

# 力学及电学系统 中的非线性振动

(美) J.J. 斯托克 著 谢寿鑫 钱耀发 译

上海科学技术出版社

52.2  
616  
C.2

[美] J. J. 斯托克 著

# 力学及电学系统中的 非线性振动

謝 壽 鑫 譯  
錢 曙 復  
朱 照 宣 校

上海科學出版社



## 内 容 提 要

本书叙述非綫性振动的基本原理,可作为学习非綫性振动的入門讀物。内容包括:綫性振动、具有非綫性恢复力系統的自由振动(无阻尼的和有阻尼的)和强迫振动、自激振动、非綫性振动稳定性等以及小参数法、組合振动、张弛振动、极限环的存在性和唯一性、軌道稳定性的判据,还有多自由度系統的非綫性振动等。有力学、工程中的具体問題和数学中有兴趣的材料。

本书可作为大专院校数学力学系的教科书,工科大学师生的参考书,也可供工程技术和研究人員参考。

## NONLINEAR VIBRATIONS

J. J. Stoker

Interscience Publishers, Inc. 1950

## 力学及电学系統中的非綫性振动

謝寿鑫 錢曙复 譯 朱照宣 校

---

上海科学技术出版社出版(上海瑞金二路 450 号)

上海市书刊出版业营业許可証出 093 号

---

上海市印刷四厂印刷 新华书店上海发行所发行

---

开本 850×1168 1/32 印张 10 1/2 插页 2 234,000

1963年11月第1版 1963年11月第1次印刷 印 1-3,500

統一书号 13119·538 定价(十四) 1.70 元

## 譯 者 序

2K57/67

本书英文本初版出于 1950 年。虽然十多年过去了,它至今还是一本关于非綫性振动的很好的入門讀物,适合于当前我国一般工科专业毕业的科学技术人員的程度。这里需要的数学准备知識,大致相当于目前工科专业教学計划中高等数学的内容。当然,如果对常微分方程有更多的了解,那就更好。在振动理論方面,要求讀者先熟练地掌握单自由度的綫性振动,例如通常在工科教学計划中理論力学或电工学所讲授的那些内容。对于数学专业(特别是常微分方程方面)的讀者,除了能从本书了解到有关非綫性振动的物理现象外,还可以从几个附录中找到所感兴趣的材料。

在讀完本书之后,如果想对非綫性振动作进一步的探討,可以参考有关这方面的一些基本文献<sup>①</sup>。

譯文按照英文本譯出,并参考了俄譯本,在翻譯时加了一些注。原来本书讲的全部是关于单自由度的系統,譯者把 1954 年原作者关于《多自由度系統的非綫性振动》的一篇概述性文章譯出,

① 例如: А. А. Андронов, С. Э. Хайкин: "Теория колебаний" (1937);

Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов: "Введение в нелинейную механику" (1937);

Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский: "Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний";

Б. В. Булгаков: "Колебания" (1949);

И. Г. Малкин: "Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний" (1949);有中譯本:《非綫性振动理論中的李亚普諾夫与庞卡萊方法》馬尔金著,科学出版社,1959 年出版。

Малкин: "Некоторые задачи теории нелинейных колебаний" (1956) 等等。

附在后面,供讀者參考。

本書緒論、第三、四、六章及附錄一、二由謝壽鑫譯出,第一、二、五章及附錄三、四、五、六及附篇由錢曙復譯出。

我們要特別指出的是本書在翻譯過程中不斷得到同濟大學朱照宣先生的熱情鼓勵與耐心、細致的幫助,並在百忙中抽暇對全書給以詳細的校訂。為此,我們表示衷心的感謝。另外,我們也向復旦大學一般力學教學小組的同志們所給的有益幫助表示謝意。

譯者 1963年2月

# 目 录

譯者序

緒 論 ..... 1

第一章 綫性振动 ..... 10

§ 1 引言 ..... 10

§ 2 自由振动 ..... 11

§ 3 强迫振动 ..... 13

§ 4 次諧波和超諧波 ..... 16

§ 5 帶有变系数的綫性系統 ..... 19

§ 6 綫性系統的迭加原理。和非綫性系統的对照 ..... 19

第二章 具有非綫性恢复力系統的无阻尼自由振动 ..... 21

§ 1 問題的分类 ..... 21

§ 2 由  $\ddot{x} + f(x) = 0$  所确定的系統举例 ..... 22

§ 3 方程  $m\ddot{x} + f(x) = 0$  的积分 ..... 26

§ 4 在相平面上能量曲綫的几何討論 ..... 27

第三章 具有阻尼的自由振动和积分曲綫的性能 ..... 37

§ 1 本章計劃 ..... 37

第一部分 积分曲綫的几何图象討論 ..... 39

§ 2 在一个特殊情形下积分曲綫的几何討論 ..... 39

§ 3 Liénard 作图法 ..... 41

第二部分 奇点的研究 ..... 46

§ 4 奇点和它們分类的判据 ..... 46

|                     |                                                    |     |
|---------------------|----------------------------------------------------|-----|
| § 5                 | 方程 $\frac{dv}{dx} = \frac{ax + bv}{cx + dv}$ 的特殊情形 | 47  |
| § 6                 | 判別奇点类型的判据                                          | 49  |
| § 7                 | 奇点的指数                                              | 54  |
| 第三部分 奇点概念的应用        |                                                    | 57  |
| § 8                 | 无阻尼自由振动                                            | 57  |
| § 9                 | 受弹簧約束的带电导綫(在磁场中运动)                                 | 60  |
| § 10                | 弹性杆的动力学討論                                          | 64  |
| § 11                | 具有阻尼与角速度平方成正比的摆                                    | 70  |
| § 12                | 具有粘性阻尼的摆的运动                                        | 73  |
| § 13                | 交流电动机的工作原理                                         | 77  |
| § 14                | 同步电动机的失步力矩                                         | 81  |
| 第四章 具有非綫性恢复力系統的强迫振动 |                                                    | 93  |
| § 1                 | 引言                                                 | 93  |
| § 2                 | 无阻尼时关于諧波振动的 Duffing 方法                             | 95  |
| § 3                 | 粘性阻尼对諧波解的影响                                        | 103 |
| § 4                 | 跳跃现象                                               | 107 |
| § 5                 | 在振动載荷下同步电动机的振蕩和失步力矩                                | 109 |
| § 6                 | 小参数法                                               | 111 |
| § 7                 | 次諧波反应                                              | 116 |
| § 8                 | 有阻尼时的次諧波振动                                         | 122 |
| § 9                 | Rauscher 方法                                        | 125 |
| § 10                | 組合音調                                               | 127 |
| § 11                | 稳定性問題                                              | 130 |
| § 12                | 摘要                                                 | 132 |
| 第五章 自激振动            |                                                    | 134 |
| 第一部分 自由振动           |                                                    | 134 |
| § 1                 | 导致自由自激振动的一个电学問題                                    | 134 |

|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| § 2 力学系统中的自激振动 .....                            | 140 |
| § 3 van der Pol 方程的特殊情形 .....                   | 143 |
| § 4 自激振动的基本性质 .....                             | 144 |
| § 5 自由振动的小参数法 .....                             | 149 |
| § 6 张弛振动 .....                                  | 151 |
| § 7 关于张弛振动的高阶近似 .....                           | 154 |
| 第二部分 自激系统中的强迫振动 .....                           | 162 |
| § 8 一个典型的物理问题 .....                             | 162 |
| § 9 关于强迫振动的 van der Pol 方法 .....                | 164 |
| § 10 Андронов 和 Витт 方法 .....                   | 168 |
| § 11 谐波振动的反应曲线 .....                            | 170 |
| § 12 谐波振动的稳定性 .....                             | 174 |
| § 13 一般的非谐波反应. 大失调时稳定组合振动的存在性 .....             | 178 |
| § 14 大失调时组合振动的定量处理 .....                        | 182 |
| § 15 当失调和干扰振幅充分小时组合振动的不存在性 .....                | 187 |
| § 16 大失调时组合振动的稳定性和唯一性 .....                     | 198 |
| § 17 中失调时反应现象的描述. 跳跃现象 .....                    | 200 |
| § 18 次谐波反应 .....                                | 203 |
| 第六章 Hill 方程和它在讨论非线性振动稳定性时的应用 .....              | 204 |
| § 1. 导出 Hill 方程的力学和电学问题 .....                   | 204 |
| § 2 关于具有周期系数的线性微分方程的 Floquet 理论 .....           | 207 |
| § 3 关于 Hill 方程和 Mathieu 方程的稳定性问题 .....          | 214 |
| § 4 Mathieu 方程 .....                            | 218 |
| § 5 关于小的 $\varepsilon$ 值的 Mathieu 方程解的稳定性 ..... | 224 |
| § 6 Duffing 方程谐波解的稳定性 .....                     | 229 |
| § 7 Duffing 方程谐波解的轨道稳定性 .....                   | 235 |
| 附录一 小参数法的数学根据 .....                             | 239 |
| § 1 一般情形下小参数级数的存在性 .....                        | 239 |
| § 2 在具体情形中小参数级数的存在性 .....                       | 243 |

|                                  |     |
|----------------------------------|-----|
| 附录二 組合振动的存在性 .....               | 251 |
| 附录三 自激系統自由振动中极限环的存在性 .....       | 256 |
| § 1 一般討論 .....                   | 256 |
| § 2 极限环的存在性 .....                | 258 |
| 附录四 van der Pol 方程的张弛振动 .....    | 263 |
| 附录五 关于軌道稳定性的 Poincaré 判据 .....   | 269 |
| 附录六 自激系統自由振动中极限环的唯一性 .....       | 275 |
| § 1 概述 .....                     | 275 |
| § 2 唯一性的証明 .....                 | 276 |
| 参考文献 .....                       | 281 |
| 附 篇 多自由度系統的非綫性振动 .....           | 284 |
| § 1 有限自由度系統的 Poincaré 摄动理論 ..... | 284 |
| § 2 两个自由度非綫性系統周期振动的例子 .....      | 289 |
| § 3 連續系統的非綫性振动 .....             | 295 |
| 附篇的参考文献 .....                    | 299 |
| 汉英名詞对照表 .....                    | 301 |

## 緒 論

---

最近二十年来，科学家們为了各种目的努力于研究力学和数学物理中的非綫性問題：例如，只要回顾一下在流体力学——特别是在气体动力学——以及塑性和非綫性弹性力学中所取得的进展。本书目的是給出在非綫性力学的广大領域中另一小部分，即非綫性振动部分的概述。实际上，书的标题是太概括了些，因为我們仅討論单自由度系統；但这是相当现实的，因为事实上更一般的系統研究得很少。

也許值得考虑一下，为什么人們对力学中的非綫性問題特別感兴趣？当然，基本的理由是实际上所有的力学問題都是从非綫性出发的，而通常采用的綫性化是一种近似方法，它也往往正好承认我們面对这类繁复难解的非綫性問題而束手无策。必須补充指出，这些綫性化的近似解，还是很有价值的，而且将来也总有价值；事实上对于很多实际問題，它已是完全足够了。然而也有許多情形用綫性化来处理是不够的。例如，假定弹性系統的振动引起的振幅不很小，那末綫性化的处理对于所要求的結果來說只是不太精确而已。

在这种情形下，采取进一步的近似化，其性质和綫性化中相仿，就可充分地改进精确度。但是，在非綫性系統里經常碰着本质

上新型現象的出現,而這些現象在線性系統中原則上不可能出現。這種本質上非線性現象的一個熟知的例子是氣體動力學領域內從光滑波形成不連續激波。在非線性振動里有類似的例子:如在許多不同類型系統的強迫振動中有次諧波現象產生,有所謂自激系統存在,其中產生一個唯一的周期性自由振動,還有所謂組合頻調的產生。本書主要目的並不是介紹些用來改進線性化所得解的精確度的方法,而是高度集中地注意一些特殊問題——即由非線性引起的特有的新型現象。非線性振動這一科目最引人注意的特性之一,就是它揭示了許許多多不同類型的新現象;更值得驚異的是討論這些現象所用的方法既有益又有趣,而本身並不困難,也不需要很高深的數學。

本書為幾種類型讀者的需要而寫。首先,作者想要介紹基本原理和理論,所用的方法能夠為工程師和物理學家們容易接受,他們的主要興趣是將概念和方法應用到具體的物理問題中去。作者有一個印象,工程師們和物理學家們在實踐中還沒有盡量利用非線性振動理論的豐富知識;如果他們對這一理論更熟悉些,他們是會更多地利用它的。從作者本人的廣泛興趣看來——且不說是偏見——假如忽視應用數學家的興趣和需要,那也將是奇怪的。對於這類讀者,作者着重把各種類型的物理問題漸漸引導到數學關係上,並且在另一方面,對許多數學性質的重要問題,進行了詳細討論,特別是在附錄中。

在這些問題中,部分結果還是最近幾年內才得到的。因此,本書可以為這樣一些讀者服務:他們希望作者能提出界限,哪些還需要新的探討。同時,本書為這些讀者以明顯的或暗示的形式提供了關於對付新問題的啟示,並還提出一系列的和思想和方法,或許能用來解決新問題。本書的材料由作者約十年來在紐約大學所經常領導的討論班和講課讲义積累而成。這個科目一貫

証实为学生們所感兴趣和对他們有启发性。因而作者希望本书能够对想領導同样的討論班或讲授非綫性振动課程的教師們有用处, 同样, 也可以利用它作为常微分方程課程——甚至是基础課程——的补充教材, 可以取得非綫性振动里大量的生动的說明材料。

要想討好多种类型的讀者, 往往有都不討好的危險。但是, 在现在的情形下, 由于材料本身的性质, 这种危險性在頗大程度上避免了。利用不超过初等微分方程的数学知識就可相当滿意地对問題的主要类型进行討論。然而, 这些問題如果給予深入細致的研究, 从数学观点上看来, 馬上引向很难捉摸而有趣的問題——其中之一是所謂“小除数困难”, 在討論組合頻調問題时就馬上会出现。

在更确切地描述本书內容之前, 应当說明一下, 本书不打算提供对非綫性振动范围内最新文献的全面評述, 特別是对以广博和重要而著称的苏联文献。好在最近出版了 N. Minorsky 的著作 (*Introduction to Non-linear Mechanics*)<sup>①</sup>, 和由 S. Lefschetz 翻譯的 Н. М. Крылов 和 Н. Н. Боголюбов 的著作, 以及 А. А. Андронов 和 С. Э. Хайкин 的著作, 在这些著作里可以找到这些文献。作者感到遺憾的是在书中忽略了 Ляпунов 的稳定性理論; 但是适当地处理这个理論就需要比现在这本书有更大的篇幅。

在非綫性振动中所有的基本数学思想和計算技术几乎均来自 H. Poincaré 的工作, 而现在在非綫性振动中所处理的一些特殊的基本物理問題則是由 Rayleigh, van der Pol, 和 Duffing 引

---

① 在 1962 年美国又出版了 N. Minorsky 著的 «Nonlinear oscillations». 它是 «Introduction to Non-linear Mechanics» 的加深本。——譯者注

进的<sup>①</sup>。本书目的是給出直到 1930 年左右这个工作的一貫的和系統的敘述。作者并不想对这一領域在 1930 年之后所有的突出工作給予概述。但是，在书中也討論了相当数量的近代著作，例如，采用了：N. Levinson 和 O. K. Smith 关于自激系統非常普遍情形下的周期解的存在性和唯一性的工作，和 J. Haag 及 A. A. Дородницын 关于张弛振动中周期和其他量的漸近展开式的工作等。

本书的正文有六章和六个附录。前五章是属于基础性质的，第六章稍为复杂些。但是附录并不是初級的，例如它們包含了存在性和唯一性的严格証明。

第一章很短，然而相当完全地敘述了单自由度常系数系統的綫性振动理論。这章的目的有二，一是作为参考，二是和非綫性理論的結果进行比較。

第二章討論可直接积分的非綫性系統，这时沒有与時間有关的外力出现。有相当数量的物理問題作为例子。在这章里可以初次粗略地看到在相平面上几何作法的优越性。

第三章在相平面上詳細討論了和第二章同样类型的自由振动問題，但它不再是可直接积分的了，这里也用各种物理例子來說明。在这一章里引进和应用 Liénard 作图法，敘述了 Poincaré 的一阶常微分方程的奇点理論。这一理論給出了根据方程形式进

① 在非綫性系統中确定和考察周期运动的基本数学方法，是由 A. M. Ляпунов 在其名著《Общая задача об устойчивости движения》(1892) 中由于在考察稳定性問題不能根据一次近似来断定的“临界”情形时給出的。对非綫性振动問題的提法，理論探討和組織广泛的实验研究的，則是 Л. И. Манбелыштам (1879—1944) 和 Н. Д. Папалекон (1880—1947) 的重要功績——他們是这一領域苏联学派的創立者。A. A. Андронов (1901—1952) 曾指出，A. M. Ляпунов 在运动稳定性理論著作中运用的数学方法和 Н. Poincaré 在天体力学及微分方程定性理論的工作开創了关于非綫性振动中重要物理問題的研究。在 A. A. Андронов 的著名的經典著作中指出了非綫性振动系統特有的一系列新的物理现象。这些著作以及 Н. М. Крылов 和 Н. Н. Боголюбов 的研究，奠定了新学科——非綫性振动理論——的基础。——俄譯者注

行奇点分类的判据,还引入了奇点指数的概念。最后,利用解一系列具体的物理問題來說明这些概念和方法的功效。其中之一是从动力学观点討論弹性杆的稳定性問題。另一个有价值的問題是詳細討論了同步电机的失步轉矩<sup>①</sup>問題。

在第四章里討論非綫性强迫振动中的特殊情形,即它的非綫性只是由“弹性”恢复力引起的情形。这类問題首先由 G. Duffing 討論过并得出重要結果。任何时候,只要当具有弹性恢复力的系統在受到周期外力作用而引起振幅充分大的振动时,就产生这类問題。首先討論了“反应曲綫”——即当外力的振幅給定时表明强迫振动振幅作为外加頻率的函数的曲綫。与此相关的是考察同步电机的振蕩<sup>②</sup>問題。同时还探討了在实验上常常观察到的奇特的“跳跃现象”。考虑了粘性阻尼的影响。討論了次諧波振动的出現,还考察了产生組合頻調的問題和简单地叙述了一般的周期振动稳定性問題。但是,除了提供解决一些特殊問題外,本章另一个更重要的目的是提供并考察了在处理周期解时有效的各种分析方法。特别是,闡述了逐次逼近法和小参数法<sup>③</sup>,并用来直接得到微分方程的解;也还間接地应用这两种方法,如用来定出解的 Fourier 級数展开式的系数。因此在这一章里同样的問題有时候用不同的方法处理几次。还要特別注意到在本章內闡述的 Rauscher 逐次逼近法的做法。这章的最后列出了一个(类似于 Duffing 书里的)表,它指出綫性和非綫性系統之間的差別。在非綫性振动的近代文

---

① 同步电机的失步轉矩(pull out torque),在額定电压、額定頻率和正常励磁的条件下,电动机在同步轉速时所能发出的最大持續轉矩。《国际电工辞典》第10組,10—40—150。又譯竭脫力矩。——譯者注

② 振蕩(Hunting)——周期性地变化于穩定状态的两側的情形。《国际电工辞典》第10組,10—40—151。又譯猎振。——譯者注

③ 原文为 iteration and perturbation methods,即《迭代法和扰动法》,今从俄譯本改称为《逐次逼近法和小参数法》。——譯者注

献里,对于这一章所考察的类型問題,即使有的話,也一般只作相当扼要地处理,因而看来詳細地討論也許是有益的。

第五章整章致力于非綫性出现在“阻尼”項(这些項依赖于速度而不依赖于位移<sup>①</sup>)中的問題。用这种方法引起的振动称为自激振动或自持振动<sup>②</sup>。这类系統在自然界中非常普遍:实际上,当系統从常能源輸入能量而保持一个周期运动的时候,就經常出现这样的系統。最熟悉和最重要的技术应用是发生在含有电子管的电学系統中,其中振荡<sup>③</sup>的能量由直流电源供給。同一类型的振动也經常出现在力学和声学系統中。实际上,大概是 Rayleigh 首先指出这种类型的例子:用弓拉提琴弦綫所发出持續音調的情形。若干年前<sup>④</sup> Tacoma 桥遭到破坏的原因,一般的意见都认为是特別巨大的自激振动,它的常能源是风力。机翼的顫振是这类問題的另一个例子。

第五章分为两部分。在第一部分里詳細研究了一系列引起自激振动的电学系統和力学系統。并导出相应的微分方程。这一部分的余下部分从事于对自由振动的分析,即那些沒有受到依赖于時間的外界干扰力作用的振动。因此这部分材料虽可放到第三章中,但是特殊問題的重要意义需要单独地討論。从数学观点来看,这种振动的基本特征是在相平面上出现 Poincaré 意义下的极限环。最簡單的情形是恰好出现一个稳定的极限环。換句話說,所有的运动趋于一个唯一的<sup>⑤</sup>的周期运动。这和具有非綫性恢复力

① 俄譯本作“但也可同时与位移有关”,較确切。——譯者注

② “self-excited”和“self-sustained”应分別譯作“自激振动”和“自持振动”,今后統譯为“自激振动”。——譯者注

③ “oscillations”和“vibrations”在力学中譯作“振动”,在电学中譯作“振荡”,統称时也用“振动”。——譯者注

④ Tacoma 桥毁于 1940 年。——譯者注

⑤ 俄譯本作“确定形式的”。——譯者注

系統的自由振動的動態形成最強烈的對照，在那種系統里發生一族自由運動。當非線性性很小（換句話說，當振動在線性振動附近）時，問題可以而且確是利用小參數法來討論的。但是，在這類問題中，特別重要的却是那些離開線性化很大、甚至是十分大的情形。在這種情形下產生的振動具有一種突變的——就算不說成是不連續的——性質。它們經常被稱為張弛振動，如果把張弛振動的周期用表征離開非線性性的參數的漸近展開式來表示，則較容易得到它的最低階項，但是不易得到較高階項。不巧的是，當振動顯然為張弛型時，定出高階項卻具有決定性作用，所以，尋找一個計算它們的方法具有重要的意義。對於 van der Pol 方程，這樣的方法最近才由 A. A. Дородницын 作出，而更一般的方法由 J. Haag 得到。在第五章的第一部分中對於一個相對簡單的情形，詳細地考察了完全的漸近展開式。

第五章的第二部分考察自由振動是自激型的系統的強迫振動。在所有的情形中都假定振動和線性振動離得不太遠。這個理論是由 van der Pol 創造的。他發明了一個特殊的解題方法，這個分析方法和第四章中討論過的幾種方法都不相同。van der Pol 的方法由蘇聯學者——特別是 Н. М. Крылов 和 Н. Н. Боголюбов ——專門用來解微分方程中顯含時間  $t$  的各種類型問題。但是，作者認為這個方法特別適合於解第五章這一部分討論的問題，在解其他問題時這個方法不一定是最簡單和最直接的方法。我們用含有一個三極電子管和交流電源的特殊電路來闡述 van der Pol 理論。在討論反應現象時，即把周期反應的振幅作為擾動力的頻率和振幅的函數討論時，利用由 A. A. Андронов 和 A. A. Витт 引進的 van der Pol 方法的優良的變體，來討論具有擾動頻率的所有可能周期振動的穩定性。這一方法是根據第三章里由 Poincaré 獲得的判據，將問題歸結為考察 van der Pol 一階微分方程的奇

点类型,而这种方法之所以行得通,是因为事实上每一个周期振动对应于一个奇点类型。Андронов 和 Витт 的思想不仅給出振动的稳定性判据,而且它可用来得出发生組合振动的可能性,所謂組合振动是两种振动之和,其中之一具有扰动頻率,另一个接近于自由的非綫性振动頻率。这样的組合振动与上面刚提到的一阶微分方程的 Poincaré 极限环的存在有关。利用这个方法可以推广到証明对于充分大的“失調”、即当自由振动和强迫振动頻率相差充分大时組合振动是唯一的和稳定的。失調既非十分小、又非十分大时可能出现的情形是非常复杂的。在这种情形下,某些现象——包括各种跳跃现象(回忆起在第四章里討論过的相类似的现象)——的描述由 M. Cartwright 和 J. Littlewood 新近的工作得到。

本书的最后一章——第六章——仍然回到綫性振动,但这时所討論的系統的特性并不象在第一章里假定为常系数,而是時間的周期函数。結果,微分方程成为称作 Hill 方程的类型。有几个理由使得在这本主要討論非綫性系統的书里用很长的一章讲述綫性系統。首先,对任何一个周期的非綫性振动稳定性这样重要問題的討論,必然导向考察 Hill 方程。第二,在这种类型系統里所碰到的振动现象,多少有点象次諧波振动。例如,在某种意义上,它們的位置介于非綫性振动和有常系数特性的綫性振动之間。我們首先討論一些导出 Hill 方程的力学和电学の問題。随后接着对于具有周期系数的綫性微分方程叙述 Floquet 理論。討論給定的周期的非綫性振动的稳定性,必然轉化为判断参数給定的 Hill 方程的解的有界或无界。对于最重要的特殊情形,即 Mathieu 方程,詳細地討論了区别“稳定”和“不稳定”的参数值問題。然后,利用这些結果来檢驗第四章里討論过的 Duffing 方程的强迫振动的稳定性。在适当的物理假定下,得出与第四章相同的結論。