K\{s, s', \kappa(s), \kappa(s')\} : d\varepsilon(s') \\ s &= \int_0^P |d\varepsilon| \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 σ 为应力张量, ε 为应变张量, κ 为几何参数向量, K 为核函数张量, s 表示应变轨迹上从变形开始到现时 P 点的弧长, s' ($0 \leq s' \leq s$) 表示到 P' 点的弧长。在下面的讨论中,黑正体字母表示张量,黑斜体字母表示向量。

Pipkin 和 Rivlin^[9] 推荐了一个“弧长理论”, Valanis^[10] 提出“内时理论”,这些都属于积分型本构方程的范畴。本文作者建议了一个如下形式的积分型本构方程^[11]:

$$\sigma' = \int_0^l f_1(l-L) d\varepsilon^P(L) + \int_0^l \int_0^l f_2(l-L_1, l-L_2) d\varepsilon^P(L_1) \cdot d\varepsilon^P(L_2) \quad (2)$$

$$(dL)^2 = d\varepsilon^P(L) : P : d\varepsilon^P(L) \quad (3)$$

式中 $\sigma' = \sigma - \frac{1}{3}\sigma_{kk}I$, I 为二阶的单位张量, $d\varepsilon^P$ 为应变的塑性部分增量, $P = P(\sigma, L)$ 为偏量应变空间的广义度量张量,它是空间性质和变形史的函数,称 L 为内时,此一定义和 Valanis 的定义稍有不同, l 为 L 的现时值。符号 $A:B$ 表示 $A_{ij}B_{ij}$ 或 $A_{ijkl}B_{kl}$ (当 A 为四阶张量时)。

在某些假设下, 文献[12]指出, 后继屈服面 F 可表为

$$F = (d\epsilon^p/dl) : P : (d\epsilon^p/dl) - 1 = 0 \quad (4)$$

本文将结合方程(1)和(2), 给出一新的积分型本构方程, 并用(4)式去描写曲线应变轨迹下的后继屈服面。

二、积分型本构方程和后继屈服面

方程(2)可由简单物质本构理论导出^[13], 或由不可逆热力学理论导出^[10]。对比例加载, 由(4)式导出的后继屈服面和实验相当符合^[12]。当应用(2)式到非比例加载路径或曲线应变轨迹时, 必需考虑轨迹的曲率和挠率的影响, 如(1)式所表示的那样。显然, (1)式比(2)式更一般, 但更复杂。因此, 我们希望保持(2)式或更简单的形式, 但使广义度量张量 P 包含曲率和挠率的影响。在许多实际问题中, 加载过程可分为某些区段, 在每一段内加载特性相同, 因此可把 P 表为

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^N f_i(L, l_{i-1}, \epsilon^p, \kappa_i) \right\}^{-1} I_4 \quad (5a)$$

式中 I_4 为四阶单位张量, κ_i 为第 i 段的几何参数向量, l_{i-1} 为第 i 段起点的弧长, N 为所划分的段数。

为简单计, 本构方程取用下列形式:

$$\sigma' = \int_0^l f(l-L, \kappa) d\epsilon^p(L) \quad (6)$$

$$f(l-L, \kappa) = h\delta(l-L) + \sum_{i=1}^N h_i(l_i, L, \kappa_i) \quad (7)$$

式中 $\delta(l-L)$ 为Kronecker delta, h_i 是正规函数, h 为初始屈服应力, $l = l_N$ 。把(7)式代入(6)式得

$$\left. \begin{aligned} h d\epsilon^p/dl &= \sigma' - R', \quad d\epsilon^p = d\epsilon^p(l) \\ R' &= \sum_{i=1}^N \int_{l_{i-1}}^{l_i} h_i(l_i, L, \kappa_i) d\epsilon^p(L) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

由(8)式得

$$h^2 (d\epsilon^p/dl) : (d\epsilon^p/dl) = (\sigma' - R') : (\sigma' - R') \quad (9)$$

把(3), (5)式代入(9)式便得

$$F = (\sigma' - R') : (\sigma' - R') - h^2 \sum_{i=1}^N f_i(l_i - L_{i-1}, \epsilon^p, \kappa_i) = 0 \quad (10)$$

显然, F 为后继屈服面, 它和广义度量张量 P 密切相关; 因此积分型本构方程中内时的选择不能违背已知的屈服准则, 屈服准则选择内时可靠的依据。目前屈服函数多数在应力空间描写; 在一定条件下, 偏应力空间和偏应变空间同构, 因而不少情况下, 可用 σ , κ_i^s 去代替(5), (8)和(10)式中的 ϵ^p , κ_i , 其中 κ_i^s 为应力空间中应力轨迹的几何参数。在下面的讨论中, 二者将同时使用。

从实验结果^[12,14]发现, 沿一确定的方向, 后继屈服面可分成两部分: 在前面部分有高

的曲率，而后面部分较为平坦 (图1)。令畸变方向为 v ，可表成

$$v = \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} \quad \text{或} \quad v_{ij} = \frac{V_{ij}}{\sqrt{V_{kl}V_{kl}}} \quad (11)$$

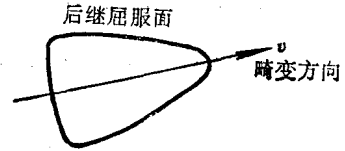
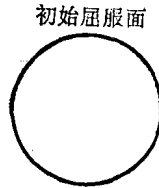


图1 偏应力空间屈服面的畸变方向

Phillips 等认为 \mathbf{V} 取 $d\sigma'$ ，而 Helling 等认为 \mathbf{V} 取 $d\epsilon^p$ 。显然如何选择 \mathbf{V} 是一个极为重要的问题，目前尚未完全解决。

通常引入一畸变参数去描写屈服面的形状，可取

$$\xi = \frac{\sigma' - R'}{h} : \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} = \frac{\sigma'_{ij} - R'_{ij}}{h} \frac{V_{ij}}{\sqrt{V_{kl}V_{kl}}} \quad (12)$$

进一步可设

$$\mathbf{P} = \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M B_{ij}(L, l_{i-1}, \kappa_i) \xi_i^j \right\}^{-1} \mathbf{1}_4 \quad (5b)$$

式中 ξ_i^j 的上标 j 表示 j 次幂。从而(3),(8)和(10)式化为

$$(dL)^2 = d\epsilon^p : d\epsilon^p / \left\{ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M B_{ij} \xi_i^j \right\} \quad (13)$$

$$R' = \sum_{i=1}^N \int_{l_{i-1}}^{l_i} h_i d\epsilon^p = \sum_{i=1}^N \frac{1}{h} \int_{l_{i-1}}^{l_i} h_i (\sigma' - R') dL \quad (14)$$

$$F = (\sigma' - R') : (\sigma' - R') - h^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M B_{ij} \xi_i^j = 0 \quad (15)$$

利用屈服面的实验资料，可确定(15)式中的 h 和 B_{ij} ，然后可确定 \mathbf{P} 和 dL 。

三、某些实验结果的描述

Phillips和Tang, Helling等, Ohashi等对后继屈服问题作了一系列的实验，本节将对一些实验进行描述。Phillips 等采用商业纯铝的薄壁管试样来进行拉伸-扭转试验，采用比例极限作为屈服点，按图 2 方式确定各后继屈服面：将试样加预拉应力 σ_2 到点 2，然后卸载直至反向屈服点 3，然后重新加载到屈服点 4，一般 $\sigma_4 < \sigma_2$ 。再退回到 3—4 之间某点 5，再加切应力至屈服点 6，随后反向加载至点 7，再退回点 5；再按其它路径找屈服面上的点。因此在 Phillips 的方法中，存在卸载过程，顾及这一点是很重要的 (见图 3，图中 σ 单位为 ksi，1ksi = 6.88MPa)。

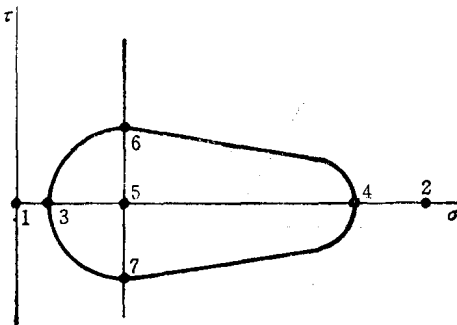


图2 确定后继屈服面的方法

Phillips 等的结果表明按上述方法得到的屈服面，是刚体运动和在预应力方向的变形的叠加，在预应力方向屈服面变窄，而垂直预应力的方向没有变化。

的变形的叠加，在预应力方向屈服面变窄，而垂直预应力的方向没有变化。

对拉伸-扭转问题有

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_{11} &= \frac{2}{3}\sigma, \quad \sigma'_{12} = \sigma_{12} = \tau, \quad \sigma'_{22} = \sigma'_{33} = -\frac{1}{3}\sigma, \quad \sigma'_{13} = \sigma'_{23} = 0 \\ d\varepsilon_{11}^p &= de^p, \quad d\varepsilon_{12}^p = \frac{1}{2}d\gamma^p, \quad d\varepsilon_{22}^p = d\varepsilon_{33}^p = -\frac{1}{2}de^p, \quad d\varepsilon_{13}^p = d\varepsilon_{23}^p = 0 \end{aligned} \right\} (16)$$

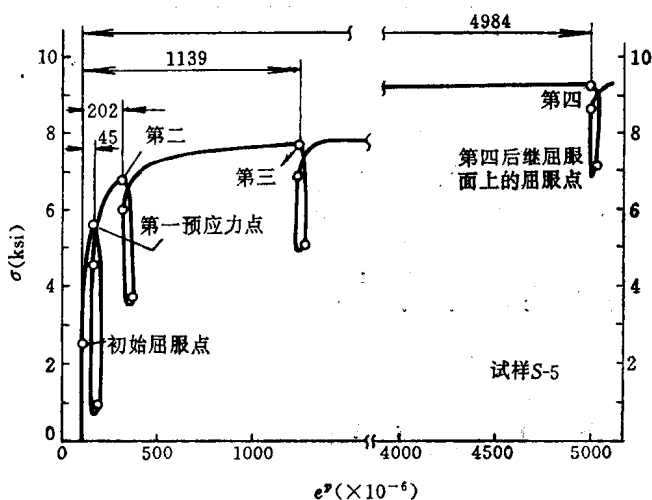


图3 试样S-5的应力-塑性应变曲线^[1]

式中 σ 和 τ 为试验中所加的拉应力和切应力, e^p 为拉伸塑性应变, γ^p 为工程塑性切应变。由(8)和(16)式可推出

$$\left. \begin{aligned} R'_{11} &= \frac{2}{3}R_{11} \neq 0 \\ R'_{22} &= R'_{33} = -\frac{1}{2}R'_{11} \\ R'_{12} &= R_{12} \neq 0 \\ R'_{13} &= R'_{23} = 0 \end{aligned} \right\} (17)$$

式中为方便计引入 R_{ij} , 以后我们取用下列记号

$$\left. \begin{aligned} \pi_{11} &= \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma'_{11} - R'_{11}) = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma - R_{11}), \quad \pi_{12} = \sqrt{2}(\sigma'_{12} - R'_{12}) = \sqrt{2}(\tau - R_{12}) \\ \pi_{22} &= \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma'_{22} - R'_{22}) = -\frac{1}{2}\pi_{11}, \quad \pi_{33} = \sqrt{\frac{3}{2}}(\sigma'_{33} - R'_{33}) = -\frac{1}{2}\pi_{11} \end{aligned} \right\} (18)$$

等效应力 σ_r 和等效塑性应变定义为

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}} = \sqrt{(\sigma^2 + 3\tau^2)}, \quad \varepsilon_r^p = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{ij}^p} = \sqrt{(e^p)^2 + \left(\frac{\gamma^p}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad (19)$$

比例加载时可令 $\mathbf{V} = \boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{R}'$, $d\varepsilon^p$ 的方向和 $\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{R}'$ 相同。如设 α 为 κ 和 π_{11} 应力轴之间的夹角, 计及

$$(\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{R}') : (\boldsymbol{\sigma}' - \mathbf{R}') = \pi_{11}^2 + \pi_{12}^2 \quad (20)$$

再把方程(16)~(18)代入(11), (13), (15)式可得

$$\xi = \frac{\pi_{11}^2 + \pi_{12}^2}{h\sqrt{\pi_{11}^2 + \pi_{12}^2}} = \frac{1}{h}(\pi_{11}\cos\alpha + \pi_{12}\sin\alpha) \quad (21)$$

$$(dL)^2 = \frac{3}{2}[(de^p)^2 + (d\gamma^p)^2/3] / \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M B_{ij}\xi_i^j \quad (22)$$

$$F = \pi_{11}^2 + \pi_{12}^2 - h^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M B_{ij}\xi_i^j = 0 \quad (23)$$

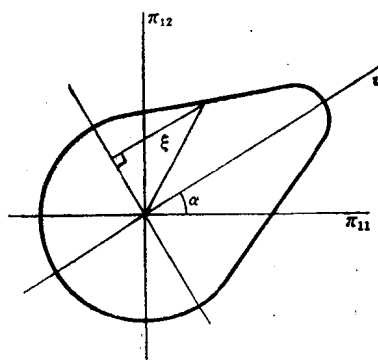


图4 2维空间中屈服面的畸变

和

$$\left. \begin{aligned}
 R'_{11} &= \sum_{i=1}^N \int_{l_{i-1}}^{l_i} \frac{h_i}{h} (\sigma'_{11} - R'_{11}) dL = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^N \int_{l_{i-1}}^{l_i} h_i \sqrt{\frac{2}{3}} \pi_{11} dL \\
 &= \sum_{k=1}^N \int_{l_{k-1}}^{l_k} \sqrt{\frac{2}{3}} \cos ah_i \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M B_{ij} \xi_j} dL \\
 R'_{12} &= \sum_{k=1}^N \int_{l_{k-1}}^{l_k} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin ah_i \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M B_{ij} \xi_j} dL
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

许多情况下，初始屈服面并非完全各向同性，稍稍偏离 Mises 准则；在此情况下，我们将稍稍修正上述二维诸公式（参见文献[11]和附录），此时初始屈服面可表为

$$F^{(0)} = (\pi_{11}/c)^2 + \pi_{12}^2 - h^2; \quad F^{(0)} = 0 \quad (25)$$

(21)–(23)式可分别表为

$$\xi = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{c} \pi_{11} \cos a + \pi_{12} \sin a \right) \quad (26)$$

$$(dL)^2 = \frac{3}{2} [(cde^p)^2 + (d\gamma^p)^2/3] / \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M B_{ij} \xi_j^2 \quad (27)$$

$$F = (\pi_{11}/c)^2 + \pi_{12}^2 - h^2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M B_{ij} \xi_j^2, \quad F = 0 \quad (28)$$

本节后面的讨论将采用(25)–(28)和(24)式。现来讨论文献[1]中的两组试验和文献[2]中的一组试验。

(1) 单轴拉伸 先讨论文献[1]中试件 S-5 在 70°F (21°C) 下的单轴拉伸试验。设变形从 $l_0 = 0$ 开始。对单调加载 ($d\epsilon^p > 0$) 情形，如图 2 中的路径 1–2，取

$$F_1^{(1)} = (\pi_{11}/c)^2 + \pi_{12}^2 - h^2 B_0 - \bar{B}_{12}^{(1)} \pi_{11}^2, \quad F_1^{(1)} = 0 \quad (29)$$

式中 B_{ij} 只取 B_0 和 B_{12} 两项，且令 $\bar{B}_{ij} = B_{ij}/c^j$ 。同时

$$dL = \sqrt{\frac{3}{2}} c d\epsilon^p / \sqrt{B_0 + \bar{B}_{12}^{(1)} \pi_{11}^2 / h^2} \quad (30)$$

$$R'_{11} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos a \int_0^l h_1 (l-L) \sqrt{B_0 + \bar{B}_{12}^{(1)} \pi_{11}^2 / h^2} dL \quad (31)$$

对这一问题的详细研究留待以后进行，本文将主要讨论加载后卸载所构造的屈服面。实验^[1-5]表明，加载方向突然变化，特别是卸载，将在一个小的塑性应变增量下产生屈服应力的有限变化；然而这一效应在不太大的塑性应变增量后消失。因此加载后卸载所产生的后继屈服面，如图 2 中 3–4–6–7 屈服面，可设具有下述形式：

$$F_1^{(2)} = F_1^{(1)} - e^{-a(L-l_1)} [\bar{B}_{12}^{(2)} \pi_{11}^2 + \bar{B}_{13}^{(2)} \pi_{11}^3 / h] \quad (32)$$

式中 a 为一大衰减系数，由于缺乏实验资料，本文难以确定。在卸载后立即确定的后继屈服面，因 $L = l_1$ ，所以后继屈服面可表为

$$F_1^{(2)} = (\pi_{11}/c)^2 + \pi_{12}^2 - h^2 B_0 - (\bar{B}_{12}^{(1)} + \bar{B}_{12}^{(2)}) \pi_{11}^2 - \bar{B}_{13}^{(2)} \pi_{11}^3 / h = 0 \quad (33)$$

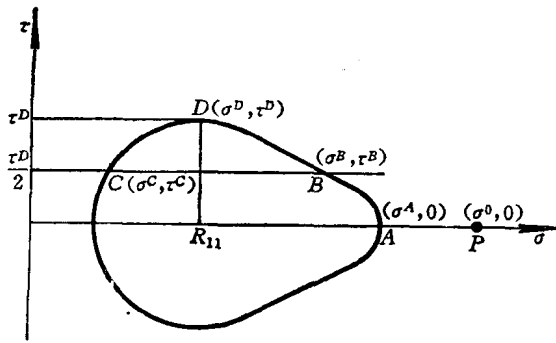


图5 理论屈服面和一些定义

由文献[1]的资料可定出 $c = 1.046$, $h = 1.952$, 即初始屈服面为

$$(\pi_{11}/1.046)^2 + \pi_{12}^2 - 3.8103 = 0$$

由于本试验中无交叉硬化, 故取 $B_0 = 1$. 很难用(33)式精确描写后继屈服面, 因其所取项数太少; 我们将用(33)式去近似后继屈服面, 同时调整屈服面中心 R_{ij} , 如此得出的 R_{ij} 和实际屈服面中心 R_{ij}^* 并不完全一致, 但屈服面的形状可相当接近. 图5表

示由方程(33)确定的理论屈服面, 某些采样点 A, B, C 的取法亦表示在图上. σ^0 为预应力, $\tau^B = \tau^C = \tau^D/2$.

文献[1]中公布的某些实验资料汇集于表1.

表1 文献[1]中拉伸试验的实验资料①

屈服面	$e^p \times 10^3$	σ^0	σ^A	σ^B	σ^C	τ^D	R_{11}^*
初始	0	2.5	2.5	1.746	-1.746	1.38	0
后继1	45	5.507	4.63	4.19	1.01	1.38	2.12
后继2	202	6.742	6.0	5.64	3.67	1.38	4.17
后继3	1139	7.625	6.91	6.58	5.09	1.38	5.43
后继4	4984	9.213	8.53	8.27	7.03	1.38	7.43

① $\sigma^0, \sigma^A, \sigma^B, \sigma^C, \tau^D, R_{11}^*$ 的测量单位为 ksi (1 ksi = 6.88 MPa).

拟合时, 令理论屈服面和实验屈服面在点 A, B, C 点重合, 因取 $B_0 = 1$, 所以最大屈服切应力自动满足. 即令

$$\left. \begin{aligned} (\pi_{11}^0/c)^2 - \bar{B}_{12}^{(1)}(\pi_{11}^0)^2 - 3.81 &= 0, \quad \pi_{11}^0 = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma^0 - R_{11}^0) \\ (\pi_{11}^i/c)^2 - (\bar{B}_{12}^{(1)} + \bar{B}_{12}^{(2)})(\pi_{11}^i)^2 - \bar{B}_{13}^{(2)}(\pi_{11}^i)^3/h &= 3.81 - (\pi_{12}^i)^2 \\ (\pi_{11}^i = \sqrt{\frac{2}{3}}(\sigma^i - R_{11}^i), \quad \pi_{12}^i = \sqrt{2}(\tau^i - R_{12}^i) = \sqrt{2}\tau^i, \quad i = A, B, C) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

利用 $h = 1.952$, $c = 1.046$, $\tau^D = 1.38$, 由上式可推得确定 \bar{B}_{ij} 的方程为

$$\left. \begin{aligned} (\bar{B}_{12}^{(1)} + \bar{B}_{12}^{(2)}) + 0.418(\sigma^A - R_{11})\bar{B}_{13}^{(2)} &= 0.914 - 5.715/(\sigma^A - R_{11})^2 \\ (\bar{B}_{12}^{(1)} + \bar{B}_{12}^{(2)}) + 0.418(\sigma^B - R_{11})\bar{B}_{13}^{(2)} &= 0.914 - 4.287/(\sigma^B - R_{11})^2 \\ (\bar{B}_{12}^{(1)} + \bar{B}_{12}^{(2)}) + 0.418(\sigma^C - R_{11})\bar{B}_{13}^{(2)} &= 0.914 - 4.287/(\sigma^C - R_{11})^2 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

解得的结果示于表2.

理论和实验后继屈服面的比较示于图6 (图中点 $(R_{11}^*, 0)$ 为实验屈服面中心, $(R_{11}, 0)$ 为理论屈服面中心), 符合较好.

由方程(30)和(34)式的第一式, 得

表 2 \bar{B}_{ij} , R_{11} 和 l

屈服面	$\varepsilon^p \times 10^6$	R_{11}	$\bar{B}_{12}^{(1)} + \bar{B}_{12}^{(2)}$	$\bar{B}_{13}^{(2)}$	$l \times 10^6$	π_{11}^A / ch
初始	0	0	0	0	0	1
后继 1	45	2.33	-1.04	0.919	60	0.92
后继 2	202	4.46	-4.435	4.603	323	0.616
后继 3	1139	5.68	-8.62	11.274	2500	0.492
后继 4	4984	7.525	-12.68	18.851	13000	0.402

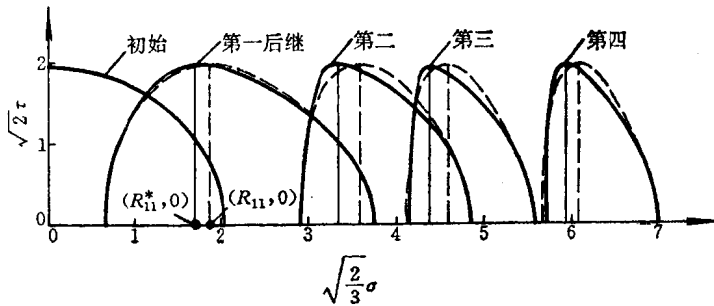


图 6 理论和实验屈服面的比较 (单位)

$$dL = \sqrt{\frac{3}{2}} cde^p / \sqrt{1 + \bar{B}_{12}^{(1)} (\pi_{11}^0 / h)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} cde^p / (\pi_{11}^0 / ch) \quad (36)$$

由于 R_{11}^0 (单调加载时屈服面中心值) 难以由文献[1]的资料直接决定, 因而作为近似, 取用 $\pi_{11}^0 = \pi_{11}^A$. 按照 e^p , π_{11}^0 的实验值, 由 (36) 式确定内时 L , 其近似值亦示于表 2 中. 由上列方法算出的 \bar{B}_{ij} , R_{11} , π_{11}^A / ch 和 l 的关系示于图 7. 按图 7 可得 \bar{B}_{ij} 等的近似表达式, 但直接利用图 7 亦很方便.

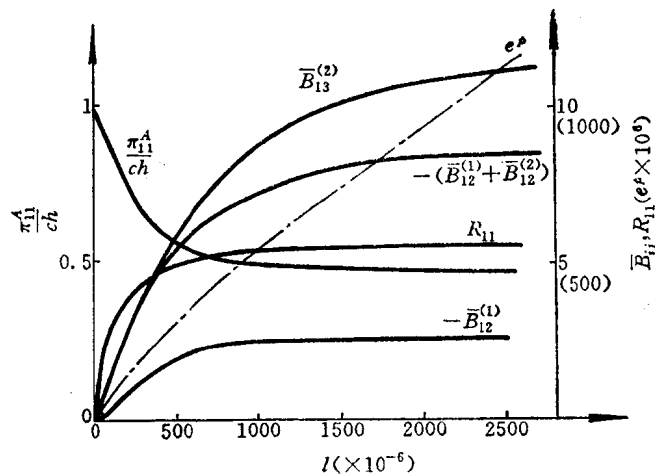


图 7 π_{11}^A / ch , \bar{B}_{ij} , e^p 和 l 的关系

(2) 拉伸-扭转 作为第二个例子讨论文献[1]中的试样 S-7, 在 $70^\circ F$ 下先拉伸后扭转. 预拉应力为 6.158ksi, 预应变为 $e^p = 310 \times 10^{-6}$. 由图 7 得 $l_1 = 535 \times 10^{-6}$, $\bar{B}_{12}^{(1)} + \bar{B}_{12}^{(2)} = -5.6$, $\bar{B}_{13}^{(2)} = 6.36$. 按方程 (33), 第一个后继屈服面的方程为

$$F_{11}^{(2)} = 0.914\pi_{11}^2 + \pi_{12}^2 + 5.6\pi_{11}^2 - (6.36\pi_{11}^3 / h) - 3.81$$

$$= 6.51\pi_{11}^2 - 3.26\pi_{11}^3 - 3.81 + \pi_{12}^2, F_1^{(2)} = 0 \quad (37)$$

对拉伸以后进行的扭转有

$$\xi_2 = \pi_{12}/h, d\varepsilon_{11}^p = 0, \alpha = \pi/2 \quad (38)$$

因此对第二和第三个屈服面，取下列表达式

$$\left. \begin{aligned} F_2^{(1)} &= F_1^{(2)} - B_{22}^{(1)}\pi_{12}^2; & F_2^{(1)} &= 0 \\ F_2^{(2)} &= F_2^{(1)} - e^{-\alpha(L-l_1)}(B_{22}^{(2)}\pi_{12}^2 + B_{23}^{(2)}\pi_{12}^3/h) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

理论屈服面和某些采样点的定义示于图8，其中取 $\sigma^B = \sigma^F = (\sigma^A + R_{11})/2$, $\sigma^C = \sigma^E = (\sigma^H + R_{11})/2$, $\tau^H = \tau^A = R_{12}$ 。和前面类似，确定 B_{ij} 和 R_{12} 的方程组为：

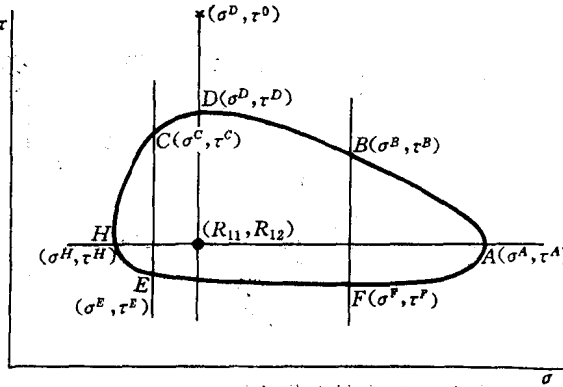


图8 拉伸-扭转时的理论屈服面

$$\left. \begin{aligned} (\pi_{12}^0)^2 - 3.81 - B_{22}^{(1)}(\pi_{12}^0)^2 &= 0; & \pi_{12}^0 &= \sqrt{2}(\tau^0 - R_{12}^0) \\ (\pi_{12}^i)^2 - (B_{22}^{(1)} + B_{22}^{(2)})(\pi_{12}^i)^2 - (B_{23}^{(2)}(\pi_{12}^i)^3/h) - 3.81 \\ &+ 6.51(\pi_{11}^i)^2 - 3.26(\pi_{11}^i)^3 &= 0 \quad (i = D, B, E) \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

由(37)式得 $\pi_{12}^A = 0$ 时, $\pi_{11}^A = 1.257$ ksi, $\pi_{11}^H = -0.678$ ksi, $R_{11} = 3.86$ ksi。从而 $\pi_{11}^B = \pi_{11}^F = 0.629$, $\pi_{11}^C = \pi_{11}^E = -0.339$ 。从而有

$$\left. \begin{aligned} B_{22}^{(1)} &= 1 - 3.81/(\pi_{12}^0)^2 \\ B_{22}^{(1)} + B_{22}^{(2)} + 0.724(\tau^D - R_{12})B_{23}^{(2)} &= 1 - 1.905/(\tau^D - R_{12})^2 \\ B_{22}^{(1)} + B_{22}^{(2)} + 0.724(\tau^B - R_{12})B_{23}^{(2)} &= 1 - 1.023/(\tau^B - R_{12})^2 \\ B_{22}^{(1)} + B_{22}^{(2)} + 0.724(\tau^E - R_{12})B_{23}^{(2)} &= 1 - 1.023/(\tau^E - R_{12})^2 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

表3给出有关的实验数据和计算得出的 B_{ij} , R_{12} , l 值。实验得出的 $\sigma^A = 5.4$ ksi, $\sigma^H = 3.03$ ksi。

表3 拉-扭时的实验数据和算得的 B_{ij} , R_{12} 和 l 值

屈服面	$\gamma^p \times 10^0$	τ^0	τ^D	τ^B	τ^E	R_{12}^*	R_{12}	$B_{22}^{(1)} + B_{22}^{(2)}$	$B_{23}^{(2)}$	$(l-l_1) \times 10^0$	π_{12}^D/h
后继2	2000	2.803	2.50	2.07	0.74	1.16	1.36	-1.983	1.855	1550	0.826
后继3	10000	3.971	3.84	3.56	2.79	2.9	3.15	-7.872	9.386	10080	0.50

计算内时的方程为

$$dL = \sqrt{\frac{1}{2}} d\gamma^p / \sqrt{1 + (B_{12}^{(1)} + B_{12}^{(2)})\xi_1^2 + B_{13}^{(2)}\xi_1^3 + B_{22}^{(1)}\xi_2^2} = d\gamma^p / (\sqrt{2} \pi_{12}^0 / h) \quad (42)$$

上式中已利用了下述事实：扭转加载时沿 $\sigma - R_{11} = 0$ 的线，故在(42)式中有 $\xi_1 = 0$ 。由于Philips的实验中无交叉硬化，故若在(39)式中以(25)式的 F^0 代替其中的 $F_{12}^{(2)}$ ，则可用于纯扭转。理论和实验结果的比较示于图9。

(3) Helling 等的扭转试验 Helling等^[2]对1100-0铝，70:30黄铜和2024-T7作了多轴流动性质实验，屈服点定义为 $\epsilon^p = 5 \times 10^{-6}$ 处的应力，得出存在交叉硬化的结果。本文仅讨论1100-0铝的试验。由于存在交叉硬化，因而 B_0 不再恒等于1。此时纯扭转后继屈服面方程的一般形式为

$$F = \pi_{11}^2 + \pi_{12}^2 - B_0 h^2 - B_{12}^{(1)} \pi_{12}^2 - e^{-\alpha(L-l_i)} (B_{12}^{(2)} \pi_{12}^2 + B_{13}^{(2)} \pi_{12}^3 / h) = 0 \quad (43)$$

对于预应力后卸载，立即得出的后继屈服面有 $L = l_i$ 。采用图8的采样点记号，得确定 B_{ij} 和 R_{12} 的方程为

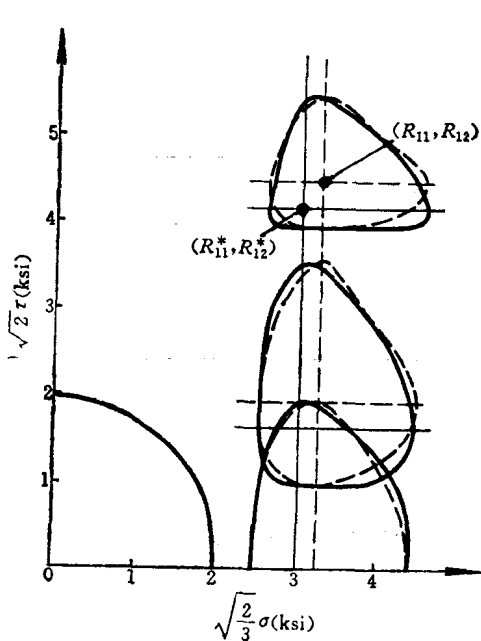


图9 理论和实验屈服面的比较
(拉伸-扭转)

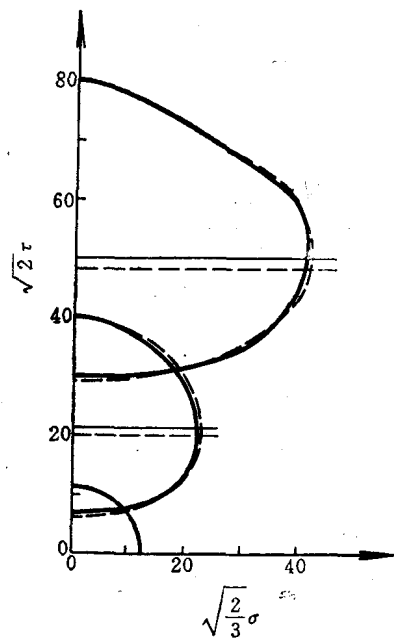


图10 理论和实验屈服面的比较
(扭转, Helling)

$$\left. \begin{aligned} (\pi_{12}^0)^2 - B_{12}^{(1)} (\pi_{12}^0)^2 &= h^2 B_0 \\ (\pi_{11}^i)^2 + (\pi_{12}^i)^2 - (B_{12}^{(1)} + B_{12}^{(2)}) (\pi_{12}^i)^2 - B_{13}^{(2)} (\pi_{12}^i)^3 / h - B_0 h^2 &= 0 \quad (i = A, D, B, F) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

式中 $h = 11.227$ ksi。计算内时的方程为

$$dL = \sqrt{\frac{1}{2}} d\gamma^p / \sqrt{1 + B_{12}^{(1)} (\pi_{12}^0 / h)^2} = d\gamma^p / (\sqrt{2} \pi_{12}^0 / h) \quad (45)$$

利用文献[2]中的数据便可计算 B_{ij} , R_{12} , l 值。结果示于表4。

表 4 Helling等扭转实验数据和算得的 B_{ij} , R_{12} 和 l

屈服面	初 始	后 继 1	后 继 2
$\gamma P \times 10^6$	0	2078	50229
τ^3	7.939	33.486	61.776
τ^D	7.939	29.641	55.841
τ^B	5.615	26.194	50.322
τ^F	5.615	5.514	22.061
σ^A	13.75	27.5	50.625
R_{12}^*	0	14.8	35.1
R_{12}	0	13.95	33.4
B_0	0	4	13.556
$B_{12}^{(1)} + B_{12}^{(2)}$	0	-1.0875	-2.881
$B_{13}^{(2)}$	0	0.5357	0.7716
$l \times 10^6$	0	987	15162
π_{12}^D/h	1.0	1.977	2.827

理论和实验结果比较示于图10。

感谢 本文是在国家自然科学基金和教委博士点基金支持下完成的。本文部分内容曾参照陈康华同志的硕士论文，特此致谢。

参 考 文 献

- [1] Phillips, A. and Tang J-L, *Int. J. Solids Struct.* 8 (1972), 463—474.
- [2] Helling, D.E. et al., *J. Eng. Mat. Tech.*, 108 (1986), 313—320.
- [3] Ohashi, Y. et al., *J. Mech. Phys. Solids*, 21 (1973), 241—261.
- [4] Ohashi, Y. et al., *J. Mech. Phys. Solids*, 29 (1981), 51—67.
- [5] Ohashi, Y. et al., *J. Mech. Phys. Solids*, 29(1981), 69—86.
- [6] Ilyushin, A.A., *Appl. Math. Mech.*, 18(1954), 641(俄文).
- [7] Ilyushin, A.A., *Problems in the Theory of Plasticity*, Izd. Akad. Nauk. SSSR, Moscow (1961)(俄文).
- [8] Ilyushin, A.A., *Plasticity, Foundation of general plastic Theory*, Izd. Akad. Nauk. SSSR, Moscow (1963) (俄文).
- [9] Pipkin, A.C. and Rivlin, R.S., *ZAMP*, 16 (1965), 313—327.

- [10] Valanis, K.C., *Archives of Mech.*, 23 (1971), 517—551.
 [11] Kuang, Z-B., *Acta Mechanica Solida Sinica*, 3 (1990), 245—262.
 [12] Chen, K-H. and Kuang, Z-B., *Proceedings of Plasticity'91*, Edited by J-P. Boehler and A.S.Khan (1991), 297—300.
 [13] 匡震邦, 非线性连续介质力学基础, 西安交通大学出版社(1989).
 [14] Dvorak, G.J. et al., *J. Mech. Phys. Solids*, 36 (1988), 655—687.

附 录

按文献[11], 正交各向异性材料的屈服函数(作了少量修改)可写为

$$F(l) = \frac{1}{2} \{ -\alpha_{1122}[(\sigma_{11} - R_{11}) - (\sigma_{22} - R_{22})]^2 - \alpha_{2233}[(\sigma_{22} - R_{22}) - (\sigma_{33} - R_{33})]^2 - \alpha_{1133}[(\sigma_{33} - R_{33}) - (\sigma_{11} - R_{11})]^2 + 2\alpha_{1212}(\sigma_{12} - R_{12})^2 + 2\alpha_{1313}(\sigma_{13} - R_{13})^2 + 2\alpha_{2323}(\sigma_{23} - R_{23})^2 \} - K^2(l, \sigma, \kappa^\sigma) = 0; \quad K^2(0) = 1 \quad (A1)$$

内时

$$(dL)^2 = \frac{\alpha}{2K^2(l, \sigma, \kappa^\sigma)} \left\{ -\frac{1}{200} [(\alpha_{1133} + \alpha_{2233})(d\varepsilon_{22}^p)^2 + (\alpha_{1122} + \alpha_{2233})(d\varepsilon_{33}^p)^2 + 2\alpha_{2233}d\varepsilon_{22}^pd\varepsilon_{33}^p] + 2[\alpha_{1212}^{-1}(d\varepsilon_{12}^p)^2 + \alpha_{1313}^{-1}(d\varepsilon_{13}^p)^2 + \alpha_{2323}^{-1}(d\varepsilon_{23}^p)^2] \right\} \quad (A2)$$

在拉-扭问题中, 利用(16)和(17)式, 并令 $\alpha_{1122} = \alpha_{1133} = \alpha_{2233}$, $\alpha_{1212} = \alpha_{2323} = \alpha_{1313}$, 则方程(A1)和(A2)化为

$$F(l) = -\alpha_{1122}(\sigma - R_{11})^2 + \alpha_{1212}(\tau - R_{12})^2 - K^2(l, \sigma, \kappa^\sigma) = 0 \quad (A3)$$

$$(dL)^2 = \frac{\alpha}{4K^2(l, \sigma, \kappa^\sigma)} [-\alpha_{1212}^{-1}(d\varepsilon^p)^2 + \alpha_{1212}^{-1}(d\gamma^p)^2] \quad (A4)$$

对初始屈服有

$$F(l) = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{\sigma - R_{11}}{c} \right)^2 + 3(\tau - R_{12})^2 - \frac{3}{2}h^2 \right] = (\pi_{11}/c)^2 + \pi_{12}^2 - h^2 = 0 \quad (A5)$$

比较(A3)和(A5)式, 故若令

$$-\frac{\alpha_{1122}}{\alpha_{1212}} = \frac{1}{3c^2}, \quad \frac{h^2}{2} = \frac{K^2(0)}{\alpha_{1212}} = \frac{1}{\alpha_{1212}} \quad (A6)$$

则(A3)和(A5)式一致. 若再令 $\alpha = 2\alpha_{1212}$, 则(A4)化为

$$(dL)^2 = \frac{3}{2K^2(l, \sigma, \kappa^\sigma)} [(c d\varepsilon^p)^2 + (d\gamma^p)^2/3] \quad (A7)$$