高等学校教学参考书

数学分析

下册

江泽坚 编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

数学分析

下册

江泽坚编

人民教育出版社

本书系在编者为吉林大学数学系编写的讲义的基础上修改而成。全书分上、下册出版。下册包括多元函数的极限和微分，隐函数，重积分，曲线积分，曲面积分，广义积分，带参变量的积分，富里埃级数与富里埃积分，变分法等九章。

本书可供综合大学和高等师范院校数学专业作为教学参考书。

数 学 分 析

下 册

江 泽 坚 编

人民教育出版社出版（北京沙滩后街）

人民教育出版社印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 13012·077　开本 850×1168 1/32　印张 10 2/16

字数 242,000　印数 35,501—85,000　定价(5)¥ 1.00

1965 年 12 月第1版　1978 年 3 月北京第 4 次印刷

目　录

第七章　多元函数的极限和微分

§1. 多元函数的极限

本章的主要对象是多元函数. 且以三维空间 R_3 为例. 设 E 为 R_3 中的一个点集, 若对于 E 中任何点 $P=(x, y, z)$ 皆恰有一数 u 与之对应, 我们便说 u 是 P 的函数, 记作

$$u=f(P) \quad \text{或者} \quad u=f(x, y, z),$$

此处 E 称为函数 $f(P)$ 的定义域. 这里的变数是 x, y, z, 不只一个, 因此人们说 $u=f(x, y, z)$ 是一个多元函数. 同样, 我们不难理解二维空间 R_2(即平面)中之一个点集上的函数.

例　对于单位球域 E: $x^2+y^2+z^2<1$ 上的任一点 (x, y, z), 通过对应关系

$$u=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}+\sin y+x^2e^z,$$

总恰好有一个数 u 与之对应. 这自然是一个函数, 单位球域 E 是这个函数的定义域.

为什么要研究多元函数呢? 首先, 自然界的现象常与时间和空间有关. 所以对它们的精确描述就必然会牵涉到 x, y, z, t 的函数(此处 x, y, z 指空间坐标, t 表示时间), 甚至更多元的函数. 例如一个物体(如地球)上的点的温度 T 可以因点的位置和时间而异, 所以是个四元函数 $T(x, y, z, t)$. 又如流体中质点的速度 $\boldsymbol{V}$ 应该是如下的向量

$$(p(x, y, z, t), q(x, y, z, t), r(x, y, z, t)),$$

此处 p, q, r 是 $\boldsymbol{V}$ 的分速度. 再如空间中某些曲面的方程可写成

$$z=f(x, y), \quad (x, y)\in D.$$

其次，就是对于一元函数的研究，我们也很难绝对不涉及到多元函数的概念．例如函数级数$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$的部分和$\sum_{n=0}^{N} f_n(x)$其实就是一个以$x, N$为变量的二元函数$S(N, x)$．总之，大量的实际问题迫使我们必须研究多元函数，单只讨论一元函数是不行的．

为简单计，今后把R_3中的点$X=(x_1, x_2, x_3)$，$Y=(y_1, y_2, y_3)$之间的距离$+\sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_i-y_i)^2}$记作$\|X-Y\|$．这样，三角形任二边之长总大于第三边，用上面的符号来表达这个事实，即对于R_3中任意三点X, Y, Z皆有

$$\|X-Z\| \leqslant \|X-Y\| + \|Y-Z\|.$$

这是分析学中最基本、最重要的不等式，我们以后要经常用到它．

函数的研究离不开点集的概念．详细的说，所谓R_3中的一个点集E，就是空间中满足某个条件$\mathscr{D}$的一切点构成的集合．按照这个说法，点集E是由条件$\mathscr{D}$确定的，不同的条件便产生不同的点集．因此人们常把R_3中的点集E写成

$$\{(x_1, x_2, x_3); \mathscr{D}\}$$

的形式．例如以原点为心、1为半径之球的内部便是一个点集，它可表成

$$\{(x, y, z); x^2+y^2+z^2<1\}.$$

给定一点$X_0=(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$及正数$\varepsilon$，点集

$$U=\{X; \|X-X_0\|<\varepsilon\}$$

叫做X_0之ε邻域．设$Y_0=(y_1^0, y_2^0, y_3^0)$，则点集

$$\{(x_1, x_2, x_3); x_i=x_i^0+t(y_i^0-x_i^0),\ i=1,2,3; 0\leqslant t\leqslant 1\}$$

就是以X_0, Y_0为端点的线段．

定义 设E为R_2中的点集，X_0为R_2中的点．假如X_0之任

何邻域中皆含有在E中且异于X_0的点,则称X_0为点集E的**聚点**.

从上述定义,我们可以证明: **在E之聚点X_0的任何邻域U中皆含有无穷多个在E中且异于X_0的点**. 否则, 设U中只含有有限多个在E中且异于X_0的点

$$X_1, X_2, \cdots, X_N,$$

今取正数$\rho<\min\{\|X_1-X_0\|, \|X_2-X_0\|,\cdots,\|X_N-X_0\|\}$,则在$X_0$之邻域

$$U_\rho=\{X; \|X-X_0\|<\rho\}$$

中便没有在E中且异于X_0的点了,这与聚点的性质是矛盾的.

定义 设E为R_2中的点集, $f(X)$是E上的函数, X_0是E的聚点, l是一定数. 如果对于任给之$\varepsilon>0$, 皆有$\delta>0$, 使当$0<\|X-X_0\|<\delta$且$X\in E$时,

$$|f(X)-l|<\varepsilon,$$

我们就说当X**趋于**X_0**时,函数**$f(X)$**以**l**为极限**,并记之以符号

$$\lim_{X\to X_0} f(X)=l$$

或者

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} f(x, y)=l.$$

对于$X_0=(x_0, y_0)$,点集

$$U_\delta=\{X; \|X-X_0\|<\delta\},$$

就其几何意义而言,可称之为**圆形邻域**,而点集

$$V_\eta=\{X; |x-x_0|<\eta, |y-y_0|<\eta\},$$

则可称之为**方形邻域**.

若$\eta\leqslant\dfrac{\delta}{\sqrt{2}}$,则圆形邻域$U_\delta$包含着方形邻域$V_\eta$. 这是因为任意取一点$X\in V_\eta$,总有

$$\|X-X_0\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\sqrt{2}\,\eta\leqslant\delta,$$

故 $X\in U_\delta$.

另一方面，方形邻域 V_δ 包含着圆形邻域 U_δ，因为当 $X\in U_\delta$ 时，有

$$|x-x_0|\leqslant\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\|X-X_0\|<\delta.$$

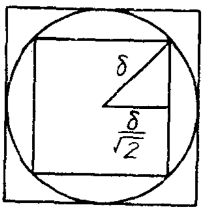

图 1

同样，$|y-y_0|<\delta$. 所以 $X\in V_\delta$. 以上说明，任何圆形邻域皆包含着一个方形邻域，而任何方形邻域也一定包含着一个圆形邻域如图 1. 根据这个，我们就也可以利用方形邻域来描述极限概念.

定义 设 E 为 R_2 中的点集，$f(X)$ 是 E 上的函数，X_0 是 E 的聚点，l 是一定数. 如果对于任给之 $\varepsilon>0$，皆有 $\eta>0$，使当 $|x-x_0|<\eta$，$|y-y_0|<\eta$ 且 $X=(x,y)\neq X_0$ 时，

$$|f(X)-l|<\varepsilon,$$

我们就说当 X 趋于 X_0 时，函数 $f(X)$ 以 l 为**极限**.

关于多元函数的极限，我们有如下的一批算律.

命题 1 设 E 为 R_2 中的点集，X_0 是 E 的聚点，又设 $f(X)$，$g(X)$ 皆为 E 上的函数，且 $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)$，$\lim\limits_{X\to X_0} g(X)$ 皆存在；则

(i) $\lim\limits_{X\to X_0}[f(X)+g(X)]=\lim\limits_{X\to X_0} f(X)+\lim\limits_{X\to X_0} g(X)$,

(ii) 对于任何常数 C,

$$\lim_{X\to X_0} Cf(X)=C\lim_{X\to X_0} f(X),$$

(iii) $\lim\limits_{X\to X_0}[f(X)g(X)]=\lim\limits_{X\to X_0} f(X)\lim\limits_{X\to X_0} g(X)$,

(iv) 当 $\lim\limits_{X\to X_0} g(X)\neq0$ 时，

$$\lim_{X\to X_0}\frac{f(X)}{g(X)}=\frac{\lim\limits_{X\to X_0} f(X)}{\lim\limits_{X\to X_0} g(X)},$$

(v) 设 $f(X)$ 的值域为 F, A 为 F 的聚点, $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=A$, 并且在 X_0 的附近,若 E 中的点 $X\neq X_0$ 时, $u=f(X)\neq A$, 又设 $\varphi(u)$ 在 F 上有定义,且 $\lim\limits_{u\to A}\varphi(u)=B$; 则

$$\lim_{X\to X_0}\varphi[f(X)]=B.$$

证明 关于这些算律的证明,基本上和过去对一元函数之相应的算律的证明一样. 现在且以 (i) 为例, 设 $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=A$, $\lim\limits_{X\to X_0} g(X)=B$. 根据极限的定义,对于任何的 $\varepsilon>0$, 恒有 $\delta_1>0$ 使当 $0<\|X-X_0\|<\delta_1$ 时,

$$|f(X)-A|<\frac{\varepsilon}{2},$$

又有 $\delta_2>0$ 使当 $0<\|X-X_0\|<\delta_2$ 时,

$$|g(X)-B|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$, 则当 $0<\|X-X_0\|<\delta$ 时,

$$|[f(X)+g(X)]-(A+B)|\leqslant$$

$$\leqslant|f(X)-A|+|g(X)-B|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

从极限的定义便有

$$\lim_{X\to X_0}[f(X)+g(X)]=A+B.$$

对于一元函数 $y=f(x)$, 我们有所谓左极限和右极限的概念. 我们曾经证明过, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在之充要条件是当 $x\to x_0$ 时, $f(x)$ 之左右极限皆存在且相等(见第一章). 现在对于多元函数, 我们也来考虑函数沿着某方向的极限, 先看平面的情况, 设 $f(x,y)$ 定义在 (x_0,y_0) 之某个邻域上,假如

$$\lim_{\rho\to+0} f(x_0+\rho\cos\alpha_1,\ y_0+\rho\cos\alpha_2)=l$$

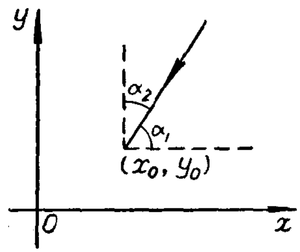

图　2

存在，就是当动点 (x, y) 沿着由 $A=(\cos\alpha_1, \cos\alpha_2)$ 所确定的半直线趋于 (x_0, y_0) 时（图2），$f(x, y)$ 趋于 l，人们称 l 为 $f(x, y)$ 沿着方向 A 的极限．在平面的情形，$\cos\alpha_2=\sin\alpha_1$，故上述极限也可写成

$$\lim_{\rho\to+0} f(x_0+\rho\cos\alpha_1, y_0+\rho\sin\alpha_1).$$

再看三维空间的情形．设 $A=(a, b, c)$ 是 R_3 中的向量．我们知道向量 A 的长度是

$$\|A\|=+\sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

一般都称

$$\cos\alpha=\frac{a}{\|A\|},\ \cos\beta=\frac{b}{\|A\|},\ \cos\gamma=\frac{c}{\|A\|}$$

为 A 之方向余弦．所以 R_3 中的一个方向往往表示为一个向量 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，显然现在还有

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

定义　设 $f(X)$ 是 $X_0=(x_0, y_0, z_0)$ 之某个邻域上的函数，假如

$$\lim_{\rho\to+0} f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\cos\beta, z_0+\rho\cos\gamma)$$

存在，则称之为 $f(X)$ 沿着方向 $A=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 之极限．

命题 2　设 $f(X)$ 是 $X_0=(x_0, y_0, z_0)$ 之某个邻域上的函数．若 $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=l$，则 $f(X)$ 沿着任何方向 $A=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 的极限皆存在且等于 l．

证明　既然 $\lim\limits_{X\to X_0} f(X)=l$，故对于任何 $\varepsilon>0$，皆有 $\delta>0$，使当 $0<\|X-X_0\|<\delta$ 时，

$$|f(X)-l|<\varepsilon. \tag{*}$$

现在设 $X=(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\cos\beta, z_0+\rho\cos\gamma)$, 则

$$\|X-X_0\|=(\rho^2\cos^2\alpha+\rho^2\cos^2\beta+\rho^2\cos^2\gamma)^{\frac{1}{2}}=\rho.$$

从而由(*)式, 当 $0<\rho<\delta$ 时,

$$|f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\cos\beta, z_0+\rho\cos\gamma)-l|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{\rho\to+0} f(x_0+\rho\cos\alpha, y_0+\rho\cos\beta, z_0+\rho\cos\gamma)=l.$$

命题 2 显然可以进一步推广，例如在二元函数的情况，把原来的射线换成一般的连续曲线 $y=\varphi(x)$, 但要求 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=y_0$, 则对于任何 $\varepsilon>0$, 既然 $\lim\limits_{x\to x_0, y\to y_0} f(x, y)=l$, 故有 $\eta>0$, 使当 $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\eta$ 时,

$$|f(x, y)-l|<\varepsilon.$$

由假设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=y_0$, 故有正数 $\delta<\frac{\eta}{\sqrt{2}}$, 使当 $0<|x-x_0|<\delta$时,

$$|\varphi(x)-y_0|<\frac{\eta}{\sqrt{2}},$$

于是在 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$0<(x-x_0)^2+[\varphi(x)-y_0]^2<\frac{\eta^2}{2}+\frac{\eta^2}{2}=\eta^2,$$

从而当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$$|f[x, \varphi(x)]-l|<\varepsilon,$$

于是从 $\lim\limits_{x\to x_0, y\to y_0} f(x, y)=l$ 可推出

$$\lim_{x\to x_0} f[x, \varphi(x)]=l.$$

此处 $y=\varphi(x)$可以是任何经过(x_0, y_0)的连续曲线.

例 和一元函数不一样，命题 2 之逆是不成立的. 例如考察函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^6}, & \text{当 } x, y \text{ 不同时为 0 时,}\\ 0, & \text{当 } x=0 \text{ 且 } y=0 \text{ 时,}\end{cases}$$

则对于任何 α, $f(x,y)$沿着方向$(\cos\alpha, \sin\alpha)$之极限

$$\lim_{\rho\to+0} f(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)=\lim_{\rho\to+0}\frac{\rho^4\cos\alpha\sin^3\alpha}{\rho^2\cos^2\alpha+\rho^6\sin^6\alpha}=0.$$

但是$\lim\limits_{x\to0,y\to0} f(x,y)$却是不存在的，否则由命题 2, $\lim\limits_{x\to0,y\to0} f(x,y)=0$,

考虑过$(0,0)$的曲线 $y=\sqrt[3]{x}$，由前述命题 2 之推广，应有

$$\lim_{x\to0} f(x, \sqrt[3]{x})=0.$$

但是，现在

$$\lim_{x\to0} f(x, \sqrt[3]{x})=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot x}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

发生矛盾，足见$\lim\limits_{x\to0,y\to0} f(x,y)$是不存在的.

在多元函数理论中，我们经常遇到，并且必须解决各种类型的，所谓极限手续的交换问题．相对于一元函数来说，这是多元函数理论的一个特点.

设 $f(x,y)$是矩形

$$R=\{(x,y);\ \ |x-x_0|<a,\ \ |y-y_0|<b\}$$

上的函数，假如对于(y_0-b, y_0+b)上任何异于 y_0 的点 $\bar{y}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\bar{y})$皆存在，这个极限当然是 $\bar{y}$ 的函数，记之为 $\varphi(\bar{y})$. 假如 $\lim\limits_{\bar{y}\to y_0}\varphi(\bar{y})=$ $=A$, 我们就说

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A.$$

另一方面，若对于 (x_0-a, x_0+a) 上任何异于 x_0 的点 $\bar{x}$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(\bar{x},y)$皆存在，这个极限自然是 $\bar{x}$ 的函数，记之为 $\psi(\bar{x})$, 假如 $\lim\limits_{\bar{x}\to x_0}\psi(\bar{x})=B$, 我们就说

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=B.$$

一般的说，**尽管这两个累次极限都存在，但是A和B却未必相等，例如对于**

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}, & \text{当 } x+y\neq 0 \text{ 且 } x,y \text{ 皆} \neq 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{在别处},\end{cases}$$

显然

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{y^2-y}{y}=-1,$$

而

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x}=1.$$

命题 3　设$f(x,y)$是矩形$R=\{(x,y);\ |x-x_0|<a,\ |y-y_0|<b\}$上的函数，若

(i) $\lim\limits_{x\to x_0, y\to y_0} f(x,y)=A$,

(ii) 对 (y_0-b, y_0+b) 上任何异于 y_0 的点 $\bar{y}$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\bar{y})$皆存在，

(iii) 对(x_0-a, x_0+a)上任何异于 x_0 的点 $\bar{x}$, $\lim\limits_{y\to y_0} f(\bar{x}, y)$皆存在，则

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A.$$

证明　由假设(i)，对任何 $\varepsilon>0$，应有$\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$，$0<|y-y_0|<\delta$ 时，

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

在此式中，任取 $y=\bar{y}$，只要 $0<|\bar{y}-y_0|<\delta$，然后令 $x\to x_0$，则由假设(ii)，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\bar{y})=\varphi(\bar{y})$存在，从而当 $0<|\bar{y}-y_0|<\delta$ 时，

$$|\varphi(\bar{y})-A|\leqslant\varepsilon.$$

这说明$\lim\limits_{\bar{y}\to y_0}\varphi(\bar{y})=A$, 即

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x, y)=A.$$

同样可证明

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x, y)=A.$$

有人说得好:“**从一元函数转换到多元函数时，是会出现某些在原则上是新的东西的**”, 上面的例 1 以及关于累次极限问题的讨论正好表明了这一点. 以后我们还将遇到许多这方面的事例. 为什么是这样呢? 仔细观察一下，人们便不难理解，其所以如此的原因, 就在于高维空间几何性质的复杂性.

§2. 多元连续函数的基本性质

在第一章中, 我们已经学过一元连续函数的若干基本性质, 在这个基础上, 我们来讨论多元连续函数的一些性质, **它们是多元函数理论的基础**.

先介绍几个关于点集的概念, 设 A 和 B 是 R_2 中的点集，假如凡 A 中的点皆是 B 中的点, 则称 B **包含** A 或者说 A 被 B 包含, 并用符号 $B\supset A$ 或者 $A\subset B$ 来表示. 如果 $A\supset B$ 同时 $B\supset A$, 则称 A 等于 B, 用符号 $A=B$ 来表示. $\{P;P\in A$ 或者 $P\in B\}$ 叫做 A 与 B 的**并集**, 记作 $A\cup B$. A 之所有聚点构成的点集叫做 A 的**导集**, 记作 A'. 而并集 $A\cup A'$ 则称为 A 的**闭包**, 记作 $\bar{A}$. 若 $\bar{A}=A$, 则称 A 为**闭集**, 例如$\{(x, y);\ x^2+y^2\leqslant 1\}$. 如果对于 A 中任何点 x, 皆有 x 之一邻域 U 存在，使凡 U 中之点皆在 A 内，则称 A 为**开集**，例如$\{(x, y);\ x^2+y^2<1\}$便是一个开集.

假如对于开集 A 中任二点 X_1, X_2 皆有 A 中的折线把 X_1 与 X_2 连接起来, 则称如此的开集为**区域**. 显然凡区域皆开集, 但是开集则未必一定是区域. 例如

$$A_1=\{(x, y); x^2+y^2<1\},$$

$$A_2=\{(x, y); 2<x<3\}$$

都是区域，但是 $A_1\cup A_2$ 虽然仍是开集，可不是区域.

我们也常称区域 A 的闭包 $\bar{A}$ 为所谓**闭区域**，这是习惯的称呼，其实按照区域的定义来看 $\bar{A}$ 已经不成其为区域了.

命题 4 设 $\{P_k\}$ 是 $\bar{A}$ 中的一串点，若 $\lim\limits_{k\to\infty} P_k=P_0$. 则 $P_0\in\bar{A}$.

证明 先根据叙列 $\{P_k\}$ 来制造一个叙列 $\{Q_k\}$. 其定义如下. 当 $P_k\in A$ 时，便定义 $Q_k=P_k$. 若 $P_k\in A'$，由聚点的定义，应有 $Q_k\in A$ 使

$$\|Q_k-P_k\|<\frac{1}{k}.$$

注意如此的叙列 $\{Q_k\}$ 是完全在 A 中的，而且对于任何自然数 k，上述不等式都是成立的，显然

$$\|Q_k-P_0\|\leqslant\|Q_k-P_k\|+\|P_k-P_0\|<\frac{1}{k}+\|P_k-P_0\|.$$

当 $k\to\infty$ 时，此式右端两项皆趋于零. 因此 $\lim\limits_{k\to\infty} Q_k=P_0$.

以下分两种情况来讨论，一种情况是 $\{Q_k\}$ 只是由有限多个点重复排列成的，则这有限多个点中至少有一个出现无穷多次，从而有 $Q_{k_1}=Q_{k_2}=\cdots=Q_{k_i}=\cdots$. 但 $\lim\limits_{i\to\infty} Q_{k_i}=P_0$，故 $P_0=Q_{k_i}(i=1, 2, 3, \cdots)$，于是 $P_0\in A\subset\bar{A}$.

另一种情况是，$\{Q_k\}$ 中确含有无穷多个相异的点，此时 P_0 显然是 A 的聚点. 即 $P_0\in A'\subset\bar{A}$.

命题 5 R_2 中的一串点 $P_k=(x_k, y_k)$，$(k=1, 2, 3, \cdots)$ 趋于 $P_0=(x_0, y_0)$ 之充要条件是

$$\lim_{k\to\infty} x_k=x_0 \text{ 且 } \lim_{k\to\infty} y_k=y_0.$$

证明 先证必要性. 设 $\lim\limits_{k\to\infty} P_k=P_0$，则对于任给的 $\varepsilon>0$，应有自然数 N，使当 $k\geqslant N$ 时，

$$\|P_k-P_0\|<\varepsilon.$$

而

$$|x_k-x_0|\leqslant\sqrt{(x_k-x_0)^2+(y_k-y_0)^2}=\|P_k-P_0\|$$

故当 $k\geqslant N$ 时，

$$|x_k-x_0|<\varepsilon.$$

因此

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x_0.$$

同法可证 $\lim\limits_{k\to\infty}y_k=y_0$.

至于充分性，对于任给的 $\varepsilon>0$，从 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0$，应有自然数 N_1，使当 $k\geqslant N_1$ 时，

$$|x_k-x_0|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

同样从 $\lim\limits_{k\to\infty}y_k=y_0$，应有自然数 N_2，使当 $k\geqslant N_2$ 时，

$$|y_k-y_0|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.$$

取 $N=\max(N_1, N_2)$，则当 $k\geqslant N$ 时，

$$\|P_k-P_0\|=\sqrt{(x_k-x_0)^2+(y_k-y_0)^2}<\sqrt{2\cdot\frac{\varepsilon^2}{2}}=\varepsilon,$$

这说明 $\lim\limits_{k\to\infty}P_k=P_0$.

定义 对于 R_2 中的点集 E，若有正数 M 存在，使对于任何 $P=(x, y)\in E$ 皆有

$$|x|\leqslant M,\quad |y|\leqslant M,$$

则称 E 为**有界点集**.

定理 1 （维尔斯托拉斯聚点原则）. 若 E 是 R_2 中有界的无穷点集，则 E 至少有一个聚点.

证明 在 E 中选取一串相异的点

$$P_k=(x_k, y_k)\quad (k=1, 2, 3, \cdots).$$