

实变函数与 泛函分析概要

高等数学教材

(第二版)

第一册

郭维行 王声盛 编

高等教育出版社



高等学校教材

实变函数 与泛函分析概要

(第二版)

第一册

郑维行 王声望 编

高等教育出版社

本书第二版基本上保持了第一版简明、近代化、内容完备并便于教学的特色。此次修订时，作者增加了广义测度等内容，修正了某些错误或不妥之处，习题也有所增加，加大了使用本书的自由度。

全书分两册出版。第一册内容为实变函数部分，主要包括集论初步，可测集与可测函数，勒贝格积分论等。以勒贝格积分理论为重点，采用内外测度的方法，用简单函数的积分引进勒贝格积分。 L^p 空间专列一章，包括傅立叶变式，为过渡到第二篇提供典型的例子。

本书供综合大学数学、计算数学专业使用，高等师范院校数学系也可选用。

责任编辑：丁鹤群

2091/19

高等学校教材

实变函数与泛函分析概要



开本 850×1168 1/32 印张 7.75 字数 184,000

1980年1月第1版

1989年5月第2版 1989年6月第1次印刷

印数 0001—3,700

ISBN 7-04-002107-2/O·749

定价 1.85 元

序 言

本教材是在南京大学数学系多年教学的基础上产生的,这次编写时又增加了若干新内容。全书共分两篇。第一篇介绍实变函数论,内容包括点集、测度与可测函数, L 积分以及积分序列的极限的三大定理与傅比尼定理等。以勒贝格积分为重点,采用内、外测度的方法构造点集的测度,用简单函数的积分引进 L 积分,以期符合由浅入深、由特殊到一般的认识规律。 L^p 空间专列一章,其中还包括在应用上极为重要的傅立叶变式,为过渡到第二篇提供典型的例子。第二篇讲述泛函分析的一些基本内容,如距离空间、赋范线性空间、希尔伯特空间等概念,线性分析的几条基本定理,全连续算子的黎斯-邵德尔理论,完备内积空间中有界自伴算子的谱论初步。书中给出不少例子以说明基本概念。为了使学生了解本学科中抽象的必要性与应用的广泛性,我们曾作了一定的努力。鉴于本课程是一门重要基础课,在数学教学中具有承上启下的作用,所以我们安排了某些内容,如微分与积分、 L 积分与 R 积分的比较、压缩映象原理等,以便与数学分析、代数、方程等相联系;同时,还适当介绍了有关序集、抽象测度、 LS 积分概念、拓扑空间大意等内容,为感兴趣的读者进一步学习近代数学与近代物理打下基础。各章末均附有习题,以供教学时选用。

本教材是为综合大学数学系同名课程而试编的,估计一学年126学时左右可以讲完(主要内容)。如果只安排一学期72学时的,则可选用第一章到第六章的基本内容。进修班、高等师范院校也可参考使用。

教材初稿曾得到程其襄、严绍宗、王斯雷、张莫宙教授，徐荣权、俞致寿副教授等的细心审查与认真讨论，曾远荣、江泽坚、夏道行教授专门阅览了手稿，他们都提出了许多宝贵意见，编者基本上都采纳了；函数论教研室的马吉溥、苏维宜、任福贤、何泽霖、宋国柱、王巧玲、王崇祐、华茂芬等同志协助阅读手稿，并参加了部分修改工作。编者在此谨对他们致以衷心的感谢。由于我们水平所限，加之时间仓促，书中错误在所难免，希望专家与同志们多多给予指正。

编 者

1978年10月于南京

第二版 前 言

在修订第二版中，我们作了若干少量的补充并修正了某些错误。习题也作了增加。这样，在使用本书时选择的自由度就加大了。

程其襄教授再一次通阅全稿并提出许多宝贵意见，编者不胜感谢。

广大教师与读者热情来信指出本书中的一些缺点与疏漏之处，编者谨对他们表示谢意。

编 者

1996年1月于南京

目 录

第 一 篇

第一章 集与点集	1
§1 集及其运算	1
§2 映射·集的对等·可列集	4
§3 一维开集、闭集及其性质	9
§4 开集的构造	14
§5 集的势·序集	20
第一章习题	30
第二章 勒贝格测度	33
§1 引言	33
§2 有界点集的外、内测度·可测集	35
§3 可测集的性质	41
§4 关于测度的几点评注	49
§5 环与环上定义的测度	54
§6 σ 环上外测度·可测集·测度的扩张	59
§7 广义测度	70
第二章习题	74
第三章 可测函数	79
§1 可测函数的基本性质	79
§2 可测函数列的收敛性	86
§3 可测函数的构造	90
第三章习题	101
第四章 勒贝格积分	103
§1 勒贝格积分的引入	103
§2 积分的性质	110

§3 积分序列的极限	123
§4 R 积分与 L 积分的比较	131
§5 乘积测度与傅比尼定理	140
§6 微分与积分	152
§7 勒贝格-斯蒂杰积分概念	180
第四章习题	190
第五章 函数空间 L^p	195
§1 L^p 空间·完备性	195
§2 L^p 空间的可分性	203
§3 傅立叶变式概要	214
第五章习题	227
参考书目与文献	231
索引	232

第一篇

第一章 集与点集

数学分析中最重要的概念之一是黎曼(B. Riemann)积分, 从黎曼积分的记号 $\int_a^b f(x) dx$ 可以看出, 它含有两个要素与一个运算, 即被积函数 $f(x)$ 、积分区间 $[a, b]$ 与积分运算. 本篇的中心内容是勒贝格(H. Lebesgue)积分, 它的记号是 $\int_E f(x) dm$, 这里 $f(x)$ 是可测函数, E 是欧几里得(Euclid)空间中可测集, 不必是区间, 而积分运算依赖于所考虑的测度 m . 这是近代积分论中最重要的一种积分, 讨论这种积分不仅是为了推广黎曼积分, 而且是由于它本身在运算上的灵活性, 这对进一步学习近代数学是十分必要的. 同时, 我们可以看到, 数学分析中的一些重要结果也从而得到较为精确的说明. 勒贝格积分理论的产生自有它的实际背景. 我们将按照集、可测集与可测函数、积分的顺序来讨论, 把有关积分的各个环节逐一弄清, 进而掌握积分的完整概念.

§1. 集及其运算

集或集合是数学中的一个基本概念. 本书所研究的集合, 均指具有确定内容或适合一定条件的事物的全体. 对集合的这样的粗略理解不影响我们对本书主题的讨论, 因而我们将不去谈集的

严格定义。构成一个集的那些事物称为集的元或元素。元与集的关系是个别与整体的关系。例如，一个圆周上的点的全体成一集，它的元是点。以实数为系数的多项式全体成一集，它的元是实系数多项式。书中恒约定，对给定的集，任一元要么属于它，要么不属于它，二者必居其一。

又如，直线上的一切开区间 (a, b) 成一集(或称类)，这集的元是开区间，实轴上满足 $|\cos x| \geq 1/2$ 的点构成一集； $[0, 1]$ 上一切连续函数构成一集，等等。

本书常用拉丁文大写字母 A, B 等表示集，用小写字母 a, b 等表示集的元。

现在我们引进有关集的一些简单概念或术语。设 A 是一个集， a 是它的元，就写为 $a \in A$ ，读作 a 属于 A ，它的意义与 A 含有 a 相同。若元 b 不属于 A ，写为 $b \notin A$ 或 $b \bar{\in} A$ 。对于任何集 A ，我们恒约定 $A \bar{\in} A$ ，即集 A 自身不能看成 A 的元。

若集 A 的元只有有限个，称 A 为有限集。不含任何元的集称为空集，用记号 $\emptyset$ 表示。一个非空集，如果不是有限集，就称为无限集。

某些集之间可以有种种关系或性质。最基本的关系要算“包含”与“相等”。设 A, B 是两个集，若 A 的每个元都属于 B ，称 A 是 B 的子集，记成 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ ，分别读作 A 含于 B 或 B 包含 A 。若 $A \subset B$ 且存在一个元 $x \in B$ 而 $x \bar{\in} A$ ，则称 A 是 B 的真子集。为方便起见，规定空集 $\emptyset$ 是任何集的子集。若 A, B 是两个集，若同时有 $A \subset B$ 与 $B \subset A$ 成立，则称集合 A 与 B 相等，记成 $A = B$ 。

设给定一集 A 与一性质 π ，用记号

$$\{a: a \in A, \pi(a)\}$$

表示 A 中一切具有性质 π 的元 a 所成的集，有时简记成 $A\{\pi(a)\}$ 。例如，上面提到的一个例子可以写成 $A\{|\cos x| \geq 1/2\}$ ，这里 $A =$

$(-\infty, \infty)$. 关系式 $\{a: a \in A, \pi_1(a)\} \subset \{a: a \in A, \pi_2(a)\}$ 的意义是, 由性质 $\pi_1(a)$ 可以推出性质 $\pi_2(a)$ ($a \in A$).

下面引进集的运算.

定义 1.1 设 A, B 是两个集. 由 A 中的元以及 B 中的元全体所成的集称为 A, B 的并, 记成 $A \cup B$ (图 1); 就是说,

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

由同时属于 A 与 B 两者的那些元所成的集称为 A 与 B 的交, 记成 $A \cap B$ (图 2); 即

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

由属于 A 而不属于 B 的那些元所成的集称为 A 与 B 的差, 记成 $A - B$ (图 3). 当 $B \subset A$ 时, 差集又称为 B 关于 A 的补集, 记成 $\complement_A B$. 并集与交集概念可以推广到任意个集的情形. 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是一集族, 这里 I 是指标集, α 在 I 中取值, 那么它们的并与交分别定义为

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{a: \text{有某个 } \alpha \in I \text{ 使 } a \in A_\alpha\},$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{a: \text{对一切 } \alpha \in I \text{ 有 } a \in A_\alpha\}.$$

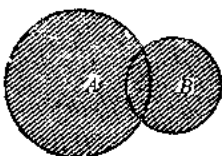


图 1 $A \cup B$

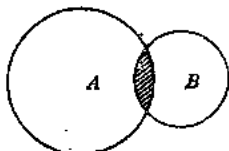


图 2 $A \cap B$

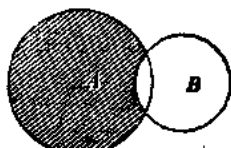


图 3 $A - B$

我们建立下列定理.

定理 1.1 对于集 E 与任意一集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, 恒有分配律成立.

$$E \cap \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} (E \cap A_\alpha).$$

证 $x \in E \cap (\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)$ 当且仅当 $x \in E$ 且 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 或

$x \in E$ 且存在 $\alpha_0 \in I$ 使 $x \in A_{\alpha_0}$.

上述论断等价于 $x \in E \cap A_{\alpha_0}$ (对某个 α_0) 从而等价于 $x \in \bigcup_{\alpha \in I} (E \cap A_\alpha)$. 这证明了所欲证的等式成立.

当我们在研究一个问题时, 如果所考虑的一切集都是 X 的子集, 这时便称 X 为基本集. 例如限制在数直线上研究各种不同的点集, 那么数直线是基本集. 对于任一基本集 X , 差集 $X - A$ 称为 A 关于 X 的补集或简称为 A 的补集, 记成 $\mathcal{C}A$.

定理 1.2 对于基本集 X 中的并集、交集的补集运算, 有

$$(i) \mathcal{C}(\bigcup_a A_a) = \bigcap_a (\mathcal{C}A_a);$$

$$(ii) \mathcal{C}(\bigcap_a A_a) = \bigcup_a (\mathcal{C}A_a).$$

证 设 $x \in \mathcal{C}(\bigcup_a A_a)$, 则 x 不属于任何 A_a , 故 x 属于每个

$\mathcal{C}A_a$, 因此 $x \in \bigcap_a (\mathcal{C}A_a)$. 由此可见

$$\mathcal{C}(\bigcup_a A_a) \subset \bigcap_a (\mathcal{C}A_a).$$

同理可证 $\mathcal{C}(\bigcup_a A_a) \supset \bigcap_a (\mathcal{C}A_a)$. 这样(i)得证.

由(i)取补集得 $\mathcal{C}(\mathcal{C}(\bigcup_a A_a)) = \mathcal{C}(\bigcap_a (\mathcal{C}A_a))$, 即 $\bigcup_a A_a = \mathcal{C}(\bigcap_a (\mathcal{C}A_a))$, 再把 A_a 换成 $\mathcal{C}A_a$, 即得(ii).

所证定理称为笛摩根 (De Morgan) 法则. 它提供一种对偶方法, 能将已证明的关于集的某种性质转移到它们的补集上去(参看后面的定理 3.3 与 3.5).

§2. 映射 · 集的对等 · 可列集

我们知道, 数学分析中所讲的函数可以看成是数集与数集之间的一种对应关系, 或数集到数集的映射. 把函数概念一般化, 得

到下面的定义.

定义 2.1 设 A, B 是两个非空集. 若依一定的法则 f , 对每个 $x \in A$, 在 B 中有一个确定的元 y 与之对应, 则称 f 是定义在 A 上而取值于 B 的映射, 记成 $f: A \rightarrow B$, 并将 x 与 y 的关系写成 $y = f(x)$. 这时称 A 为 f 的定义域,

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

为 f 的值域.

注意, 两个法则 f 与 g 的给出方式可能不同, 如果它们有同一依果, 即对一切 $x \in A$ 有 $f(x) = g(x)$, 则认为它们表示同一映射.

设给定映射 $f: A \rightarrow B$, 如果有 $B = f(A)$, 就是说, f 的象充满整个 B , 则说 f 是满射或映上的; 如果对每个 $y \in B$, 仅有唯一的 $x \in A$ 使 $f(x) = y$, 则说 f 有逆映射 f^{-1} , 它是定义在 $f(A)$ 上而取值于 A 上的满射. 当映射 $f: A \rightarrow f(A)$ 有逆映射时, 称 f 是一一映射.

设给定两个映射 $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, 用记号 $g \circ f$ 表示 A 到 C 的映射, 由关系 $g \circ f(x) = g(f(x)) (x \in A)$ 定义, 称为 f 与 g 的结合. 设 $B_0 \subset B$, 用记号 $f^{-1}(B_0)$ 表示 B_0 在映射 f 下的原象, 即

$$f^{-1}(B_0) = \{x : x \in A, f(x) \in B_0\}.$$

容易验明. 若 $B_0 \subset B, A_0 \subset A$, 则一般有

$$f(f^{-1}(B_0)) \subset B_0, f^{-1}(f(A_0)) \supset A_0.$$

如果 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 A 的子集族, $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是 B 的子集族, 同样容易验证下列关系:

$$f\left(\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}\right) = \bigcup_{\alpha} f(A_{\alpha}), f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha} B_{\alpha}\right) = \bigcap_{\alpha} f^{-1}(B_{\alpha}).$$

今后我们常要用到集 E 的特征函数概念, 记成 $\chi_E(x)$, 它的定义是

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \in E, \\ 0, & \text{若 } x \notin E. \end{cases}$$

定义 2.2 设 A, B 为两个集, 如果有一映射 f 存在, 使 $f(A) = B$, 则称 A 与 B 成一一对应或互相对等, 记成 $A \sim B$.

对等概念对于无限集的研究是十分重要的. 关于对等, 易见有下列性质:

- (i) **自反性.** $A \sim A$;
- (ii) **对称性.** 若 $A \sim B$ 则 $B \sim A$;
- (iii) **传递性.** 若 $A \sim B, B \sim C$, 则 $A \sim C$.

由对等的定义可知, 当两个有限集互相对等时, 它们的元的个数必相同. 至于无限集, 采用元素个数一词就不适宜, 但对等概念仍然可用. 粗略地说, 可以用对等概念对无限集的元的“个数”进行比较.

以后我们将用 $\mathbb{R}$ 表示实数集, $\mathbb{Q}$ 表示有理数集, $\mathbb{Z}$ 表示整数集, 而 $\mathbb{N}$ 表示自然数集. 在所有无限集中, $\mathbb{N}$ 是最简单的一个. 任何一个集, 若与 $\mathbb{N}$ 对等, 就称为可列集. 换句话说, 可列集的一切元可用自然数编号, 使之成为无穷序列的形式: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. 可以举出许多可列集的例子. 例如全体正偶数集依 $2n \longleftrightarrow n$ 对应的方式与 $\mathbb{N}$ 成一一对应; $\mathbb{Z}$ 与 $\mathbb{N}$ 的对应方法如下:

$$0 \longleftrightarrow 1, (-1)^{n+1} \left[\frac{n}{2} \right] \longleftrightarrow n, n = 2, 3, \dots$$

其中记号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 这样正偶数集与整数集均为可列集.

再举一个稍为复杂的例子, 有理数集 $\mathbb{Q}$ 是可列的. 其实, 把非零有理数 r 写成既约分数的形式 $r = p/q$, 这里 $q > 0, p \neq 0, p, q$ 均为整数. 称 $n = |p| + q$ 为 r 的“模”. 现规定 0 的模为 1, 很明显, 模为 n 的有理数的个数是有限的. 于是把一切有理数按模的

递增顺序编组, 凡是模相同的编在同一组里, 然后再依组的顺序把所有有理数逐个编号。这样, 每个有理数得到了一个确定的号码, 因而建立了 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{N}$ 之间的一一对应, 这证明了有理数集 $\mathbb{Q}$ 的可列性。

不难看出, 可列集的子集至多是可列的。由此推知, 实直线 $\mathbb{R}$ 上任一类互不相交的开区间集必为可列集或有限集。其实, 在每个区间中取一有理数与这个区间对应, 则不同区间对应于不同的有理数, 故所述开区间类与有理数的一子集对等, 因而至多是可列的。

可以断言, 可列集是无限集中“元素的个数最少”的一类集。这句话的精确含义由下列定理表出。

定理 2.1 任何无限集含有一个可列子集。

证 设 A 是任给无限集。用归纳法, 可作出 A 的子集列 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 使每个 A_n 恰含 n 个元。其实, 因 $A \neq \emptyset$, 可取出 $a_1 \in A$, 并令 $A_1 = \{a_1\}$ 。假定对任意自然数 n , 用任何方式作出了 A 的子集 A_n , 它有 n 个元, 那么由于 $A - A_n$ 非空, 可取 $a_{n+1} \in A - A_n$, 令 $A_{n+1} = A_n \cup \{a_{n+1}\}$, 则显见 A_{n+1} 是 A 的子集且含有 $n+1$ 个元。由此可见, 所述序列 $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 存在。现在对每个 $n \in \mathbb{N}$, 令

$$B_n = A_{2^n} - \left(\bigcup_{k=0}^{n-1} A_{2^k} \right).$$

那么, $\{B_n\}$ 是 A 中互不相交的子集类, 并且看出, B_n 中元的个数不少于 $2^n - \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 1$, 故每个 B_n 非空。我们由每个 B_n 中取一个元构成一个集 B , 则易见 B 是 A 的可列子集。

定理证完。

由所证定理可以推出下列事实: **凡无限集必与它的一个真子集对等**。其实, 设 A 是所给无限集, 据定理 2.1, A 存在可列子集 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 令 $B = A - \{a_1\}$, 则 B 是 A 的真子集。作下列对应:

$$a \longleftrightarrow a, \quad \text{对 } a \in A - \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

$$a_k \longleftrightarrow a_{k+1}, \quad \text{对 } k=1, 2, \dots,$$

易见这是 A 与 B 之间的一一对应, 因而 A 与它的一个真子集 B 对等. 所证事实是无限集的一个特征性质, 因而也可作为无限集的定义.

定理 2.2 可列个可列集的并集是可列的.

证 设 $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ 是可列集的可列类, 把它们的元分别排列如下表,

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 = \{ & a_1^{(1)} & \rightarrow & a_2^{(1)} & \rightarrow & a_3^{(1)} & \rightarrow & a_4^{(1)} \dots \} \\ & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & & \searrow \\ A_2 = \{ & a_1^{(2)} & & a_2^{(2)} & & a_3^{(2)} & & a_4^{(2)} \dots \} \\ & \downarrow & & \swarrow & & \downarrow & & \swarrow \\ A_3 = \{ & a_1^{(3)} & & a_2^{(3)} & & a_3^{(3)} & & a_4^{(3)} \dots \} \\ & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & \\ A_k = \{ & a_1^{(k)} & & a_2^{(k)} & & a_3^{(k)} & & a_4^{(k)} \dots \} \\ & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & \end{array}$$

令 $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. 我们把 S 中的元如上表那样依箭头指向的顺序排列, 即先写 $a_1^{(1)}$, 再写 $a_2^{(1)}$ 与 $a_1^{(2)}$, 此时字母的上下附标之和等于 3; 再写 $a_3^{(1)}$, $a_2^{(2)}$, $a_3^{(3)}$, 此时字母上下附标之和等于 4; 一般地, 写到 (在最大上标为奇数情形)

$$a_1^{(2k+1)}, a_2^{(2k)}, \dots, a_{2k+1}^{(1)}$$

时, 字母上下标之和为 $2k+2$, 等等. 由此可以断定, S 与自然数集的一子集对等, 并且 S 显然是无限集, 故 S 为可列的.

由所证定理可知, 有理数集是可列的.

下面定理表明不可列集是存在的.

定理 2.3 点集 $[0, 1] = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$ 是不可列的.

证 用反证法. 假定 $[0, 1]$ 可列, 把其中一切点编排为

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

把闭区间 $[0, 1]$ 三等分, 则显见 $[0, 1/3]$ 与 $[2/3, 1]$ 中至少有一个不含有 x_1 , 用 I_1 表示任一这样的区间, 即 $x_1 \notin I_1$. 把 I_1 三等分, 在它们的左与右两个闭区间中必有一个不含有 x_2 , 用 I_2 表示相应的区间, 即 $x_2 \notin I_2$. 同样把 I_2 三等分, 又可得不含有 x_3 的一个闭区间 I_3 , 等等. 根据归纳法, 得到闭区间列 $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, 满足条件

$$(i) \quad I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots;$$

$$(ii) \quad x_n \notin I_n, n \in \mathbb{N};$$

$$(iii) \quad I_n \text{ 的长度为 } 3^{-n}, \text{ 它当 } n \rightarrow \infty \text{ 时趋于 } 0.$$

根据分析学中的区间套定理, 存在点 $\xi \in I_n, n \in \mathbb{N}$. 由于 $x_n \notin I_n$ 对任一 n 成立, 故 ξ 不会是任一 x_n , 但 ξ 显然属于 $[0, 1]$. 发生矛盾, 这表明 $[0, 1]$ 是不可列点集.

关于集的某些一般属性, 我们将在§5再作补充讨论.

§3. 一维开集、闭集及其性质

以下专门讨论欧几里得空间中的点集(简称点集), 这在数学分析中已有所了解. 前面两节中关于集的一般结果, 自然对点集也适用, 这里将进一步介绍点集所特有的一些性质. 由于一维欧几里得空间比较简单, 且具有自身的特性, 故先提出讨论. 下面论述虽然在本质上对多维点集也适用, 但读者初学时, 不妨先从一维情形来理解, 以后再理解多维情形, 就不会发生困难了.

先引进点集的一些基本概念.

定义 3.1 设 E 为一维欧几里得空间 $\mathbb{R}$ 的任一子集, $a \in \mathbb{R}$. 含有 a 的任一开区间称为 a 的邻域. 对于 E 中一点 a , 如果存在 a 的某个邻域 (α, β) 整个含于 E 内, 这时 $a \in (\alpha, \beta) \subset E$, 则称 a 为