

电场数值计算法

〔日〕 河野照哉 合著
宅間 董

尹克宁 译



高等教育出版社

电场数值计算法

[日] 河野照哉 合著
宅間 董
尹克宁 译

科学出版社出版

内 容 提 要

本书分为二大部分共十九章,第I部分主要介绍各种电场数值计算法的基本原理和方法以及其优缺点的比较等。第II部分则在第I部分的基础上介绍了各种特殊条件下电场的计算方法以及最优形状的自动设计法等。最后在附录中还列出了有关公式及计算机程序。

本书不仅对理论问题进行了浅显易懂的介绍,而且还结合实际具体介绍了各种电场的数值计算方法。此外,还根据著者的经验介绍了不少计算中的心得体会,这点是尤为宝贵的。

本书曾荣获1981年度日本电气学会所授予的“最优著作奖”。

本书既可供高等院校电类专业的大学生、研究生从事电磁场理论学习的参考,还可供从事电场计算的科技人员和研究人员的参考。

电场数值计算法

[日] 河野照哉 合著

宅間 董

尹克宁 译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 9.375 字数 226,000

1985年11月第1版 1985年11月第1次印刷

印数 00,001—5,200

书号 15010·0663 定价 2.15 元

译者的话

电场计算不仅是电磁学中的一个基本问题，还是高电压设备的绝缘设计、放电现象的研究、静电的研究和应用等许多领域中所必不可少的。长久以来，依靠一般的解析法只能计算较简单的电场，只是在采用数值算法后，才使较复杂的电场计算成为可能。目前，电场数值算法正越来越受到重视，并不断取得发展。

本书是电场数值算法的一本专著，全书在叙述上深入浅出、实例丰富，尤其宝贵的是书中还介绍了计算中的经验和指出了计算中值得注意的地方。正是由于上述特点本书出版后在日本深受欢迎，并曾荣获 1981 年度日本电气学会的“最优著作奖”^{*}。

本书的著者河野照哉教授和宅間董博士都是日本的知名学者，也是日本电气学会的有关学术组织的负责人。他们对本书中译本的出版给予了大力支持并亲自撰写了中译本序言，译者谨在此再次对这两位先生表示深切的谢意。

最后，译者谨在此对本书翻译、出版过程中曾给予过支持并提出宝贵意见的同志表示深切的谢意。由于自己的业务、外语水平所限，译文中想必有错误与不妥之处，恳请读者多加批评指正。

译者

1984 年 11 月于西安交通大学

^{*} 根据日本电气学会的规定，该会每年将从上一年度的电类出版物中评选出 1 本书授予“最优著作奖”。

中译本序言

电场计算只不过是求解麦克斯韦方程式所规定的电磁场问题的一个局部,但以静电现象、放电现象、绝缘设计作为开端,它已逐渐成为与电场有关的所有部门的基础技术。正如本书的序言中所指出的,电场数值计算法虽然单纯是为了尽可能正确地进行定量的分析计算的一种手段,但目前在许多部门它已成为十分重要的武器,比起 10 年 20 年前的计算手段来,这方面的进步是很令人吃惊的。例如,著者自己就实际运用电场数值计算法作为武器,在对固体绝缘件与电极的接触点的电场集中问题的研究中找到了新的见解,取得了新的成果。

《电场的数值计算》一书出版以来已大约有 3 年。深感荣幸的是本书在日本受到了好评,得到了从事电场计算的工程技术人员、科研人员、大学生和研究生等的广泛利用。当然,这决不是由于本书有多少了不起的地方,而是由于:第一,本书是对最近以来急速发展的电场数值计算法进行全面介绍的书,即使在用英语出版的书中这类书也基本上没有。其次,本书还根据著者的经验,对已有的 4 种或 5 种数值计算法的优点、缺点进行了比较以及介绍了它们在各种条件下的使用方法,这点也是著者特别感到满意的。

中国是我们的祖先以汉字作为开端引进各种文化的先辈国家,因此本书能被翻译为中文出版,著者感到无限地喜悦,如还能在与电场计算有关的领域中起到一定作用的话,著者将更加感到高兴。

著 者

1983 年 8 月

序 言

近年来,随着电场数值计算方法的发展,针对某个具体问题来计算电场已开始成为可能。从 1782 年作为电场计算基础的拉普拉斯方程式被发现到今天,经历了大约 200 年的历史,好不容易电场计算才进入了实用的时代。

电场数值计算法给出了哪些方便呢?只要看一看掌握了标准的电磁场教科书的人究竟能够进行哪种程度的电场计算,即可很好地了解这点。例如,无限长的圆柱体对平面(大地)的电场计算,任何一本电磁场的书上也都有。球对平面的电场计算虽然麻烦些,但可以用无穷级数来表示。但是,实际上圆柱导体常常是有限长的,球也总是带有柄,这样一来用古典的电场计算方法就束手无策了。依靠电场的数值计算法,这些实际的电场计算问题,才开始能够解决。

在高压设备的绝缘设计、放电现象的分析研究、静电感应量的预测、集尘器与电子透镜的分析计算和设计等方面,电场数值计算法都已经成为不可缺少的重要工具。不仅如此,它甚至给某些领域的设计方法和分析计算方法带来了很大的变革。例如,在用 SF_6 (六氟化硫)气体绝缘的领域,如果没有电场计算,几乎任何分析计算都不能进行,而且决定其大小和形状的绝缘设计的大部分工作都是通过电场计算来进行的。在这里,电场数值计算已经不是配角而是主角。今后,作为所谓计算机辅助设计的一个部分,这种趋势必将日益增强。

即使在把电场计算作为进行定量分析计算所必需的手段的领域,对一般的技术人员和研究人员来说,电场计算法本身也不是研究的对象和研究的课题,而仅仅是一种工具。只要使用起来尽可

能地方便而又可靠就行了，但现状还距理想相差较远。这点只要和示波器比较一下即可很好理解。对许多人来说，示波器既不是设计对象也不是研究对象，但却是为进行定量的测量所必需的工具。但是，电场计算法和示波器在下列二点上却是不相同的。

(a) 电场计算法不是现成的成品：示波器已经没有必要靠自己来组装的必要，但电场计算法还达不到这种程度。计算的内容不同，就必须自行编制或修改程序，还常常有必要依靠经验和直觉来编制输入数据。对特殊场的计算以及当计算时间和精确度出现问题时，还必须采纳新研究出的计算方法和技巧。

(b) 对电场计算来说，误差是不明确的：对示波器来说，电压轴也好、时间轴也好，其测量误差都是明确规定着的，也可以很方便地校正。这对定量的测量来说，无疑是必要条件。电场计算法虽然也是用来定量分析计算，但计算误差的评价以及为减少误差所做的努力都取决于计算者个人，常常看做是不确定的。

总之，定量的电场数值计算方法的研究和使用还是最近不久的事，它还没有成为运用自如的工具让人们放心地使用。另一方面，近年来还相继提出了针对更复杂电场的计算法和适用于特殊场的计算法等新的电场计算技术，并正以蓬勃之势取得不断的发展。

针对上述情况，本书试图从电场数值计算法的基本原理直到各种电场的具体计算法都浅显易懂地加以介绍，以便使电场计算法尽可能成为不管是谁都能够使用的实用工具。在过去几年电场数值计算法的发展时期，著者实际上在进行大量计算的同时，还参与了各种电场计算方法的研究。因而，本书在内容上对所有的电场数值计算法是不偏不倚地来介绍的，而且基本上都是在生产实际中直接接触到的计算方法，除了几种例外，还都是著者自己进行过计算实例。特别是著者根据自己的体会，明确地指出了在实际计算时容易错误的地方和难点。为此目的，例如对于计算例

题不仅只是给出结果，还包括计算时用的图，尤其是把电荷模拟法中的轮廓点和假想电荷的实际取法，都尽可能地包括在内。

本书把内容大致分为第 I 部分与第 II 部分。在第 I 部分中，从电场计算的基本问题开始，针对现在（恐怕将来也是）广为使用的 4 种数值算法进行了基础性的介绍，比较了各种计算方法的存在问题和优缺点。就这 4 种方法来说，属于场域分割法的是差分法与有限元法，属于边界分割法的是电荷模拟法与表面电荷法。另外，电场计算的误差以及近期内发表的新的计算方法等也包括在第 I 部分内。到此为止的解释，原则上都是在拉普拉斯方程式成立的场合（不存在空间电荷的场合），是二维的或旋转对称的单一电介质的电场。

第 II 部分中叙述了用第 I 部分中所介绍的数值计算方法来计算各种更复杂的电场的方法与实例。所包括的内容有：复合电介质的场，均匀电场，静电电容计算，静电感应计算，一般的三维场，包含表面电阻、体积电阻的场，有空间电荷的场，直流离子流的场等。另外，能给出最优电场分布的电极形状的自动设计法，也包括在第 II 部分之内。

在附录中汇总了正文内所包含的稍为复杂的公式以及几项重要的解释。另外，还附上了在旋转对称电场时对单一电介质用的电荷模拟法的程序，以便给打算从此开始学习电场计算的读者带来方便。

本书尽量做到使全书的符号统一化。其代表性的符号如下所示。

ϕ : 电位, V : 电极电压, Q : 电荷, E 或者 $\mathbf{E}$ (矢量): 电场, C : 静电电容, S : 边界(面积), q : 空间电荷密度, σ : 表面电荷密度, ρ : 体积电阻率, ρ_s : 表面电阻率, d : 间隙的长度, ϵ : 电介质的介电常数, ϵ_0 : 空气或真空的介电常数 (8.854×10^{-12} 法/米)。

目 录

译者的话

中译本序言

序言	1
第 I 部分 各种电场数值算法	1
第一章 电场计算的方法和特征	1
1.1 解析法	1
1.2 模拟法(电场图形测绘)	5
1.3 与除电场外的其它场的计算方法的关系	5
1.4 和磁场计算的关系	6
第二章 电场数值算法	7
2.1 电场计算的基础	7
2.2 电场数值算法的分类	9
第三章 差分法	11
3.1 计算方法概述	11
3.2 场域分割的问题	15
3.3 边界处理的问题	16
3.4 场域分割法的电位方程式的解法	22
第四章 有限元法	25
4.1 计算方法概述	25
4.2 简单的分割例子和电位方程式	29
4.3 与差分法的区别	32
4.4 场域的自动分割	35
第五章 电荷模拟法	40
5.1 计算方法概述	40
5.2 简单的例子	47

5.3 在计算上的二、三个问题	49
5.3.1 假想电荷和轮廓点的布置	49
5.3.2 关于电位系数的计算	51
5.4 Abou-Seada 及 Nasser 的方法	53
第六章 表面电荷法	55
6.1 计算方法概述	55
6.2 采用不均匀电荷密度的方法	58
6.3 系数矩阵的计算	60
6.3.1 二维场	60
6.3.2 旋转对称场	61
6.4 在计算上的其他问题	64
6.5 与电荷模拟法的比较	65
第七章 电场数值计算的误差	70
7.1 概述	70
7.2 场域分割法的计算精确度	71
7.3 边界分割法的计算精确度	76
第八章 电场数值计算法的比较	85
8.1 概述	85
8.2 其它的算法	85
8.2.1 Warnemünde 法	85
8.2.2 蒙特卡诺法	86
8.3 数值计算法的比较表	88
第九章 最近的种种计算技巧	90
9.1 概述	90
9.2 有限元法	90
9.2.1 面积座标	90
9.2.2 高次近似函数的利用	91
9.2.3 细分割法	94
9.3 电荷模拟法	95
9.3.1 在二维场中保角变换的利用	95

9.3.2 标准的假想电荷之外的电荷的使用	97
9.4 组合算法	102
第 II 部分 各种电场的计算方法	107
第十章 计算上的二、三项注意点	107
10.1 概述	107
10.2 对称性的利用	107
10.3 关于镜像电荷	113
10.4 电极形状的简化	114
第十一章 复合电介质	118
11.1 概述	118
11.2 按差分法计算	118
11.3 按有限元法计算	121
11.4 按电荷模拟法计算	124
11.5 按表面电荷法计算	129
11.6 计算例子	131
第十二章 包含均匀电场、已知电场的计算	136
12.1 概述	136
12.2 计算方法	137
12.3 计算例子	138
12.3.1 均匀电场的场合	138
12.3.2 已知电场的场合	139
第十三章 静电电容的计算	142
13.1 概述	142
13.2 按边界分割法计算	143
13.3 计算例子	146
13.4 在复合电介质场方面的问题	148
13.5 按场域分割法计算	150
第十四章 静电感应的计算	152
14.1 概述	152
14.2 对接地导体的感应	152

14.3	对绝缘导体的感应	154
14.4	复数假想电荷法	157
14.5	计算例子——双回线路中对另一回线的感应	159
14.6	按场域分割法计算	162
第十五章	一般的三维电场	164
15.1	概述	164
15.2	按差分法计算	164
15.3	按有限元法计算	166
15.4	按电荷模拟法计算	167
15.5	按表面电荷法计算	172
15.6	场域分割法与边界分割法的比较及计算例子	174
15.6.1	有限元的计算例子	174
15.6.2	电荷模拟法的计算例子	175
第十六章	包含电阻的电场计算	181
16.1	概述	181
16.2	计算方法的基础	181
16.3	按差分法计算	183
16.4	按有限元法计算	184
16.5	按电荷模拟法来计算包含体积电阻的场	186
16.6	按电荷模拟法来计算包含表面电阻的场	189
16.7	电阻值与电场有关的场合	193
16.8	计算例子	194
16.8.1	与解析解的比较	194
16.8.2	有限元的计算例子	195
16.8.3	电荷模拟法的计算例子	196
第十七章	有空间电荷时电场的计算	203
17.1	概述	203
17.2	按场域分割法计算	205
17.3	迭加电荷作用的计算	208
17.4	存在表面电荷的电场计算	212

第十八章 直流离子流场的计算	214
18.1 概述	214
18.2 按离子不扰乱电场的情况计算	215
18.3 按离子不扰乱电场的方向计算	219
18.4 一般的计算——差分法和有限元法	223
18.5 两极性、多线输电线的离子流场的计算——有限元法	227
第十九章 最优形状的自动算法	235
19.1 概述	235
19.2 最优形状设计法的概要	236
19.3 按电荷模拟法的计算 1: 以形状(轮廓点)的修正为中心 的方法	238
19.4 按电荷模拟法的计算 2: 以假想电荷的修正为中心的方法	241
19.5 按场域分割法计算	243
附录	246
附录 1 在电荷模拟法中所使用的假想电荷(图 5.2)的电位、电场的公式	
附录 2 在电荷模拟法中按最小二乘法的方程组	
附录 3 第二种完全椭圆积分 $E(k)$ 按算术几何平均法的计算	
附录 4 由一般的三维场中的环状电荷的 1 个分量 $\lambda_k \cos k_\varphi$ 在 P 点 (r, θ, z) 所产生的电场的公式	
附录 5 圆环函数 $Q_{k-1/2}(Y)$ 的数值算法	
附录 6 三角形(四角形)分割的表面电荷法	
附录 7 旋转对称场的电荷模拟法的计算程序	
文献	279
跋	286

第 I 部分 各种电场数值算法

第一章 电场计算的方法和特征

在介绍电场的数值算法之前,有二、三个问题如能事先触及则较好.首先是除数值法外称为解析法的这样一种计算方法,以及利用和电流场的相似性来求电场的模拟法.其次是比起除电场外的其他场的算法来,电场算法的特点,再就是它和磁场计算的关系等.在本章中只就上述这几点汇总简介于后.

1.1 解 析 法

(1) 库仑定律和高斯定理

在电磁场教科书中导出了许多公式.如果 1 章中有 100 个公式,那么 10 章中就有 1000 个公式,恐怕至少不下 1000 个公式吧.其中最先导出、也是最重要的公式之一,想来谁也不否认就是库仑定律吧.它直接表示了点电荷所产生的电场.具体来说,在无限宽广的媒质中具有一个球形电极场合的电场可以从该定律的公式推导出来.

这是电场计算中最容易的问题之一.但是,也可以把它作为下列问题,让学生算一算.

“把半径为 r 的球形电极的电位取为 V 时;求电极表面的电场强度 E ”.

如对曾在二年级时学过电磁场的四年级学生给出这样的问题

试试,或许完全可以证明,在电磁场中曾经学过的这类公式怎么没有记住呢。

由点电荷所产生的电位 V 为 $Q/4\pi\epsilon r$, 电场强度 E 为 $Q/4\pi\epsilon r^2$, 因而其答案为:

$$E = V / r \quad (1.1)$$

但是,如果用背诵这类式子的方法来学习电磁场,不就成了在一、二年内在脑子里边什么东西也没有留下了吗!

如把从库仑定律所推导出的高斯定理按下列形式来加以理解,则上述担心就不必要了。“从电荷 Q 产生出 Q/e 根电力线,其面积密度就是电场强度的大小。”当电力线向四周呈辐射状伸出时,从高斯定理出发即可简单地求出电场强度来。如针对上述问题来说,以球的表面积 $4\pi r^2$ 去除 Q/e , 即可求得电场强度。如把电场强度积分即可求得电位。

此外,同样地可以求出同心球、圆柱体、同轴圆筒的电场来。

(2) 镜像法

根据镜像法,求取电场的范围可以一定程度地扩大。即对于无限宽阔的大地,面对一个球或一个圆柱体的场合,如把它们作为球-球、圆柱体-圆柱体来假定镜像电荷即可求解。对镜像法的定义也许可以有各式各样的说法,但也能够解释为原先仅分布存在于电极表面的电荷,可以置换为满足电极表面等电位条件下的内部电荷或电荷群。这种看法将成为过渡到后面的电荷模拟法的一个开端。

一般的电磁场教科书通常都只讲到这里为止,对于后述的保角变换法和座标变换法,即使写了也不过是方法的简单说明罢了。因而,掌握标准的电磁场教科书后所能计算的电场仅限于均匀电场以及被置于均匀电场中的电介质球或空心球,就电极形状而言,仅限于球、同心球、以及球-球、圆柱体、同轴圆筒和圆柱体-圆柱体等。

(3) 保角变换法

在二维电场的场合,如采用保角变换法,则对许多种类的电极形状,均可用解析法来求取电场。其原理在于如将均匀电场和圆柱体电场等已知电场的等位面 and 电力线按一定的函数关系进行保角变换,则被变换的图形将保持等位面和电力线之间的关系。这种函数如是初等函数当然不成问题,即使用椭圆函数之类的高等函数也可以。另外,由于可以反复进行若干次保角变换,所以对于许多种电极形状,均可求出其电场。

但是,遗憾的是,对能给出的电极形状,要找出把它变换为均匀电场或圆柱体电场的函数,除多角形的情况之外都是不可能的。因而,为了实际利用保角变换法,应当从大量汇集有迄今前人已做过的计算实例的书中,去找出对自己有用的东西来。在电线和电缆等可以当作二维电场处理的场合,能直接起作用的例子将很多。例如,导体断面是椭圆的场合和多导体方式的电场等即是。

对于实际上存在的大量的旋转对称形状,在其断面以保角变换给出时,也可近似按二维电场来进行计算。长期以来,在高压实验中所采用的罗果夫斯基(Rogowski)电极就是把按保角变换法所给出的二维形状保持不变而加以旋转所得出的实际电极形状。近年来在气体绝缘中大量使用的 SF_6 气体,如采用罗果夫斯基电极,则近似就成为问题。比起空气来, SF_6 气体对电场是敏感的,容易在电极端部因电场集中而产生放电,而这在空气中却是不成问题的。所以这种气体绝缘方式的发展也就成为电场数值计算法的必要性的一种大的推动力。

由于保角变换法也仅限于二维电场,且实际有价值的电极形状所占比例较小,故实际的利用价值也可以说不高。

(4) 座标变换法

这是把拉普拉斯方程式假定为变量分离的形式去求解的方法。从拉普拉斯方程式最初是用球座标来给出这点出发,也可以

看出这个方法的有效性。如采用旋转椭圆座标、旋转抛物面座标等可以求得旋转对称电极的电场。对于旋转椭圆柱、旋转双曲面、旋转抛物面等,依靠适当选取参数,即可表示范围相当广阔的电极形状,所以可用与实际相近似的电极形状来大致估计电场和电容量等。

如采用双球面座标,对在镜像法时曾提到过的球-球或球-平板电极的电场也可以求出。虽说是可以用解析方法去求,但这时也成为勒让德(Legendre)函数的无穷级数,所以它比起在镜像法中用无穷多个点电荷来表示并不优越。即使用计算机精密进行计算,但在上述那样的现实情况下,至少支持球的柄是必要的,如果柄的表面电场增大,则容易产生电晕放电,所以柄的粗细要选取适当。由于这样的柄的存在,球表面的电场强度将根据场合不同而受到百分之几的影响,所以只对球-球电极的公式进行正确的数值计算是没有什么意义的。希望连柄都包含在内,正确地进行电场计算,并尽量和放电起始电压的实验结果一致,这就成为产生电荷模拟法的背景。

(5)解析法的意义

如上所述,在古典的电场计算中应用了丰富多采的数学方法。但是,对于现实中的复杂的形状以及包含有导体和电介质(固体绝缘物)或电阻体的电场来说,要计算其电场值可以说除了特别简单的场合之外,非用数值计算法不可。岂止如此,现在即使有解析解,但用复杂函数的无穷级数来表示时,都远不如用数值计算法更容易得到精确的解。

但是,解析法除了用在对同样的电场来评价用数值计算法的解的精确度与近似程度外,还作为电荷模拟法的“假想电荷”的电位、电场的公式而保持其生命力。另外,对于电荷模拟法和表面电荷法,为了把平面和圆柱体规定为等位面,几乎经常采用镜像电荷。