

高等学校教材

# 材料力学

下册

马世麟 傅仁本 主编

机械工业出版社



高等学校教材

# 材料力学

下册

主 编 马世麟 傅仁本  
副主编 黄 美 谭文锋 陈英杰  
主 审 高宝珍 李慧剑



机械工业出版社

本书是根据国家教委审定的高等工业学校“材料力学课程教学基本要求”(100~110学时),在多年教学实践的基础上编写的。

本书(下册)包括能量法、静不定系统、动载荷、交变应力、压杆稳定、厚壁筒、平面曲杆、矩阵位移法、构件的塑性计算原理等十章。为便于学习,每章后都附有习题,在书末附有习题参考答案。

本书适用于高等工业学校机械类各专业,也可供其他专业使用及有关工程技术人员参考。

DV86/07

### 图书在版编目(CIP)数据

材料力学 下册/马世麟,傅仁本主编. —北京:机械工业出版社,1996.12

高等学校教材

ISBN 7-111-05395-8

I. 材… II. ①马… ②傅… III. 材料力学-高等学校-教材 IV. TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (96) 第 19629 号

出版人: 马九荣 (北京市昌平南大街1号 邮政编码 100037)

责任编辑: 张一萍 版式设计: 杨丽华 责任校对: 罗利华

封面设计: 郭景云 责任印制: 侯新民

北京市昌平精工印刷厂 印刷 · 新华书店北京发行所发行

1996年12月第1版 · 1996年12月第1次印刷

787mm×1092mm<sup>1/32</sup> · 10 1/8 印张 · 228 千字

0 001—4 000 册

定价: 13.50 元

# 目 录

|      |                          |     |
|------|--------------------------|-----|
| 第十二章 | 能量法 .....                | 1   |
| 第一节  | 引言 .....                 | 1   |
| 第二节  | 变形能的计算 .....             | 1   |
| 第三节  | 单位载荷法 .....              | 9   |
| 第四节  | 图形互乘法 .....              | 17  |
| 第五节  | 互等定理 .....               | 22  |
| 第六节  | 虚功原理 .....               | 25  |
| 第七节  | 卡氏定理 .....               | 32  |
| 习题   | .....                    | 36  |
| 第十三章 | 静不定系统 .....              | 46  |
| 第一节  | 静不定系统的概念 .....           | 46  |
| 第二节  | 力法解静不定系统 .....           | 49  |
| 第三节  | 对称及反对称性质的应用 .....        | 61  |
| 第四节  | 连续梁及三弯矩方程 .....          | 68  |
| 习题   | .....                    | 75  |
| 第十四章 | 动载荷 .....                | 81  |
| 第一节  | 概述 .....                 | 81  |
| 第二节  | 动静法的应用 .....             | 82  |
| 第三节  | 构件在强迫振动时的应力计算 .....      | 88  |
| 第四节  | 构件受冲击时的应力和变形 .....       | 96  |
| 第五节  | 冲击韧度 .....               | 104 |
| 习题   | .....                    | 106 |
| 第十五章 | 交变应力 .....               | 113 |
| 第一节  | 交变应力与疲劳失效 .....          | 113 |
| 第二节  | 交变应力的循环特征、应力幅和平均应力 ..... | 115 |

|             |                        |            |
|-------------|------------------------|------------|
| 第三节         | 持久极限 .....             | 117        |
| 第四节         | 影响构件持久极限的因素 .....      | 118        |
| 第五节         | 对称循环下构件的疲劳强度计算 .....   | 125        |
| 第六节         | 持久极限曲线 .....           | 127        |
| 第七节         | 不对称循环下构件的疲劳强度计算 .....  | 129        |
| 第八节         | 弯扭组合交变应力的强度计算 .....    | 132        |
| 第九节         | 变幅交变应力 .....           | 136        |
| 第十节         | 提高构件疲劳强度的措施 .....      | 138        |
|             | 习题 .....               | 140        |
| <b>第十六章</b> | <b>压杆稳定 .....</b>      | <b>144</b> |
| 第一节         | 压杆稳定性概念 .....          | 144        |
| 第二节         | 两端铰支细长压杆的临界力 .....     | 147        |
| 第三节         | 不同杆端约束细长压杆的临界力 .....   | 150        |
| 第四节         | 欧拉公式的适用范围 经验公式 .....   | 152        |
| 第五节         | 压杆稳定性计算 .....          | 157        |
| 第六节         | 提高压杆稳定性的措施 .....       | 166        |
|             | 习题 .....               | 168        |
| <b>第十七章</b> | <b>厚壁筒 .....</b>       | <b>174</b> |
| 第一节         | 厚壁筒的应力及变形 .....        | 174        |
| 第二节         | 厚壁筒的强度计算 .....         | 179        |
| 第三节         | 组合筒 .....              | 185        |
|             | 习题 .....               | 191        |
| <b>第十八章</b> | <b>平面曲杆 .....</b>      | <b>192</b> |
| 第一节         | 概述 .....               | 192        |
| 第二节         | 平面曲杆纯弯曲时横截面上的正应力 ..... | 193        |
| 第三节         | 中性层曲率半径 $r$ 的确定 .....  | 199        |
| 第四节         | 曲杆的强度计算 .....          | 208        |
| 第五节         | 曲杆的变形计算 .....          | 216        |
|             | 习题 .....               | 215        |

|       |                       |     |
|-------|-----------------------|-----|
| 第十九章  | 矩阵位移法 .....           | 218 |
| 第一节   | 概述 .....              | 218 |
| 第二节   | 轴向拉伸(压缩)杆件的刚度方程 ..... | 219 |
| 第三节   | 受扭杆件的刚度方程 .....       | 225 |
| 第四节   | 受弯杆件的刚度方程 .....       | 228 |
| 第五节   | 梁单元的中间载荷 .....        | 236 |
| 第六节   | 组合变形杆件的刚度方程 .....     | 241 |
| 第七节   | 受拉(压)杆件的坐标变换 .....    | 246 |
| 第八节   | 受弯杆件的坐标变换 .....       | 256 |
|       | 习题 .....              | 261 |
| 第二十章  | 构件的塑性计算原理 .....       | 267 |
| 第一节   | 概述 .....              | 267 |
| 第二节   | 拉(压)杆系的塑性分析 .....     | 270 |
| 第三节   | 圆轴的塑性扭转 .....         | 274 |
| 第四节   | 梁的弹塑性弯曲 .....         | 276 |
| 第五节   | 按承载能力计算拉压静不定结构 .....  | 283 |
| 第六节   | 按承载能力法计算静定梁 .....     | 286 |
| 第七节   | 塑性铰及按承载能力计算静不定梁 ..... | 290 |
| 第二十一章 | 实验应力分析 .....          | 293 |
| 第一节   | 概述 .....              | 293 |
| 第二节   | 电阻应变法的基本原理 .....      | 294 |
| 第三节   | 应变测量和应力计算 .....       | 297 |
| 第四节   | 光弹性实验的原理和方法 .....     | 306 |
|       | 习题 .....              | 313 |
|       | 习题答案 .....            | 315 |
|       | 主要参考文献 .....          | 326 |

## 第十二章 能量法

### 第一节 引言

变形固体在外力作用下产生变形,引起外力作用点产生位移。外力将沿其作用线方向上的位移作功。与此同时,在变形固体内部储存了变形能。在加载过程中,若外力从零开始缓慢地增加到最终值,则除变形能外,其他能量变化甚小,可以认为全部外力功  $W$ ,都转变为变形固体内的变形能  $U$ ,即

$$U=W \quad (12-1)$$

在弹性范围内,若逐渐将外力撤除时,变形能又可全部转变为功。这就是说,在弹性范围内,变形能是可逆的。

在变形固体力学中,利用功、能的概念,建立有关分析变形、位移、内力的原理和方法,统称为能量法。能量法在固体力学中应用得很广泛。

本章重点介绍计算变形的单位载荷法,它是计算刚架、桁架等杆系结构变形的简便方法。此外,还介绍了一些能量原理,如卡氏定理、虚功原理等,这些内容是进一步掌握能量法的基础。

### 第二节 变形能的计算

#### 一、外力功 变形能的一般表达式

现以图 12-1a 所示简支梁为例,说明计算弹性体内储存变形能数量的方法。梁上的集中外力  $F$ ,从零开始缓慢地增加

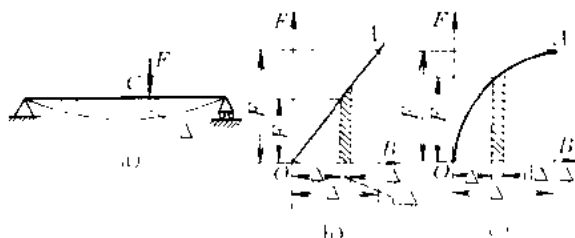


图 12-1

到最终值  $F_1$ 。力作用点下的位移也从零逐渐增加到最终值  $\Delta_1$ 。外力  $F$  与位移  $\Delta$  之间可能表现为正比关系,如图 12-1b 所示,这样的弹性体称为线性弹性体(或称线弹性体)。如果外力  $F$  与位移  $\Delta$  之间不存在正比关系,而是图 12-1c 所示的非线性关系,则称这种弹性体为非线性弹性体。

在加载过程中,外力  $F$  在位移增量  $d\Delta$  上作功的数值为  $dW = Fd\Delta$ ,它等于图 12-1b、c 阴影线所示的面积。外力  $F$  从零增长到  $F_1$  的全过程中,所作的总外力功为

$$W = \int_0^{\Delta_1} F d\Delta$$

由式(12-1)可得梁内储存的变形能为

$$U = W = \int_0^{\Delta_1} F d\Delta \quad (12-2)$$

若梁为非线性弹性体,式(12-2)的积分表明,梁内储存变形能的值等于图 12-1c 中曲线  $\widehat{OA}$  与水平坐标轴围成的面积  $OAB$ 。

若梁为线弹性体,式(12-2)积分等于图 12-1b 中三角形  $OAB$  的面积,变形能的数量为

$$U = W = \frac{1}{2} F_1 \Delta_1 \quad (12-3)$$

现在考虑弹性体上有几个载荷作用时,外力功和变形能的计算问题。为了叙述简单且不失其一般性,只讨论作用两个载荷

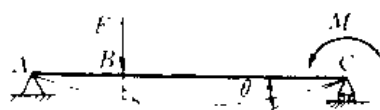


图 12-2

的情况。图 12-2 所示之简支梁,于 B、C 两点分别作用集中力  $F_1$ 、集中力偶  $M_2$ 。梁产生变形后, B 点的挠度(线位移)为  $\Delta_1$ , C 点截面转角(角位移)为  $\theta_2$ 。在变形过程中,集中力  $F_1$  在线位移  $\Delta_1$  上作功,集中力偶  $M_2$  在角位移  $\theta_2$  上作功。可以按不同的加载次序计算外力功的数值。例如,可以先加  $F_1$  后加  $M_2$ ,或者先加  $M_2$  后加  $F_1$ ,也可以将两个载荷同时由零开始,按同一比例缓慢地增加到最终值  $F_1$ 、 $M_2$ (通常称这种加载方式为简单加载)。对弹性体(线性或非线生)来说,在变形过程中储存变形能的数值,只决定于外力和位移的最终值,而与加载的次序无关。否则,若与加载的次序有关,那么总可选一储能较多的加载次序加载,而按储能较少的次序卸载,于是在弹性体内部将积累变形能。这显然与能量守恒原理相矛盾。可见,变形能的数值应与加载的次序无关。这样,就可以按上述简单加载的过程来计算外力功和变形能。

梁为非线性弹性体时,由式(12-2)得

$$U=W=\int_0^{\Delta_1} F_1 d\Delta + \int_0^{\theta_2} M d\theta \quad (12-4a)$$

梁为线性弹性体时,由式(12-3)得

$$U=W=\frac{1}{2} F_1 \Delta_1 + \frac{1}{2} M_2 \theta_2 \quad (12-4b)$$

为了得到变形能的一般表达式,将外力统一符号用  $F$  表示,这时要将集中力偶  $M_2$  改为  $F_2$ ,称  $F$  为广义力。用统一的

符号  $\Delta$  表示广义力做功的相应位移,这时应将角位移  $\theta_2$  改写成  $\Delta_2$ ,称  $\Delta$  为广义位移。图 12-3 所示弹性体上作用  $F_1, F_2, \dots, F_n$  个广义力,由于弹性体的变形(图 12-3 中虚线所示)产生相应的广义位移  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ 。在变形过程中,变形体内所储存的变形能的一般表达式,按以下两种情况考虑。

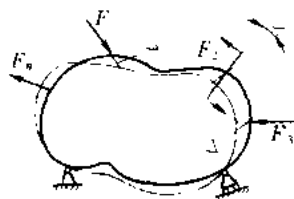


图 12-3

(一)非线性弹性体

依照式(a),变形能的一般表达式为

$$U = W = \sum_{i=1}^n \int_0^{\Delta_i} F_i d\Delta_i \quad (12-5)$$

式中  $F_i, \Delta_i$  分别表示广义力和广义位移;积分上限的  $\Delta_i$  为第  $i$  个广义位移的最终值。

利用广义力与广义位移之间的关系,可用广义位移  $\Delta$  表示广义力  $F$ ,于是变形能可表达成广义位移  $\Delta$  的函数,即

$$U = U(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n) \quad (12-6a)$$

同理,可将广义位移用广义力来表达。于是也可将变形能表达为广义力  $F$  的函数,即

$$U = U(F_1, F_2, \dots, F_n) \quad (12-6b)$$

(二)线性弹性体

依照式(12-4b),变形能的一般表达式为

$$U = W = \frac{1}{2} F_1 \Delta_1 + \frac{1}{2} F_2 \Delta_2 + \dots + \frac{1}{2} F_n \Delta_n \quad (12-7)$$

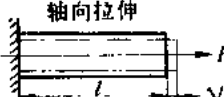
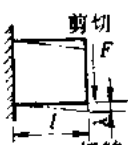
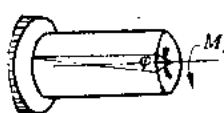
上式表示,线弹性体的变形能等于各广义力与其相应广义位移乘积之半的总和。这一结论也称为克拉贝依隆原理。

由于线性弹性体上的外力  $F_1, F_2, \dots, F_n$  与位移  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$  之间存在线性关系。所以对线弹性体来说,若把式(12-7)中的外力用位移表达,变形能就成为位移的二次齐次函数。同理,如把位移用外力来表达,则变形能就成为外力的二次齐次函数。可见,变形能是不能叠加的物理量。

## 二、线弹性杆件变形能表达式

根据前述各章的有关公式,可将线性弹性杆件在基本变形情况下的变形能表达为内力的函数。现将表达式列于表 12-1。

表 12-1 杆件在基本变形情况下的变形能

| 变 形 形 式                                                                                               | 外力功 $W$                      | 位移与力的关系                                    | 变形能 $U$                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|--------------------------------------------|---------------------------|
|  <p>轴向拉伸</p>         | $W = \frac{1}{2} F \Delta l$ | $F_N = P$<br>$\Delta l = \frac{F_N l}{EA}$ | $U = \frac{F_N^2 l}{2EA}$ |
|  <p>剪切</p> <p>扭转</p> | $W = \frac{1}{2} F \lambda$  | $F_Q = F$<br>$\lambda = \frac{F_Q l}{GA}$  | $U = \frac{F_Q^2 l}{2GA}$ |
|                    | $W = \frac{1}{2} M \varphi$  | $T = M$<br>$\varphi = \frac{T l}{GI}$      | $U = \frac{T^2 l}{2GI}$   |
|  <p>弯曲</p>         | $W = \frac{1}{2} M \theta$   | $M = M$<br>$\theta = \frac{M l}{EI}$       | $U = \frac{M^2 l}{2EI}$   |

在组合变形的情况下,由于横截面上不止一种内力素,而且内力的数值一般随截面的位置而变化。例如如图 12-4 所示圆截面杆件,横截面上同时存在弯矩  $M$ 、扭矩  $T$ 、轴力  $F_N$  和剪力  $F_Q$  四种内力。其中弯矩  $M$  是截面位置坐标  $x$  的函数。为了计算变形能,用

两个横截面截出  $dx$  微段。在该微段长度内,可以认为内力为常量。因此在该微段左、右两侧截面上作用着大

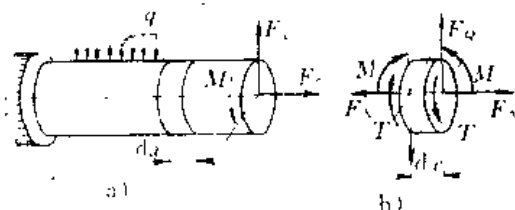


图 12-4

小相同的内力  $F_N$ 、 $F_Q$ 、 $T$ 、 $M$  等(图 12-4b)。对当前所研究的微段来说,这些内力都处于微段的外力地位。现在来计算该微段的变形能  $dU$ 。如上所述,一般情况下变形能(或外力功)不能叠加。但是当前的四种内力素,其中任一内力仅在该内力本身引起微段变形上作功,在其余内力引起微段的变形上不作功。例如在该微段的轴向相对位移  $d(\Delta l)$  上,仅有轴力  $F_N$  作功,而其余内力在轴向相对位移上都不作功。这样,就可以分别计算每一种内力单独作用时微段的变形能,然后求其总和,即可得该微段内储存的总变形能  $dU$ 。该微段左、右两截面的相对伸长、相对转角、相对扭转角、相对剪切变形分别用  $d(\Delta l)$ 、 $d\theta$ 、 $d\varphi$ 、 $d\lambda$  表示,则由表 12-1 可得微段变形能  $dU$  及外力功  $dW$  的表达式

$$\begin{aligned} dU = dW &= \frac{1}{2} F_N d(\Delta l) + \frac{1}{2} M d\theta + \frac{1}{2} T d\varphi + \frac{1}{2} k F_Q d\lambda \\ &= \frac{(F_N)^2 dx}{2EA} + \frac{M^2 dx}{2EI} + \frac{T^2 dx}{2GI_p} + \frac{k(F_Q)^2 dx}{2GA} \end{aligned}$$

通过积分,即可求出整个杆件的总变形能

$$U = \int_0^l \frac{(F_Q)^2 dx}{2EA} + \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} + \int_0^l \frac{T^2 dx}{2GI_p} + \int_0^l \frac{k(F_Q)^2 dx}{2GA} \quad (12-8)$$

式中系数  $k$ ①, 是用来修正横力弯曲时切应力不沿截面均匀分布的修正系数。它的数值与截面形状有关, 矩形截面  $k = \frac{6}{5}$ ,

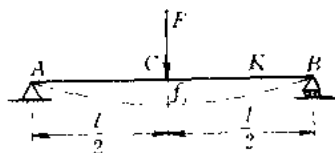


图 12-5

圆形截面  $k = \frac{10}{9}$ 。

对以抗弯为主的杆件及杆系, 因轴力和剪力远小于弯矩对变形的影响, 所以在计算这类杆件的变形时, 通常不计轴力和剪力的影响。

**例 12-1** 试求图 12-5 所示简支梁的变形能, 并求集中力  $F$  作用点  $C$  处的挠度  $f_c$ 。

**解** 由于  $AC$ 、 $BC$  两段对称, 所以全梁的变形能等于  $AC$  段的二倍。  $AC$  段内的弯矩为

$$M = -\frac{1}{2}Fx \quad \left(0 \leq x \leq \frac{l}{2}\right)$$

由式(12-8)得梁的变形能为

$$U = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M^2 dx}{2EI_z} = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(-\frac{1}{2}Fx\right)^2 dx}{2EI_z} = \frac{F^2 l^3}{96EI_z}$$

由式(12-1)得  $W = \frac{1}{2}Ff_c = U = \frac{F^2 l^3}{96EI_z}$

所以  $f_c = \frac{Fl^3}{48EI_z}$

如何求梁上任一点  $K$  的挠度 ( $K$  点无外力作用)? 如果梁上同时有几个载荷作用, 如何求任意点的挠度? 为了解决这些

① 参阅刘鸿文主编《材料力学》第二版, 下册, §10-7; 高教出版社 1982 年版

问题, 还需利用变形能的概念导出有关计算变形的方 法。

**例 12-2** 试求图 12-6a 所示半圆形平面曲杆, 作用于  $A$  端的集中力  $F$  作用点的垂直位移。  $F$  垂直于轴线所在平面。

**解** 设任意横截面  $mn$  的位置由圆心角  $\varphi$  确定。由曲杆的俯视图(图 12-6b)可以看出, 截面  $mn$  上弯矩和扭矩分别为

$$M = FR \sin \varphi$$

$$T = FR(1 - \cos \varphi)$$

微段  $Rd\varphi$  内的变形能是

$$\begin{aligned} dU &= \frac{M^2 Rd\varphi}{2EI} + \frac{T^2 Rd\varphi}{2GI_p} \\ &= \frac{F^2 R^2 \sin^2 \varphi d\varphi}{2EI} + \frac{F^2 R^2 (1 - \cos \varphi)^2 d\varphi}{2GI_p} \end{aligned}$$

积分求得整个曲杆的变形能为

$$\begin{aligned} U &= \int_0^\pi \frac{F^2 R^2 \sin^2 \varphi}{2EI} d\varphi + \int_0^\pi \frac{F^2 R^2 (1 - \cos \varphi)^2}{2GI_p} d\varphi \\ &= \frac{F^2 R^3 \pi}{4EI} + \frac{3F^2 R^3 \pi}{4GI_p} \end{aligned}$$

若  $F$  力作用点沿  $F$  的方向的位移为  $f_A$ , 在变形过程中, 集中力  $F$  所作的功应为

$$W = \frac{1}{2} F f_A$$

由  $U = W$ , 得  $f_A = \frac{FR^3\pi}{2EI} + \frac{3FR^3\pi}{2GI_p}$

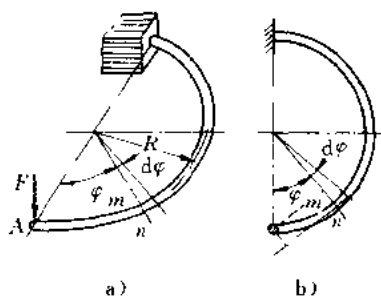


图 12-6

**例 12-3** 用变形比能的概念证明三个弹性常数  $E$ 、 $G$ 、 $\mu$  间的关系。

**解** 在纯剪切的情况下(图 12-7)变形比能为

$$u = \frac{1}{2} \tau \gamma = \frac{\tau^2}{2G}$$

另一方面,纯剪切应力状态下的主应力是

$$\sigma_1 = \tau, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau$$

代入式(9-26)算出比能

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] \\ &= \frac{\tau^2(1+\mu)}{E} \end{aligned}$$

这两种方式算出的比能应相等,即

$$\frac{\tau^2}{2G} = \frac{\tau^2(1+\mu)}{E}$$

由此求得三个弹性常数  $E$ 、 $G$ 、 $\mu$  间的关系是

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$



图 12-7

### 第三节 单位载荷法

单位载荷法又称莫尔定理(或莫尔积分),它是计算弹性变形比较简便的方法。现利用变形能的概念导出这种求变形的方

仍以简支梁为例,梁在截荷  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $\dots$ 、 $F_n$  作用下发生弯曲变形(图 12-8a)。 $M(x)$  表示横截面上的弯矩,梁的变形能为

$$U = \int_l \frac{M^2(x)}{2EI} dx \quad (12-9a)$$

按下述途径导出计算梁上  $C$  点挠度  $f_c$  的计算公式。



图 12-8

设在载荷组  $F_1, F_2, \dots, F_n$  作用之前, 先在  $C$  点沿挠度  $f_c$  方向上作用单位力  $F_0=1$ , 如图 12-8b 所示。这时梁横截面上的弯矩记为  $M_0(x)$ , 梁内的变形能为

$$U_0 = \int_l \frac{[M_0(x)]^2}{2EI} dx \quad (12-9b)$$

当外力  $F_0$  作用之后, 再把载荷  $F_1, F_2, \dots, F_n$  作用在梁上, 如图 12-8c 所示。若梁为线性弹性体, 且变形很小, 则各外力引起的变形相互独立无关, 也就是说, 不会因单位力  $F_0$  的预先作用而改变  $F_1, F_2, \dots, F_n$  的效应,  $C$  点由载荷组所引起的挠度必然仍为  $f_c$ 。由于载荷组  $F_1, F_2, \dots, F_n$  等外力作功而储存于梁内的变形能仍为式(12-9a)表示的  $U$ 。注意到在  $F_1, F_2, \dots, F_n$  作用过程中, 单位力  $F_0$  已在梁上, 所以单位力  $F_0$  又完成了数量为  $F_0 f_c = 1 \times f_c$  的功。这样, 按先加单位力  $F_0$ , 后加载荷组  $F_1, F_2, \dots, F_n$  的次序加载, 梁内储存的变形能为

$$U_1 = U_0 + U + 1 \times f_c \quad (12-9c)$$

在  $F_0$  和  $F_1, F_2, \dots, F_n$  共同作用下, 梁横截面上的弯矩应为

$$M_1(x) = M(x) + M_0(x)$$

梁这时所储存的变形能, 又可直接表示为

$$U_1 = \int_l \frac{[M_1(x)]^2}{2EI} dx = \int_l \frac{[M(x) + M_0(x)]^2}{2EI} dx \quad (12-9d)$$

式(12-9c)、式(12-9d)应相等, 即

$$U_0 + U + 1 \times f_c = \int_l \frac{[M(x) + M_0(x)]^2}{2EI} dx \quad (12-9e)$$

从式(12-9c)中减去式(12-9a)、式(12-9b)得

$$1 \times f_c = \int_l \frac{M(x)M_0(x)}{EI} dx \quad (12-9f)$$

将式(12-9f)两边除以单位力 1, 得挠度  $f_c$  的计算公式为

$$f_c = \int_l \frac{M(x)M_0(x)}{EI} dx \quad (12-9g)$$

如果需要计算梁上某截面的转角  $\theta$  时, 则在该截面处加一单位力偶, 然后按照上述相同的步骤推导, 即可得转角的表达式为

$$\theta = \int_l \frac{M(x)M_0(x)}{EI} dx \quad (12-9h)$$

式中的  $M_0(x)$  为梁在单位力偶作用下的弯矩。 $M(x)$  仍为载荷组  $F_1, F_2, \dots, F_n$  作用下梁的弯矩。

综上所述, 可将计算挠度、转角的公式, 写成统一的形式

$$\Delta = \int_l \frac{M(x)M_0(x)}{EI} dx \quad (12-10)$$

式中  $\Delta$  为待求的广义位移;  $M_0(x)$  为与广义位移相应的广义单位力引起的弯矩。一般称式(12-10)为莫尔积分。由于这种方法必须沿欲求位移的方向加广义单位力(单位载荷), 故一般称为单位载荷法(或单位力法)。从式(12-9f)可以看出, 如果从式(12-10)求出的位移为正值, 即表明单位力作正功, 也就表示位移的方向与单位力的方向一致。反之, 所求位移的方向与单位力的方向相反。

横截面高度远小于杆轴线曲率半径的平面曲杆, 其应力分布近于直梁, 初曲率对变形的影响, 可忽略不计。因此, 只要把式(12-10)中的积分变量  $x$  改写为曲杆轴线弧长  $s$ , 就可用