

高等学校教学参考书

解电磁场问题的 有限元法初步

肖达川 胡显承 编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

解电磁场问题的 有限元法初步

肖达川 胡显承 编

人民教育出版社

高等学校教学参考书
**解电磁场问题的
有限元法初步**

肖达川 胡显承 编

*

人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{32}$ 印张 2.25 字数 50,000

1979 年 9 月第 1 版 1980 年 6 月第 1 次印刷

印数 00,001—11,000

书号 15012·044 定价 0.19 元

目 录

§ 1	引言	1
§ 2	一维场的变分法	2
§ 3	一维场的有限元法	6
§ 4	二维场的变分法	11
§ 5	二维场的有限元法	19
§ 6	正弦涡流磁场及非线性恒定磁场的有限元法简介	38
§ 7	有限元法的电路模型	41
附录 1	关于变分	46
附录 2	关于 $r_i^{(e)} = \iint_e N_i J dx dy$ 的计算	53
附录 3	公式(96)的证明	56
附录 4	关于节点电导矩阵的正定性	56
附录 5	线性方程组的消去法	57

§ 1 引言

有限元法是一种高效能、通用的计算方法。本世纪五十年代,结构工程师首先提出了有限元法并应用于弹性力学问题,取得了很大成功。近年来,有限元法在解决各个工程领域里的许多数学物理问题中,得到广泛应用。对于电磁场问题,也是如此。

有限元法的基本观点是比较简单的,它实质上是一种求解场的变分问题的数值方法。它不是直接去求解场方程,而是去求解一个“能量”取极值问题(变分问题)。有限元法的主要内容是:将给定区域剖分为一些在节点处互相连接的单元,然后在各单元上做近似,使得“能量”近似地表示为有限个节点参数的函数,从而将变分问题归结为多元函数求极值,化成求解代数方程组的问题。这种很有规则的方法容易在电子计算机上实现,而且易于适应场问题中几何形状复杂的区域边界,这是这种近似数值方法的明显优点。

有限元法是解变分问题的古典的 Ritz 方法的进一步发展,它运用了计算数学(逼近理论)的成果,而电子计算机的出现和发展,则是促使它发展和广泛应用的直接动力。

近十余年来,国内外对于应用有限元法解电磁场问题做了不少工作。这本小册子只是对于有限元法及其在解电磁场问题中的应用,做一个初步介绍。§2—§3 以简单的、有准确解的一维场为例,说明场问题的变分提法,以及有限元法的基本内容;但有限元法主要应用于二维场,所以 §4 对二维场的变分提法做了较详细的讨论;§5 详细说明了二维场有限元法中的计算公式及技巧;§6

• 1 •

简单地说明了在交流磁场及非线性恒定磁场问题中应用有限元法的思路；最后，§7介绍了有限元法的电路模型。关于变分法的简略说明、解线性方程组的消去法、以及一些数学公式的推导，则放在附录里供读者参考。

§2 一维场的变分法

对于一维静电场问题，有两种求解的途径。一种是从微分方程出发，即求解微分方程(波桑方程)

$$\epsilon \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \rho = 0$$

其中： ϕ 是待求的电位， ϵ 是介质的电容率， ρ 是电荷密度。当然，为了确定解，还应加上边界条件。另一种途径则是从“使能量取得最小值”出发来求解，这就是所谓场问题的变分方法。下面以求解平行平面电容器(图1)中静电场的电位分布为例来说明变分方法。

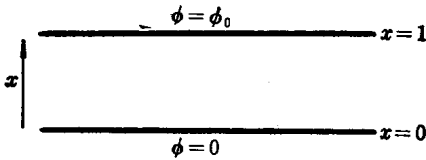


图 1

设 $\rho=0$ ，则待求的电位 $\phi(x)$ 满足

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0 \tag{1}$$

$$\phi(0) = 0 \tag{2}$$

$$\phi(1) = \phi_0 \tag{3}$$

这里，要解决的问题就是：求微分方程[式(1)]的、满足边界条件(2)、(3)的解。这是熟知的场问题的微分方程提法。容易验证，其

解为 $\phi = \phi_0 x$ 。

从能量角度看, 对于任何一个可能的电位分布 $\varphi(x)$, 相应的能量密度为

$$\frac{\epsilon}{2} E^2 = \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2$$

相应的总能量(记作 $\mathcal{F}$)为

$$\mathcal{F} = \int_0^1 \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx \quad (4)$$

式(4)说明 $\mathcal{F}$ 的值随 $\varphi(x)$ 而定; 对于不同的电位分布 $\varphi(x)$, $\mathcal{F}$ 的值可以不同。可以证明, 在静电场的情形, 有下面的原理: 在所有满足边界条件的电位分布中, 所求的电位 $\phi(x)$ 相应的 $\mathcal{F}$ 值最小。

证 设有 ϕ_1 、 ϕ_2 两个电位函数, 它们都满足边界条件(2)、(3), 而且 ϕ_1 还满足拉氏方程(1), ϕ_2 则否。由 ϕ_1 、 ϕ_2 导出的电场强度分别记作 E_1 、 E_2 。作二者“能量”的差

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 &= \epsilon \int_0^1 \left(\frac{E_1^2}{2} - \frac{E_2^2}{2} \right) dx = -\frac{\epsilon}{2} \int_0^1 (E_1 - E_2)^2 dx \\ &\quad - \epsilon \int_0^1 (E_1 E_2 - E_1^2) dx \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \because \int_0^1 E_1 E_2 dx &= \int_0^1 \frac{d\phi_1}{dx} \cdot \frac{d\phi_2}{dx} dx = \phi_2 \frac{d\phi_1}{dx} \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi_2 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} dx \\ &= \phi_1 \frac{d\phi_1}{dx} \Big|_0^1 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 E_1^2 dx = \int_0^1 \frac{d\phi_1}{dx} \frac{d\phi_1}{dx} dx = \phi_1 \frac{d\phi_1}{dx} \Big|_0^1 - \int_0^1 \phi_1 \frac{d^2 \phi_1}{dx^2} dx = \phi_1 \frac{d\phi_1}{dx} \Big|_0^1$$

因此式(5)中最后那个积分是零,

$$\therefore \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2 = -\frac{\epsilon}{2} \int_0^1 (E_1 - E_2)^2 dx \leq 0 \quad (\epsilon > 0)$$

即能量 $\mathcal{F}_1$ 最小。

因此, 在本例中, “ $\phi(x)$ 满足微分方程(1)及边界条件(2)、(3)”

等价于“在所有满足边界条件(2)、(3)的 $\varphi(x)$ 中, $\phi(x)$ 相应的 $\mathcal{F}$ 值取极小值”, 这样, 场问题也可以用如下提法: 在所有满足边界条件(2)、(3)的 $\varphi(x)$ 中, 求一个 $\phi(x)$, 使其相应的 $\mathcal{F}$ 取极小值。这就是场问题的变分提法。

我们将满足条件式(2)、(3)且使(4)中积分有意义的 $\varphi(x)$ 的全体, 叫做问题的容许函数集, 记作 $\mathcal{U}$ 。根据(4), 对于每一个 $\varphi(x) \in \mathcal{U}$ ($\in$ 表示“属于”), 都对应着一确定的 $\mathcal{F}$ 值, 我们就把 $\mathcal{F}$ 叫做定义在 $\mathcal{U}$ 上的泛函, 记作

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{U}$$

泛函是函数概念的推广, 这时, “自变量”是取自某个函数集合 $\mathcal{U}$, 简单地说, 泛函是函数的函数。用这种术语来叙述, 场问题的变分提法是: 在容许函数集 $\mathcal{U}$ 中, 求 $\phi(x)$, 使得泛函 $\mathcal{F}(\varphi)$ 取极小值。即

$$\mathcal{F}(\phi) = \min_{\varphi \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(\varphi)$$

对于一般的一维静电场问题, 其微分方程提法是: 求微分方程[式(6)]的、满足边界条件(7)、(8)的解。

$$\varepsilon \frac{d^2 \phi}{dx^2} + \rho = 0 \quad (6)$$

$$\phi(x_1) = \phi_1 \quad (7)$$

$$\phi(x_2) = \phi_2 \quad (8)$$

在相应的变分提法中, “能量”泛函是

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\varphi) = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - \rho \varphi \right\} dx, \quad \varphi \in \mathcal{U} \quad (9)$$

这里, 容许函数集 $\mathcal{U}$ 是由所有满足边界条件(7)、(8), 且使式(9)中积分有意义的函数所组成。场问题的变分提法是:

$$\text{“求 } \phi \in \mathcal{U}, \text{ 使得 } \mathcal{F}(\phi) = \min_{\varphi \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(\varphi)” \quad (10)$$

正如微积分中求解函数的极值问题是通过极值的必要条件

“微分等于零”来求解那样,求解泛函的极值问题(10),是通过泛函取极值的必要条件“变分等于零”来求解的。

什么是泛函的变分?当 ϕ 作一微小改变,变成 $\phi+\delta\varphi$ 时,相应地, $\mathcal{F}(\phi)$ 也作一个微小改变,变成 $\mathcal{F}(\phi+\delta\varphi)$,改变量为 $\mathcal{F}(\phi+\delta\varphi)-\mathcal{F}(\phi)$ 。如果忽略高阶小量,改变量 $\mathcal{F}(\phi+\delta\varphi)-\mathcal{F}(\phi)$ 的线性主要部分叫做泛函 $\mathcal{F}$ 在 ϕ 处的变分,记作 $\delta\mathcal{F}(\phi)$ (参见附录1)。例如,式(9)中泛函的变分是

$$\delta\mathcal{F}(\phi)=\int_{x_1}^{x_2}\left\{\varepsilon\frac{d\phi}{dx}\cdot\frac{d(\delta\varphi)}{dx}-\rho(\delta\varphi)\right\}dx$$

这里 $\delta\varphi$ 是满足边界条件(7)、(8)的两个函数之差,或说 $\delta\varphi$ 是满足齐次边界条件 $\delta\varphi(x_1)=0, \delta\varphi(x_2)=0$ 的任意函数*。

如果 $\mathcal{F}(\varphi)$ 在 $\varphi=\phi$ 时取得极值,那么,可以证明,对于任意的 $\delta\varphi$,恒有

$$\delta\mathcal{F}(\phi)=0 \quad (11)$$

这是泛函 $\mathcal{F}$ 取极值的必要条件。但是,对于一般的电磁场问题,(11)并不是泛函 $\mathcal{F}$ 取极小值的充分条件。虽然如此,以后我们解场问题时,一般都直接从求解(11)出发,而不管 $\mathcal{F}$ 是否取极小值。

因此,求解场问题时,一般做出“能量”类型(其量纲是能量的量纲)的泛函 $\mathcal{F}(\varphi)$,并明确容许函数集 $\mathcal{U}$;这时,场问题的变分提法是:

“求 $\phi\in\mathcal{U}$,使对于任意的 $\delta\varphi$ (作为 $\mathcal{U}$ 中两个函数之差,通常要满足某些齐次边界条件),下式成立

$$\delta\mathcal{F}(\phi)=0” \quad (12)$$

变分问题(12)中,待求函数 ϕ 包含在积分中,这对近似求解是有利的。有限元法就是一种求解变分问题的数值近似方法。

* 参见附录1。

§ 3 一维场的有限元法

求解一维场问题，是要找出电位函数 $\phi(x)$ 。作为一元函数， $\phi(x)$ 在图上表示为一条曲线。容易理解，这条曲线可以用一条折线（即分段为直线）来近似，如图 2。这种近似相当于假设在各个局部范围内电场是均匀的，总体看，电位函数是连续的。

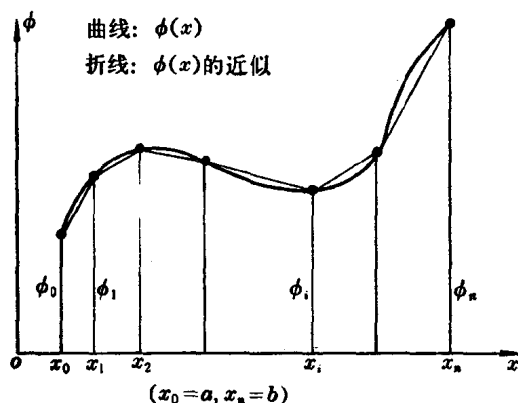


图 2

若将上述近似的想法用数学式子来表达，则首先将所讨论区间分为有限个（如 n 个）子区间，每个子区间叫做一个单元；然后在各个单元上， $\phi(x)$ 近似地看做随 x 线性变化。于是，在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上

$$\phi(x) \approx \phi_{i-1} + \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}) \quad (13)$$

式中， ϕ_{i-1} 和 ϕ_i 分别是 $\phi(x)$ 在 x_{i-1} 和 x_i 点上的值。

剖分区间的点 $x_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ ，叫做节点； $\phi(x)$ 在节点 x_i 处的值 $\phi(x_i)$ 即 ϕ_i ，叫做节点参数。在单元 $[x_{i-1}, x_i]$ 上， $\phi(x)$ 的近似由两个节点参数 ϕ_{i-1} 和 ϕ_i 确定。一旦我们能定出所有的节点参数 $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$ ，那么， $\phi(x)$ 的近似函数（即图 2 中的折线）也

就完全确定了。因此,为了近似地求出 $\phi(x)$, 只要求出 $n+1$ 个节点参数 $\{\phi_i\} (i=0, 1, \dots, n)$ 就行了。

利用上述的近似方法, 泛函 $\mathcal{F}(\phi)$ 就可以近似地看作节点参数 $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$ 的普通函数(多元函数), 记作 $D(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$, 即有

$$\mathcal{F}(\phi) \approx D(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$$

于是变分等式(12)就可以近似地化为多元函数 $D(\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n)$ 的全微分为零。这样, 求解变分问题(12)变成了求解一个代数方程组(以节点参数为未知数的方程组)。这就是有限元法的基本思路。

下面仍以图 1 中的平行平面电容器为例来说明有限元法的具体步骤。这时“能量”泛函是

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_0^1 \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx \quad (14)$$

其中, $\varphi(x)$ 满足边界条件

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \varphi(1) = \phi_0 \end{cases} \quad (16)$$

这时, 要解决的问题是: 求满足条件(15)、(16)的 ϕ , 使得对于任意的 $\delta\varphi$ (在两端点为零), 下式成立

$$\delta\mathcal{F}(\phi) = 0 \quad (17)$$

我们分四步来做。

第一步 剖分

剖分区间 $[0, 1]$ 。为简单计, 做均匀剖分。设节点为 $x_0=0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n=1$; 各单元长度为 $h = \frac{1}{n} = x_i - x_{i-1} (i=1, 2, \dots, n)$ 。

这时

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_0^1 \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx \quad (18)$$

记
$$\mathcal{F}^{(i)}(\varphi) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx \quad (19)$$

它表示在第 i 个单元 $[x_{i-1}, x_i]$ 上相应的能量。于是式(18)可写成

$$\mathcal{F}(\varphi) = \sum_{i=1}^n \mathcal{F}^{(i)}(\varphi) \quad (20)$$

第二步 单元分析

在单元 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 节点参数为 φ_{i-1}, φ_i , 取近似如下

$$\varphi(x) \approx \varphi_{i-1} + \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} (x - x_{i-1}) \quad (21)$$

$$\therefore \frac{d\varphi}{dx} \approx \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{h} \quad (22)$$

$$\therefore \mathcal{F}^{(i)}(\varphi) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx \approx \frac{\varepsilon}{2h} (\varphi_i - \varphi_{i-1})^2 \quad (23)$$

第三步 综合

由式(20)及(23), 有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\varphi) &\approx \frac{\varepsilon}{2h} \sum_{i=1}^n (\varphi_{i-1} - \varphi_i)^2 \\ &= \frac{\varepsilon}{2h} [(\varphi_1 - \varphi_0)^2 + (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \cdots + (\varphi_n - \varphi_{n-1})^2] \quad (24) \end{aligned}$$

由于 $\varphi(x)$ 满足边界条件式(15)、(16), 所以 $\varphi_0 = 0$, $\varphi_n = \phi_0$, 故在式(24)中, 等号右边的近似表达式仅是 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}$ 这 $(n-1)$ 个节点参数的函数, 记作 $D(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1})$ 。可有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\varphi) &\approx D(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}) = \frac{\varepsilon}{2h} [\varphi_1^2 + (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \cdots \\ &+ (\phi_0 - \varphi_{n-1})^2] \quad (25) \end{aligned}$$

第四步 求解近似的变分方程

由式(25), 变分方程 $\delta \mathcal{F} = 0$ 可近似地写成:

$$\delta D(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}) = 0 \quad (26)$$

直接看出 $\mathbf{A}$ 是三对角的、对称的矩阵, 并且 $\mathbf{A}$ 还是正定的。 $\mathbf{A}$ 的正定性很容易直接验证如下:

对于任一系列向量 $\mathbf{x} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})^T$, 二次型

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} &= 2(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \dots + \varphi_{n-1}^2) - 2(\varphi_1 \varphi_2 + \varphi_2 \varphi_3 + \dots + \varphi_{n-2} \varphi_{n-1}) \\ &= \varphi_1^2 + (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + (\varphi_3 - \varphi_2)^2 + \dots \\ &\quad + (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2})^2 + \varphi_{n-1}^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (31)$$

且仅当 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 时, $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$, $\mathbf{A}$ 的正定性得证。

因此, 线性方程组 (29) 是唯一可解的。用消去法, 容易解出

$$\varphi_1 = \frac{1}{n} \phi_0, \quad \varphi_2 = \frac{2}{n} \phi_0, \quad \dots, \quad \varphi_{n-1} = \frac{n-1}{n} \phi_0$$

要指出的是, 这个例子中用有限元法得到的是准确解, 因为这时准确解恰好是线性函数 $\varphi(x) = \phi_0 x$ 。

从这个例子看出, 有限元法是一种基于变分原理的离散化方法, 而且是一种将变分问题化成求解代数方程组的有系统的方法。这里要指出, 最后的矩阵 $\mathbf{A}$ 可以用一种有规则的方法得到。由式 (25), $\mathcal{F}(\varphi)$ 可改写为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\varphi) &= \frac{\varepsilon}{2h} [\varphi_1^2 + (\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \dots + (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2})^2 + (\phi_0 - \varphi_{n-1})^2] \\ &= \frac{\varepsilon}{2h} \{ [\varphi_1^2 + \dots + (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2})^2 + \varphi_{n-1}^2] - 2\phi_0 \varphi_{n-1} + \phi_0^2 \} \\ &= \frac{\varepsilon}{2h} \{ \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{b} + \mathbf{b}^T \mathbf{b} \} \end{aligned} \quad (32)$$

而上式是综合各单元上的 $\mathcal{F}^{(i)}$ 得到的。据式 (23), $\mathcal{F}^{(i)}$ 可以写成

$$\mathcal{F}^{(i)}(\varphi) = \frac{1}{2} [\varphi_{i-1} \quad \varphi_i] \frac{\varepsilon}{h} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{i-1} \\ \varphi_i \end{bmatrix} \quad (33)$$

这样, 每个单元的分析都提供了一个矩阵。如何由式 (33) 集成式 (32) 中的矩阵 $\mathbf{A}$ 呢? 以 $\mathbf{A}$ 的第 2 行为例来说, 它的主对角线元素涉及节点 x_2 上的参数 φ_2 。对于节点 x_2 , 它既属于单元 $[x_1, x_2]$, 又

属于单元 $[x_2, x_3]$ 。分析单元 $[x_1, x_2]$ 时, 由式(33), 可得到矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \textcircled{1} \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots 1 \\ \dots 2 \\ \vdots \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

分析单元 $[x_2, x_3]$ 时, 得到矩阵

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots 2 \\ \dots 3 \\ \vdots \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

分析其它单元时, 不涉及节点 x_2 。因此, 在综合时, $\mathbf{A}$ 的第二行是由涉及 x_2 的各单元的贡献的叠加

$$\begin{bmatrix} -1 & 1-1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

由于从各单元分析得到的矩阵基本形式相同, 而集成时又是有规则地将涉及该节点的各单元的“贡献”叠加, 这样的步骤在电子计算机上是容易实现的。这是有限元法得到广泛应用的原因之一。

还应指出: 用有限元法离散化得到的矩阵, 一般是稀疏的, 即含有大量零元素。这对于节省机器的存贮也是有利的。

§ 4 二维场的变分法

先看二维静电场问题, 设要求解 xy 平面上区域 Ω 内(如图3所示)的电场 E 。大家知道, 这时

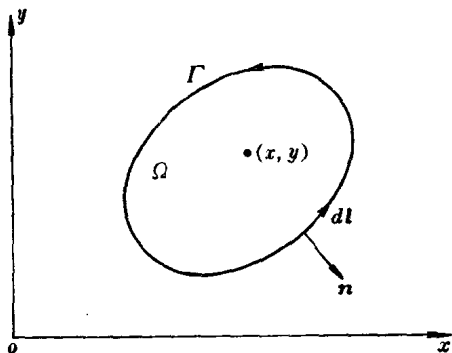


图 3

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j}$$

ϕ 是电位函数 (x, y 的函数), 它适合波桑方程

$$\epsilon \nabla^2 \phi + \rho = 0 \quad (34)$$

其中 $\rho(x, y)$ 为电荷密度。问题就是要求出 $\phi(x, y)$, 为了定解, 需要附加边界条件。常见的边界条件有以下两种情形:

第一类边界条件 (Dirichlet 条件)

$$\phi|_{\Gamma} = \phi_0 \quad (35)$$

即在边界面 Γ 上, 电位 ϕ 为已知函数 ϕ_0 ;

第二类边界条件 (Neumann 条件)

$$-e \frac{\partial\phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = \psi_0 \quad (36)$$

即在边界面 Γ 上, 电位移的法向分量为已知函数 ψ_0 ($D_n = eE_n = -e \frac{\partial\phi}{\partial n}$, $\mathbf{n}$ 为外法线单位向量)。

在第二类边界条件的情形下, 有解的条件是

$$\oint_{\Gamma} \psi_0 |d\mathbf{l}| = \iint_{\Omega} \rho dx dy \quad (37)$$

这便是高斯定理。为了使解唯一，还需指定场中一点的电位为零作为参考电位。

以上说的是二维电场的微分方程提法。下面来说明与之等价的变分提法。

首先，作“能量”泛函

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\varphi) &= \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\varepsilon}{2} (E_x^2 + E_y^2) - \rho\varphi \right\} dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\varepsilon}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] - \rho\varphi \right\} dx dy \quad (38)\end{aligned}$$

其次，计算 $\mathcal{F}(\varphi)$ 的变分（参看附录 1）

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{F}(\varphi) &= \iint_{\Omega} \left\{ \varepsilon \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} \right) \right] - \rho \delta \varphi \right\} dx dy \\ &= \iint_{\Omega} \{ \varepsilon \nabla \varphi \cdot \nabla (\delta \varphi) - \rho \delta \varphi \} dx dy\end{aligned}$$

利用格林公式

$$\iint_{\Omega} v (\nabla \cdot \nabla u) dx dy + \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy = \oint_{\Gamma} v \nabla u \cdot \mathbf{n} |d\mathbf{l}|$$

可得

$$\delta \mathcal{F}(\varphi) = - \iint_{\Omega} \{ \varepsilon \nabla^2 \varphi + \rho \} \delta \varphi dx dy + \oint_{\Gamma} \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \delta \varphi |d\mathbf{l}| \quad (39)$$

对于 φ 满足第一类边界条件的情形，将满足第一类边界条件 (35) 的所有函数的集合记做 $\mathcal{U}_1$ ，这时 $\delta \varphi|_{\Gamma} = \phi_0 - \phi_0 = 0$ ，于是

$$\delta \mathcal{F}(\varphi) = - \iint_{\Omega} \{ \varepsilon \nabla^2 \varphi + \rho \} \delta \varphi dx dy \quad (40)$$

由上式看出，如果 $\varphi \in \mathcal{U}_1$ 且满足波桑方程式 (34)，则对于任意的 $\delta \varphi (\delta \varphi|_{\Gamma} = 0)$ ，必有

$$\delta \mathcal{F}(\varphi) = 0 \quad (41)$$