

电磁场积分方程法

樊明武 颜威利 编著

机械工业出版社

前 言

本书阐述电磁场的积分方程法及积分—微分方程法混合应用的理论和方法。积分方程法是电磁场数值计算的一个重要方面，目前国内有关电磁场数值计算的著作大多偏重于微分方程法求解二维场问题，而在许多实际场问题的计算中，尤其是在计算三维场时，需要采用积分方法或积分—微分混合方法，才能达到高精度和高效率。本书反映了国内外这一方面工作的基本理论和计算方法，同时也包括了编者近年来的研究成果和一些计算经验。

本书主要内容包括：电磁场方程的积分表述，电流和磁化场量的积分计算，二维和三维积分方程法，边界积分法，积分—微分和微分—积分混合方法及涡流问题的积分方法等。附录给出了积分方程法、边界积分法和双标量位法的二维和三维场程序，供读者参考。

本书由中国原子能科学研究院樊明武同志和河北工学院颜威利同志编著，哈尔滨电工学院宋红同志参加了第七章的编写和本书的整理工作，汤蕴缪教授主审。

本书可供电机、电器、电子、加速器和计算机等领域中从事电磁场计算和软件设计的工程技术人员参考，也可作为电工类专业本科生和研究生参考用书。本书的编写得到了许多兄弟院校、科研单位和工厂的帮助，编者表示衷心的感谢。

最后，编者对汤蕴缪教授对书稿全面的审阅校核所付出的巨大劳动，表示最深切的谢意。

由于编者水平有限，书中可能存在一些错误和不妥之处，望读者批评指正。

编者

目 录

结论	1
§ 0-1 电磁场问题积分方程法的产生和发展	1
§ 0-2 电磁场数值计算软件包的通常结构	4
§ 0-3 各种方法的比较和展望	5
第一章 电磁场的积分表述	11
§ 1-1 电磁场的基本方程	11
§ 1-2 恒定场问题泊松方程的积分形式解	19
§ 1-3 电磁场的能量	26
第二章 电流场量的积分方法	28
§ 2-1 毕奥—萨伐定律	28
§ 2-2 平行平面场	30
§ 2-3 轴对称场	34
§ 2-4 三维分布电流所产生的磁场	39
§ 2-5 计算实例	49
第三章 物质的磁化及其场量	52
§ 3-1 磁偶极子	52
§ 3-2 物质的磁化	55
§ 3-3 磁化物质所产生的标量磁位	58
§ 3-4 磁化物质所产生的向量磁位	59
§ 3-5 磁化物质所产生的磁场强度	61
第四章 积分方程法	65
§ 4-1 积分方程法概念	65
§ 4-2 平行平面场	68
§ 4-3 轴对称场	75
§ 4-4 三维场	85
§ 4-5 积分方程法的特点	94
§ 4-6 计算实例	94
第五章 边界积分法	97
§ 5-1 磁荷和标量位	97

§ 5-2	边界积分方程	99
§ 5-3	边界积分方程的离散	101
§ 5-4	边界积分法在二维场中的应用	107
§ 5-5	边界积分法中的奇点项	109
§ 5-6	计算实例	110
第六章	标量位法	113
§ 6-1	简化标量位和全标量位	113
§ 6-2	泊松方程的有限元离散格式	114
§ 6-3	简化标量位法	127
§ 6-4	双标量位法	130
§ 6-5	计算实例	139
§ 6-6	微分—积分方法	141
第七章	涡流问题的积分方程法	144
§ 7-1	线性涡流问题的积分方程法	145
§ 7-2	用磁化场量积分方程法解涡流问题	150
附录 I	平行平面场电流所产生的磁场计算程序	156
附录 II	轴对称电流所产生的磁场计算程序	161
附录 III	三维分布电流所产生的磁场计算程序	171
附录 IV	积分方程法计算二维场程序	186
附录 V	积分方程法计算三维场程序	199
附录 VI	边界积分法计算程序	220
附录 VII	双标量位法解三维静磁场计算程序	237

绪 论

利用计算机,采用数值方法来解决电磁场问题,是近二十多年来发展起来的一门新学科。积分方程法是该学科中重要的一个分支,它的概念的引伸以及与微分方程法在不同方式下的混合应用,使该学科适用于更广泛的场合,解决更多的实际问题。

§0-1 电磁场问题积分方程法的产生和发展

1856年麦克斯韦从数学的推演出发,以积分和微分的形式描述了电场和磁场之间的相互关系,得到了举世闻名的麦克斯韦方程组。百余年来,人们以此为出发点,从事着电磁场的理论分析与工程设计。

实际的电磁场问题是相当复杂的,如边界形状不规则,复杂的物质结构以及材料性能的非线性等等。以致在计算机出现以前,人们在实际工作中,只能以麦克斯韦方程为依据,采用一些简化措施,得出近似的解析解;或者用模拟试验的方法(如电解槽、导电纸或阻抗网络等)来求得满足工程要求的近似结果。对于开域磁场问题,只能用作图法来求解,误差较大。除此以外,保角变换法、镜象法、直接积分法和松弛法等等,也都在一定范围内得到应用。实用上把场的问题化成路的问题进行处理,在相当长的时间内是设计电工产品的主导方法。

随着电机工业的发展,电机和变压器的单机容量越来越大,常常没有现成的设计和运行经验可以借鉴。现代超导电机和磁流体发电机必须用场的观点和方法去解决其设计问题。由于近代物理学的发展,许多高精度的电磁铁、波导管和谐振腔应用到有关设备中,它们不仅要赋予带电粒子以能量,并且要有特殊的场型去控制带电粒子的轨迹。对于这些科研、生产中必须用场的观点来进行定量研究的对象和问题,传统的计算方法已显得无能为力。

从四十年代开始就有人试探用数值方法去解决具有简单边界形状的场问题。但真正使数值法具有实用性，则是随着近二十年来计算机及其应用的发展而逐步实现的。1964年，Winslow利用向量位，采用有限差分法离散，求解了二维非线性磁场问题。随后，Colonias和Dorst用该程序设计了同步加速器磁铁，并且把它发展成为TRIM软件包。此后，采用有限差分法计算线性和非线性二维场的程序如雨后春笋般地在美国和西欧出现，如LINDA、MARE和NUTCRACKER等等。七十年代初期，P. Silvester和M. V.K. Chari把有限元法引用到电磁场计算中。有限元法以变分原理为基础，用剖分插值的办法建立各自由度间的相互关系，把二次泛函的极值问题转化为一组多元代数方程组来求解。它能使复杂结构、复杂边界情况的边值问题得到解答。特别是近十年来，由于数值处理技术的提高，例如采用不完全Cholesky分解法、采用自适应网格剖分等方法，使得有限元法在电磁场数值分析的领域中，越来越占有主导地位。

有限差分法和有限元法有一个共同特点，即用有限个自由度来近似描述一个连续体。在开域问题中，必须把边值为零的边界取到相当远处，致使需要计算的场区变得很大，网格和节点数亦随之增强，造成自由度的增加，使计算机内存和CPU时间均增大。在很多情况下，例如为了控制带电粒子束的轨迹，场分布的连续性的计算是至关重要的，在微分方程法中必须把网格剖分得很细，才能达到要求的精度。由于计算机容量和计算时间的限制，欲达到规定的要求常常是很困难的，有时甚至是不可能的。1972年，C.W. Trowbridge等人提出用计算机求解电磁场积分方程的基本思想，并给出了二维、三维问题的离散形式。由于积分方程法的离散仅需在源区进行，所以能较好地解决开域问题以及连续计算场的问题。1976年，出现了以积分方程法为基础的、能解二维、三维非线性恒定磁场的软件包GFUN。

积分方程法从宏观的角度来描述场，场区中每点的值仅取决于所有场源对它的影响，场点和源点的联系是通过毕奥—萨伐定

律实现的。由于离散只在源区进行，加上恒定磁场问题的电流分布和大小是已知的，因此实际上离散只需在非线性铁区内进行，这使得数据输入和网格剖分大为简化。如果铁的物质参数是一个常数（即为线性），则它所产生的场值就不会由于方法本身的近似而产生误差。因此，对线性问题，积分方程法具有极高的精度。而在微分方程法中，剖分过稀会带来较大的截断误差；剖分过密又会带来较大的舍入误差。图0-1给出了采用积分方程法和采用微分方程法时，一个二极磁铁中心面上的场的计算值与实测值的比较。从图可见，由于磁铁的间隙较大，边界的右侧可视为开域，因此积分方程法显出了较大的优点。

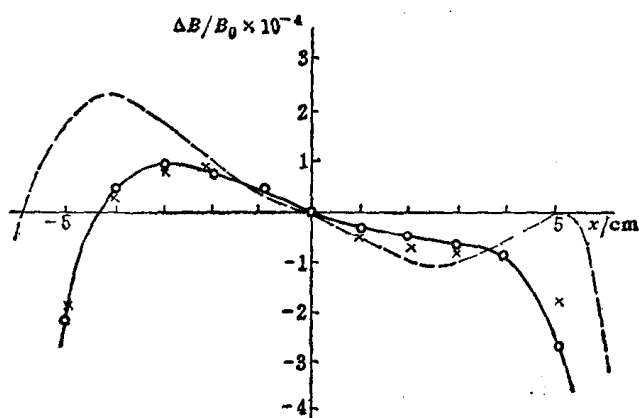


图0-1 采用积分方程法和微分方程法计算二极磁铁时，中心面上场的分布曲线

○测量值 ———积分方程法 ×边界积分法 - - -微分方程法

但是，用积分方程法去解非线性问题时，由于确定物质磁化状态的离散方程的系数矩阵是非对称满阵，加上每一剖分单元重心上的场参数是用向量来描述的，在三维场中每一单元重心上形成三个未知数，因此需要相当大的内存来存贮系数阵的元素。此外，耦合系数是由二重或三重积分通过数学变换化简得来，带有超越函数，轴对称场更含有椭圆积分函数，因此，系数的形成要消耗大量的CPU时间。为了改进积分方程法，J.Simkin等人发展了边界积分法。边界积分的离散只涉及到铁区边界，从而使未知

数大为减少，系数阵的形成中又吸取了有限元法的插值方法，减少了CPU时间。对线性或近似线性的情况，达到了相当高的精度。

为了解决非线性问题，1978年，C.W.Trowbride和J.Smikin等人提出了双标量位法，它用两种标量位来描述恒定磁场。在电流区采用简化标量位，在无电流区采用全标量位。交界面上过多的未知数，可通过磁场的交界面条件予以消去。这种方法亦称为积分—微分方程法。

在解非线性铁区场时，通常微分方程法较积分方程法有较高的效率，这是因为微分方程法（如有限元法）形成的系数阵为对称稀疏阵，且系数计算简单，收敛速度亦较快。一旦铁磁物质在非线性状态下的工作参数确定之后，就可利用积分方法计算线性场区的场分布，发挥积分方法的优点。这就是近年来所发展的微分—积分方法。这种方法不仅在二维或三维有限元法的基础上，利用积分方法去解决场分布或开域问题，而且如果结构具有某种二维场型的对称，还可用它来解决这种场型的三维分布问题。

§ 0-2 电磁场数值计算软件包的通常结构

电磁场数值计算程序的开发和完善，在一定范围内实现通用化，是目前国内、外的一个发展趋势。电磁场的计算亦随之从手工方式逐步向大规模批量计算发展。目前，国外的电磁场数值计算软件包比较多，二维有限元法有PE2D和MAGNET等，三维软件包有基于双标量位法的TOSCA、积分方程法的GFUN。现在国内也开始发展软件包，如DE2D和FEMA2D等。

通用软件包通常由下列部分组成：

- | | | |
|-----|---|---------|
| 前处理 | { | 1. 数据定义 |
| | | 几何尺寸 |
| | | 材料性能参数 |
| | | 边界条件 |
| | | 2. 模式化 |
| | | 空间剖分 |

	网格自动产生及节点形成 3. 网格图形显示
数据处理	1. 系数矩阵形成 2. 代数方程组求解 3. 非线性迭代
后处理	1. 计算结果输出 2. 力线或位线的图形显示 3. 铁区饱和情况显示 4. 力和损耗计算 5. 局部场分布的细微计算

在整个程序的比重上, 数据处理只占了很小的部分, 一般只在几百条指令范围, 但是它是占用计算机内存和消耗计算机时间的主要部分。前处理和后处理的程序编制工作量较大, 软件包通用性的大小也主要取决于这两部分。

软件包制成后, 即使用户不了解程序的具体内容, 只要按给定的说明书进行工作, 依靠计算机就能很快地完成所要求的计算和设计任务。

§ 0-3 各种方法的比较和展望

把场方程用泊松方程来描述, 即

$$\nabla \cdot a \nabla u = Q \quad (0-1)$$

式中 u 表示位函数, a 表示介质系数, Q 表示右端已知函数。对于不同的位, 有表0-1所示的意义。

方程 (0-1) 加上适当的边界条件, 即构成所谓边值问题, 可利用有限元法或有限差分法求解。这就是微分方程法。

场亦可用积分形式描述为

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi a} \int_V \frac{Q(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv \quad (0-2)$$

式中 $u(\mathbf{r})$ 表示场点的位函数, $Q(\mathbf{r}')$ 表示已知的源函数, $\mathbf{r}$ 为场点坐标, $\mathbf{r}'$ 为源点坐标。对于不同的位函数, 有表0-2所示的意义。

表0-1 泊松方程 (0-1) 所对应的物理量

名 称	场	u	α	Q
简化标量位	$H=H_m+H_s$ $H_m=-\nabla\phi$	ϕ	μ	$-\nabla\cdot\mu H_s$
全标量位	$H=-\nabla\psi$	ψ	μ	0
向 量 位	$B=\nabla\times A$	A	$\frac{1}{\mu}$	J
简化向量位	$A=A_m+A_s$ $\nabla\times\frac{1}{\mu}\nabla\times A_s=J$	A_m	$\frac{1}{\mu}$	$\nabla\cdot\left(1-\frac{1}{\mu}\right)A_s$

表0-2 积分通式 (0-2) 所对应的物理量

名 称	场	u	α	Q
标量电位	$E=-\nabla\phi$	ϕ	ε	$\rho(r')$
电流向量位	$B_s=\nabla\times A_s$	A_s	$\frac{1}{\mu}$	$J(r')$
磁化向量位	$B_m=\nabla\times A_m$	A_m	$\frac{1}{\mu}$	$\nabla\times M(r')$
标量磁位	$H_m=-\nabla\phi$	ϕ	μ_0	$M\cdot\nabla\left(\frac{1}{ r-r' }\right) r-r' $

在上表中，下标 s 表示与电流有关的量， m 表示与铁的磁化直接相关的量。

一、计算精度

在许多电磁设备的设计中，希望场的计算值能具有良好的精度，例如与实测值相比，误差为千分之一。这个要求对线性、二维、结构比较规整、物质参数稳定并且易于测到的情况下才能达到。对于三维场，即使满足了这些条件，无论采用什么方法，达到这一精度也是十分困难的。

现用图0-2所示H型磁铁的例子说明线性问题的收敛精度。图中所示为磁铁的1/4部分，极面呈斜坡状，假定与平面垂直的方向为无穷长。利用边界积分法和向量位有限元法分别进行计算。图0-3所示为假定铁的相对磁导率为1000，并以边界积分法取500

个自由度所计算的结果作为“正确”值时，两种不同的方法取不同的自由度，中心面上场值收敛于“精确”值的情况。可以看出，在线性情况下，边界积分法比有限元法好得多，但它不适用于非线性问题。在有限元法中，如果保持自由度的总数不变，把铁区剖分单元减少，气隙单元增加，精度可从0.08%提高到0.02%，这表明有限元法的局部精度与局部剖分有关。这是有限元法的一个重要特点。而积分方程法不具有这种特点。

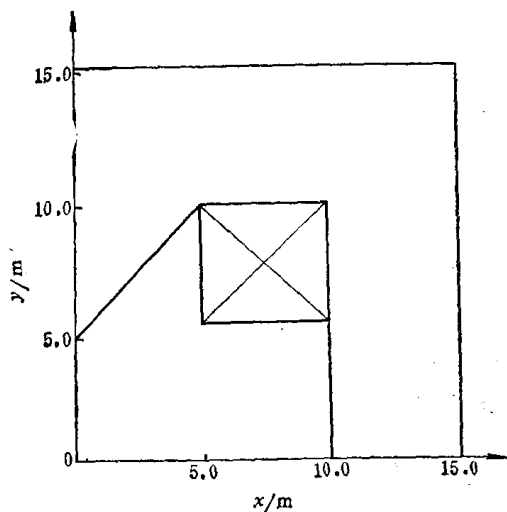


图0-2 具有斜坡状H型磁铁的1/4截面

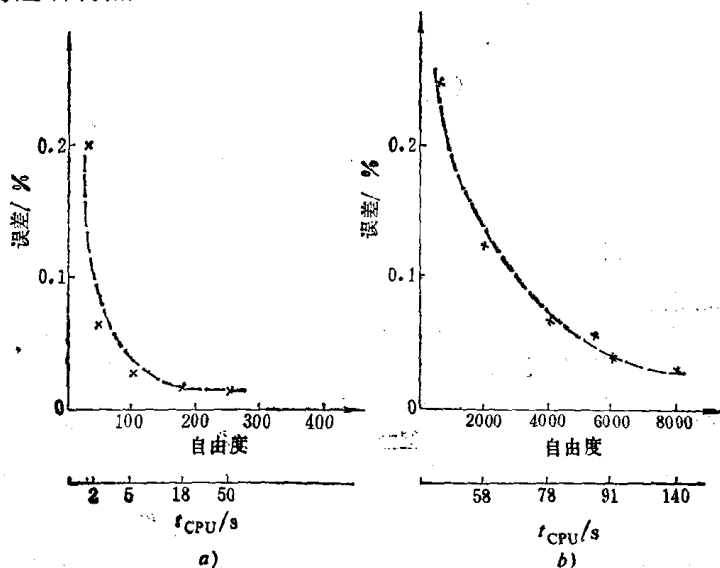


图0-3 对图0-2中磁铁 $\int_0^{10} F_y dx$ 的积分值用不同方法计算的结果与精确值的比较
a) 边界积分法 b) 有限元法

二、运行代价

计算精度与剖分单元的线度之间假定有一与方法无关的指数关系。以 n 、 m 和 p 分别代表边界积分法、积分方程法和有限元法的边长尺寸的改变，表0-3给出了二维情况下不同方法所获得的一定精度与它们所付出的代价之间的关系。表0-4给出了三维情况下不同方法的比较。

从表0-3和表0-4可以看出，无论采用什么方法，单元数量的限制均取决于系数阵的存储量和方程组求解的CPU时间。从三维表中可以看出，对于非线性问题，由于有限元法可以分成更多的单元（在相同内存和时间限制下），显得更为有效。目前，国外通常把积分方程法的离散单元限制在1000以下，如需剖分更多的单元，则常常改为有限元法，以便获得更好的精度。国内由于计算机内存的限制，采用积分方程法时，通常把离散单元限制在100~150。

表0-3 二维问题中不同方法的运行代价比较表

分 类	边界积分法	积分方程法	有限元法
精 度	n^a	m^a	p^a
单 元 数	n	m^2	p^2
系数阵存储量	n^2	m^4	p^2
方程求解时间	n^3	m^6	$p^2 \ln p$
求场时间	n	m^2	p

表0-4 三维问题中不同方法的运行代价比较表

分 类	边界积分法	积分方程法	有限元法
精 度	n^a	m^a	p^a
单 元 数	n^2	m^3	p^3
系数阵存储量	n^4	m^6	p^3
方程求解时间	n^3	m^4	$p^3 \ln p$
求场时间	n^2	m^3	p

三、混合方法

作为积分法与微分方程法混合运算的双标量位法，国外有软件包TOSCA以解决非线性三维恒定磁场问题。由于在解方程时使用了不完全Cholesky分解技术，使其功能大为提高。我们用双标量位法计算了一些具体实例，证明它是有效的。图0-4给出了一个轴对称场型磁铁的精度与自由度之间的关系。剖分是按三维方式进行的。

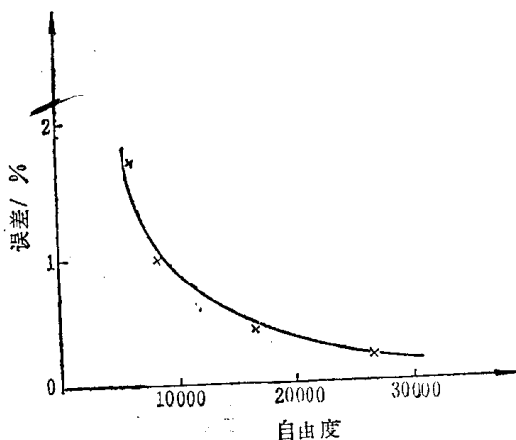


图0-4 双标量位法的计算精度与自由度的关系

四、开域问题

除了积分方程法以外，还有几种方法能有效地解决开域问题，如边界积分法，边界伽辽金法 (Boundary Galerkin Method)

用于假边界，以及膨胀技术 (Balloonning Technique)。还有用不同的衰减函数 (如采用倒数、指数或正交多项式函数) 来逼近边界至无穷远的方法等等。

五、涡流问题

近年来，涡流问题的计算发展很快。二维问题除传统的向量位方法外，边界积分法也发展了二维涡流场。在三维时变场计算中，向量位和电场解直接耦合，扩展到非导体空间的标量位，并已证明了向量位解的唯一性。

六、数据前处理

有限元法中，最麻烦的问题是数据准备，这是因为场区内的全部空间都需要离散。软件包由于具有在几何模型的基础上自动生成网格的功能，从而使输入数据的准备工作大为简化。现在自适应 (adaptive) 网格的产生能在一定的自由度下，最佳地满足精度要求 (图0-5)。

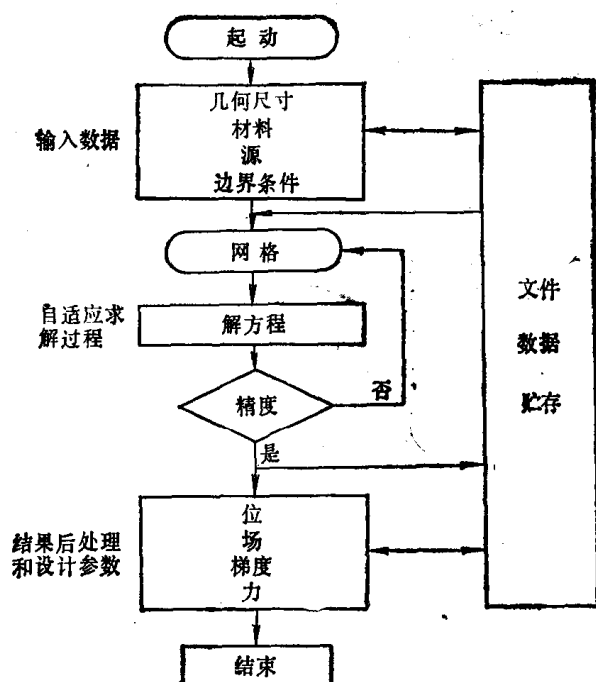


图0-5 包括自适应网格产生的软件包框图

总之，目前理论工作的焦点仍然是三维时变场问题，实际程序的工作重点是建立各种形式的软件包。在三维时变场问题的求解上，提出的方法较多，但多集中在减少计算机内存以使其具有实用性上。一般情况下，向量位和标量位的联立才能正确的描述三维时变场，但考虑到非导电区域，人们总是力图只用标量位去描述它，因此构成了所谓 Ω -T方法和 A - Φ 方法。由于电磁场问题的复杂性，人们采用多种位来描述场，以及多种规范条件来保证解的唯一性。总的目的是减少计算机内存和CPU时间。总的说来，这方面的工作还很多，而积分方程法以及有关的混合应用，势必在解决电磁场问题中发挥更重要的作用，这点大约亦是肯定无疑的。

第一章 电磁场的积分表述

众所周知, 电磁场可以用麦克斯韦方程组描述。对麦克斯韦方程组积分, 可得电磁场的积分形式的解。以这些解为基础, 可形成电磁场的积分方程。

§ 1-1 电磁场的基本方程

产生电磁场的源是空间分布的电荷和电流。用电场强度 $\mathbf{E}$ 、磁场强度 $\mathbf{H}$ 、电位移 $\mathbf{D}$ 和磁感应强度 $\mathbf{B}$ 的时、空函数来描述电磁场时, 它们满足麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (1-2)$$

式 (1-1) 和式 (1-2) 分别称为麦克斯韦第一和第二方程。

由式 (1-1) 和式 (1-2) 以及电荷守恒性 $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 还可以导出连续性方程

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1-4)$$

一、电磁场方程的积分形式

式 (1-1)~式 (1-4) 是麦克斯韦方程组的微分形式, 利用向量积分的斯托克斯公式和高斯公式, 可以把它们变换成等价的积分形式。

设有一任意曲面 S , 其边界为 L 。若任一向量 $\mathbf{A}(x, y, z)$ 在 S 面上和边界 L 上连续, 且一阶导数亦连续, 按斯托克斯公式有

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (1-5)$$

其中 $d\mathbf{l}$ 是沿曲线 L 的长度元, $\mathbf{n}$ 为面元 ds 外法线方向的单位向量。对式 (1-1) 进行面积分, 并利用式 (1-5), 可得

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (1-6)$$

若积分的路径是确定的, 则微分算符可与积分算符互换位置, 故有

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds \quad (1-7)$$

同样, 对式 (1-2) 亦有

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I + \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds \quad (1-8)$$

式中 I 为闭曲线 L 所包围的全部电流。

根据高斯公式, 式 (1-3) 和式 (1-4) 可写为

$$\oint \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad (1-9)$$

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} ds = \int \rho dv = q \quad (1-10)$$

由闭曲面 S 所包围的体积为 V , q 为体积 V 内的全部电荷。

方程 (1-7)~式 (1-10) 就是麦克斯韦方程组的积分形式。

二、物质的宏观特性

麦克斯韦方程组中只有式 (1-1) 和式 (1-2) 是独立的, 场量 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{H}$ 亦只有两个是独立的。在场中任一点, 无论该点处于真空中还是处于某种介质中, 向量 $\mathbf{D}$ 可以表示为 $\mathbf{E}$ 的函数, 向量 $\mathbf{H}$ 则可表示为 $\mathbf{B}$ 的函数, 即

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}(\mathbf{E}) \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}(\mathbf{B}) \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

它们之间的函数关系是由该点所处介质的特性唯一确定的。在真空中, 其关系为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

式中 ϵ_0 和 μ_0 分别称为真空的介电常数和磁导率。

在各向同性的介质材料中, 场量 $\mathbf{D}$ 与 $\mathbf{E}$ 平行, $\mathbf{H}$ 亦与 $\mathbf{B}$ 平行, 故有

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \mathbf{B} \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

式中 ε 称为介质的介电常数, μ 为介质的磁导率; ε_r 和 μ_r 分别为介质的相对介电常数和相对磁导率。在各向异性的介质材料中, $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{H}$ 均为 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的三个分量的函数, 即

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{11} E_x + \varepsilon_{12} E_y + \varepsilon_{13} E_z \\ D_y &= \varepsilon_{21} E_x + \varepsilon_{22} E_y + \varepsilon_{23} E_z \\ D_z &= \varepsilon_{31} E_x + \varepsilon_{32} E_y + \varepsilon_{33} E_z \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

式中 $\varepsilon_{ij} (i, j=1, 2, 3)$ 是一个对称张量的各分量。 $\mathbf{H}$ 与 $\mathbf{B}$ 的各分量间亦有类似的关系。

有时为了描述物质的电磁性能, 还引入另外两个物理量: 极化向量 $\mathbf{P}$ 和磁化向量 $\mathbf{M}$, 它们定义为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \\ \mathbf{M} &= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{H} \end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

显然, 在真空中 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{M}$ 均为零。利用这些关系, 对线性和各向同性的介质, 可从麦克斯韦方程组中消去 $\mathbf{D}$ 和 $\mathbf{H}$, 得到

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mu_0 \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \nabla \cdot \mathbf{P}) \end{aligned} \right\} \quad (1-16)$$

式 (1-16) 说明介质对场的影响可以认为是附加了一项值为 $-\nabla \cdot \mathbf{P}$ 的等效电荷密度分布和值为 $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}$ 的等效电流密度分布。

在各向同性的介质中, 极化向量与相应的场向量平行, 因此还可引入下列关系式,