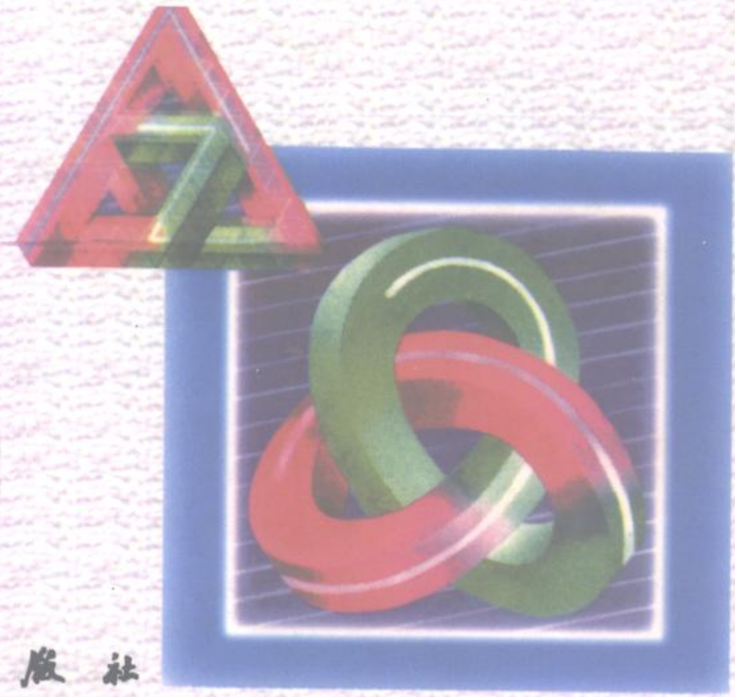
现代数学基础丛书

反应扩散方程引论

● 叶其孝　李正元　著



学出版社

现代数学基础丛书

反应扩散方程引论

叶其孝　李正元　著

科　学　出　版　社

内 容 简 介

在物理学、化学、生物学、经济学及各种工程问题中提出的大量的反应扩散问题，近20年来，日益受到人们的重视. 本书详细阐述与这些问题有关的数学理论、方法及其应用. 本书论证严谨，深入浅出，有一定的自封性，能把读者较快地带到反应扩散方程的各种问题的研究中去. 每章末附有大量习题，有助于读者深入理解本书的内容.

读者对象为理工科大学数学系、应用数学系和其他有关专业的大学生、研究生、教师以及有关的科学工作者.

现代数学基础丛书

反应扩散方程引论

叶其孝　李正元 著

责任编辑 吕　虹

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

新蕾印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1990年2月第 一 版　开本：850×1168 1/32

1999年6月第三次印刷　印张：15 7/8

印数：2 519—4 518　字数：410 000

ISBN 7-03-001500-2/O・306

定价：32.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

前　　言

本书是根据作者 1982 年以来在北京大学、郑州大学、武汉大学和山西大学等单位讲课的讲稿整理而成的．它具有一定的自封性，能把读者较快地带到反应扩散方程的各种问题的研究中去．

现代科学技术的发展在很大程度上依赖于物理学、化学和生物学的成就和进展，而这些学科自身的精确化又是它们取得进展的重要保证． 学科的精确化往往是通过建立数学模型来实现的，而大量的数学模型可归纳为所谓的反应扩散方程．

近二十多年来反应扩散方程的研究日益受到重视．这是因为反应扩散方程涉及的大量问题来自物理学、化学和生物学中众多的数学模型，因而有强烈的实际背景；另一方面，在反应扩散方程的研究中，对数学也提出了许多挑战性的问题，因此正引起愈来愈多的数学家、物理学家、化学家、生物学家和工程师的注意．

1．反应扩散方程及其基本问题．

通常在数学上把以下半线性抛物型方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(x, u)\Delta u + f(x, u, \operatorname{grad} u)$$

$$((x, t) \in \Omega \times \mathbf{R}^+) \tag{1}$$

称为反应扩散方程组，其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$，$n$，$m \geqslant 1$，$x = (x_1, \cdots, x_n)$，$u = (u_1, \cdots, u_m)$，$\Delta u = (\Delta u_1, \cdots, \Delta u_m)$，

$\operatorname{grad} u = (\operatorname{grad} u_1, \cdots, \operatorname{grad} u_m)$，　　$\operatorname{grad} u_i = \left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial u_i}{\partial x_n}\right)$

$(i = 1, 2, \cdots, m)$，$D(x, u) = (d_{ij}(x, u))$ $(i, j = 1, 2, \cdots, m)$．根据不同的问题可以研究初值问题，即 $\Omega = \mathbf{R}^n$，满足初始条件

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (x \in \mathbf{R}^n) \tag{2}$$

也可以研究各种边值问题，即 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 有界，$\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界，满足边界条件

$$u=g(x,t),\quad (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}^+\ (\text{Dirichlet 条件})\tag{3}$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial n}=g(x,t),(x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}^+\ (\text{Neumann 条件})\tag{4}$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial n}+ku=g(x,t),\quad (x,t)\in\partial\Omega\times\mathbf{R}^+\ (\text{Robin 条件})\tag{5}$$

(1) 的与时间 t 无关的解满足

$$-D(x,u)\Delta u=f(x,u,\mathrm{grad}u)\quad (x\in\Omega)\tag{6}$$

我们把定常问题 (6), (3) 或 (6), (4) 或 (6), (5)（其中 $g(x,t)\equiv\bar{g}(x)=\lim\limits_{t\to\infty}g(x,t)$）的解称为 (1), (3)（或 (4) 或 (5)），(2) 问题的平衡解或定态解.(1)的空间均匀的解满足常微分方程组

$$\frac{du}{dt}=\bar{f}(u)\quad (f(x,u,\nabla u)\equiv\bar{f}(u))\tag{7}$$

$$u(0)=u_0\tag{8}$$

还可以研究(1)的行波解 $u(x,t)=u(x-ct)$（设 $n=1$）.

由于(6), (7)是(1)的特殊形式，我们也把(1), (6), (7)的耦合组称为反应扩散方程组.

(1)中的 D 和 f 也可以依赖于 t, $D(x,u)\Delta u$ 也可以替换为非线性抛物算子，边界条件也可以是非线性的，f 也可以是一个泛函，等等.

反应扩散方程研究中的基本问题是:

(i) (1) 的行波解的存在唯一性及稳定性;

(ii) (1) 的初值问题、初边值问题的整体解(包括周期解和概周期解)的存在唯一性及渐近性;

(iii) 平衡解的存在性，尤其是当问题依赖于某些参数时平衡解的分叉结构，以及平衡解的稳定性问题;

(iv) 当解没有整体解时解在有限时间内的"爆炸"(blow up)问题,以及解的其它性质,例如,"熄灭区"(dead region)问题;

(v) 计算方法问题;解决 (i)—(iv) 中各种问题的计算问题有一些困难,需要发展一些新的行之有效的计算方法.

2. 物理学、化学和生物学中提出的反应扩散方程例举.

正因为(1),(6),(7)的耦合组在很大程度上反映了"扩散"和"反应"的相互作用,也反映了分量 u_i 之间的相互作用,因而为许多实际问题的数学模型的建立提供了条件. 为说明反应扩散方程的各种实际背景,我们在这里仅列举若干例子. 为简单起见只写出方程. 如不特别指出参考文献,请参看 [Ye].

A. 半导体方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial n}{\partial t}=\operatorname{div} q\mu_n(\alpha_n \operatorname{grad} n-n\operatorname{grad} V)-R_n(n,p)\\ \dfrac{\partial p}{\partial t}=\operatorname{div} q\mu_p(\alpha_p \operatorname{grad} p+p\operatorname{grad} V)-R_p(n,p)\\ \Delta V=-q(p-n+D)\end{cases}\tag{9}$$

其中 D, q, μ_n, μ_p, α_n, α_p 是正常数,R_n, R_p 是给定的函数.

B. 燃烧方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial T}{\partial t}=K_1\Delta T+Qn\exp\left(-\dfrac{E}{RT}\right)\\ \dfrac{\partial n}{\partial t}=K_2\Delta n-n\exp\left(-\dfrac{E}{RT}\right)\end{cases}\tag{10}$$

C. Belousov-Zhabotinskii 反应的 Noyes-Field 方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=Lrv+u(1-u-rv)+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=Mv-buv+\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\end{cases}\tag{11}$$

Brusslator 方程(见 [Ro])

$$\begin{cases}u_t=a\Delta u+A-(B+1)u+u^2v\\ v_t=b\Delta v+Bu-u^2v\end{cases}\tag{12}$$

D. 神经传导的 Hodgkin-Huxley 方程

$$
\begin{aligned}
u_t &= u_{xx} + l(u, w_1, w_2, \cdots, w_k) \\
w_{it} &= \sum_{j=1}^{k} p_{ij}(u) w_j + q_i(u) \qquad (13) \\
&\quad (i = 1, 2, \cdots, k)
\end{aligned}
$$

E. 酶的数学模型

$$
\begin{aligned}
s_t &= \Delta s - R(s, a) + (s_0 - s) \\
a_t &= \beta \Delta a + [R(s, a) - d(a_0 - a)]
\end{aligned} \qquad (14)
$$

其中

$$
R(s, a) = \frac{\rho a s}{1 + |s| + k s^2}
$$

F. 生态方程(群体增长,传染病,病虫害等)

$$
\begin{aligned}
u_t &= \Delta u + u M(u, v) \\
&\quad + \int_0^t F(u(x, s), v(x, s)) ds \\
v_t &= \Delta v + v \mathrm{N}(u, v) \qquad (15) \\
&\quad + \int_0^t G(u(x, s), v(x, s)) ds
\end{aligned}
$$

其它方程,如渗流方程、超导方程、液晶方程、反应器动力学方程;各种生物现象中提出的众多数学模型;医学提出的各种方程;传热中以及污染问题中出现的对流扩散方程等,在此不一一列举了.其中许多方程组比(9)—(15)更为复杂.

3. 本书内容的安排.

反应扩散方程的研究涉及面很广，就一本书而言是不可能面面俱到的. 根据我们的教学和研究工作的经验，我们认为抓住主要的问题和基本的方法是入门的关键,掌握住这一点,在阅读进一步的文献和做研究工作时都会获益匪浅. 本书各章的内容就是尽可能按这种思想来安排的.

由于在反应扩散方程的研究中用到的研究方法，许多是常微分方程理论中的方法,或是受启发于这种方法,或是常微方法和偏微方法的结合，因此我们把可能要用到的有关常微分方程的知识集中罗列在第一章中(大多数没有证明)，以保持本书在某种意义

下的自封性.

第二章主要讨论单个方程的行波解的存在唯一性，所用的方法是相平面方法(这是一个标准的一般性的方法). 我们既讨论了单调有界非常数行波解(即波前解)的存在唯一性，也讨论了非单调(甚至振动行波解)的存在性. 由于篇幅有限，关于方程组的行波解的讨论只好在本章末的评注中简要地加以叙述，并且我们只叙述有关的方法和结果并尽可能列出最新进展的有关文献. 关于行波解的稳定性这一重要问题我们也只在评注中加以简要叙述.

上、下解方法(或称单调方法)，在研究一些具体的反应扩散方程整体解及平衡解的存在性，以及平衡解的稳定性时，是一个很有效的方法. 第三章给出了单个方程的上、下解方法的有关理论的完整叙述，并给出了它的一些应用. 在本章中还罗列了本书中将用到的最大值原理，椭圆型及抛物型方程的先验估计及有关的存在唯一性定理. 本章还给出了以后要经常用到的椭圆边值问题的特征值理论的系统阐述.

第四章主要讨论单个方程的平衡解的稳定性问题，所讲述的方法是有普遍意义的，在讨论方程组的平衡解的稳定性时也是有参考价值的.

第五章专门讨论方程组的上、下解方法，我们除了揭示它与单个方程的上、下解方法的不同外，还分别讨论了拟增(减)、混拟、非拟单调情形反应扩散方程组的控制问题的引入以及上、下解的定义，由此证明了解的存在定理；本章还对椭圆组讨论了上、下解方法；并用上、下解方法研究非常数平衡解的稳定性.

方程组的最大值原理一般不成立，因而不能用它去得到解本身的最大模估计，从而给用 Schauder 不动点理论等方法证明解的存在性带来了巨大的困难. 受启发于常微分方程的反应扩散方程组的不变区域理论的出现和发展，在某种程度上给出了解本身的最大模估计. 第六章论述了不变区域的本质，也指出了应用不变区域理论的困难所在.

平衡解的存在性以及当问题依赖于某些参数时平衡解关于参

数的分叉结构是一个极其重要的问题. 第七、八两章专门讨论这个问题. 度理论已成为研究非线性问题中不可缺少的拓扑工具,第七章就是度理论在反应扩散方程中的应用. 首先我们以较短的篇幅论述度理论的概要,包括度的定义、性质与计算,力求深入浅出,既直观又准确. 然后论述度理论的应用,利用度理论并将其与上、下解方法相结合讨论椭圆型边值问题的多解问题以及椭圆型方程和常微分方程的分叉问题. 通过解决几类典型问题,尽可能使读者了解到问题的全貌. 第八章涉及常微分方程的二阶保守系统的边值问题,当空间变量是一维时,它是一类反应扩散方程的平衡解方程. 在这一章论述利用相图法讨论二阶保守系统边值问题解的存在性与解的个数的一般原理与步骤,并给出 N. Chafee 和 E. F. Infante 的一个例子,利用相图法可以得到平衡解的全局与完整的分叉结构.

抛物型方程组的初值和初边值问题,常常可看成是适当的 Banach 空间中的一个抽象常微分方程的初值问题,而第九章的半群方法正是解决这一问题的有效方法.但是,当把这一抽象方法用来解决具体的反应扩散方程的有关问题时,必须要结合偏微分方程的有关结果,特别是解的先验估计的有关结果.为了选择正确的基本 Banach 空间,必须要有一系列的嵌入定理. 因而本章的安排首先是讲清抽象理论(扇形算子、分数幂算子、分数幂空间及有关抽象常微分方程的结果),然后是讲怎样把抽象理论用到具体的问题中去. 通过例子说明怎样应用偏微分方程的先验估计及嵌入定理把具体问题纳入抽象框架,怎么选择基本工作空间等等. 我们相信通过这样的讲述会使读者更好地了解怎样使抽象理论发挥作用.

最后一章(第十章)主要研究抽象问题解的渐近性态,论述了一些重要的概念和方法,例如动力系统,极限集,Liapunov 方法和线性化方法等等,并利用这些方法讨论若干反应扩散方程平衡解的稳定性,通过例子说明如何构造 Liapunov 函数,如何证明线性特征值问题最小特征值的正性等.

为使读者更好地掌握本书中所论及的理论和方法，书中配有一定的习题.

本书多数章末有评注，简要论述正文中未涉及的问题或有关问题的最新进展.

本书的出版得到国家自然科学基金的资助，谨此致谢.

由于作者水平有限，书中定有一些错误和不当之处，真诚地希望读者批评指正.

叶其孝　李正元

1985 年

目　　录