

高等学校教学用书



微积分学續篇

尼·阿·福罗洛夫著

人民教育出版社

高等学校教学用书



微积分学續篇

尼·阿·福罗洛夫著

叶乃膺译

本书是根据俄罗斯苏维埃联邦社会主义共和国教育部教科书出版社 (Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР) 出版的, 尼古拉·阿德利安路维奇·福罗洛夫 Николай Адрианович Фролов 著“数学分析教程第二册” (Курс математического анализа, ч. 2) 1959 年版译出的, 原书是福罗洛夫著“微积分学”(中译本原高等教育出版社 1958 年初版) 的续篇, 为使读者不致误会起见, 中译本改名为“微积分学续篇”。本书经俄罗斯苏维埃联邦社会主义共和国教育部审定为师范学院物理数学系教学参考书。

本书共分三篇, 内容计有级数、多元函数、微积分学、微分方程。

微 积 分 学 续 篇

尼·阿·福罗洛夫 著

叶乃脍 译

人民教育出版社出版 高等学校数学用书编辑组
北京宣武门内承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业许可出字第2号)

北京外文印刷厂印装

新华书店科技发行所发行

各地新华书店经售

统一书号: 13010·906 开本 850×1168 1/32 印张 104 1/16

字数 26,900 印数 00001—10,000 定价 (6) ¥1.00

1961年11月第1版 1961年11月北京第1次印刷

序

本书是适用于师范学院物理数学系学生的教学参考书。在本书中讲述了“数学”专业的数学分析教学大纲中没有编入我过去出版的“微积分学”一书内的那些部分。

承柯罗夫金(П. П. Коровкин)教授不吝指正,对本书的编写工作惠助良多。又承魏因贝格(М. М. Вайнберг)教授在他对拙稿的评论中提出了许多宝贵的意见。我借此机会向柯罗夫金与魏因贝格二位深致衷心的谢意。

尼·福罗洛夫

1958年8月25日于莫斯科

目 录

序.....	v
--------	---

第一篇 级数

第一章 常数项级数.....	1
----------------	---

§1. 基本概念(1) §2. 收敛的必要与充分条件(5) §3. 绝对收敛与条件收敛(7) §4. 级数收敛性的积分检验法(14) §5. 级数项的重排(19)

第二章 函数项级数.....	29
----------------	----

§1. 函数项级数的收敛域及均匀收敛性(26) §2. 函数项级数和的连续性(29) §3. 函数项级数的积分法(30) §4. 函数项级数的微分法(33)

第三章 幂级数.....	35
--------------	----

§1. 收敛区间(35) §2. 幂级数的均匀收敛性(38) §3. 幂级数的微分法(39) §4. 台劳级数(42) §5. 对数的计算(50) §6. 二项式展开(53) §7. 展开 $\arcsin x$ 成级数(59) §8. 用级数计算积分(61)

第二篇 多元函数

第一章 多元函数的微分法.....	63
-------------------	----

§1. 基本概念(63) §2. 偏导数(69) §3. 全微分(72) §4. 复合函数的导数(77) §5. 复合函数的微分(81) §6. 切平面(83) §7. 高阶偏导数(88) §8. 高阶微分(93) §9. 台劳公式(96) §10. 隐函数(99) §11. 多元函数的极大值与极小值(107) §12. 条件极值(115)

第二章 重积分	119
----------------	-----

§1. 引出二重积分的问题(119) §2. 可求积图形的概念(121) §3. 二重积分的定义(129) §4. 二重积分的性质(131) §5. 二重积分的存在(134) §6. 二重积分的计算法(142) §7. 二重积分中的变数置

換法(152) § 8. 极坐标中的二重积分(156) § 9. 三重积分(160)

§ 10. 在柱面坐标与球面坐标中三重积分的计算法(165)

第三章 二重积分及三重积分的应用171

§ 1. 立体的体积与平面图形面积的计算(171) § 2. 曲面的面积(176)

§ 3. 平面图形的惯性矩及重心(180) § 4. 曲面的惯性矩及重心(185)

§ 5. 立体的惯性矩及重心(190)

第四章 曲线积分194

§ 1. 力场之功的问题(194) § 2. 曲线积分的概念(196) § 3. 曲线积

分的存在及其性质(197) § 4. 格林公式(204) § 5. 平面图形的面积(203)

§ 6. 曲线积分与积分路径形状无关的条件(209) § 7. 全微分的条件(214)

§ 8. 曲线积分作为微分的逆运算(218) § 9. 势场(220)

第三篇 微分方程

基本概念(222)

第一章 可用积分法求解的一阶微分方程227

§ 1. 全微分方程(227) § 2. 可分离变量的方程(230) § 3. 齐次方程(234)

§ 4. 可化成齐次的方程(238) § 5. 线性方程(242) § 6. 伯努利方
程(245)

第二章 存在性及唯一性定理247

§ 1. 方向场(247) § 2. 欧拉法(248) § 3. 用逐次逼近法证明存在性
与唯一性定理(250)

第三章 未就导数解出的方程259

§ 1. 已就一个变数解出的方程(259) § 2. 克雷罗方程(269) § 3. 奇
异解(271) § 4. 轨线问题(279)

第四章 高阶方程282

§ 1. 存在性与唯一性定理(282) § 2. 可降阶方程的几种类型(284)

第五章 高阶线性微分方程294

§ 1. 定义·线性微分算子的性质(294) § 2. 齐次线性方程的性质(297)

§ 3. 一般解·基本组·朗斯基行列式(297) § 4. 函数为线性无关的概念(300) § 5. 齐次线性方程的解为线性无关的条件(302) § 6. 奥斯特罗格拉茨基公式(305) § 7. 非齐次线性方程(307) § 8. 任意常
数变易法(310)

第六章 常系数线性方程313

§ 1. 常系数齐次线性方程(313) § 2. 常系数非齐次线性方程(328)

§ 3. 共振(332)

第一篇 級数

第一章 常数項級数

§ 1. 基本概念

在初等数学中我們就已經学过无穷多个数的求和法。我們曾經就几何数貫

$$u, uq, uq^2, \dots, uq^{n-1}, \dots,$$

提出过求它的所有諸項之和的問題。但是，在这里按通常意义求和已經是不可能的了，因为有无穷多項的緣故，于是我們必須首先約定：當我們把加法施于无穷多个数的时候，和的意义应如何理解。

在初等数学中我們遵循了下述十分合理的途徑来解决几何数貫之和的問題。

我們首先取出数貫的第一項来，加上第二項，再加上数貫的第三項，以下类推，然后注意：随着項数的增加，部分和 S_n ——数貫前 n 項之和——如何变化；若当項数 n 无限增加时，部分和 S_n 趋于有限的极限，則我們就把这极限当作数貫所有諸項的和。

因为就所給数貫來說，只要 $q \neq 1$ ，則有

$$S_n = u + uq + \dots + uq^{n-1},$$

$$S_n q = uq + uq^2 + \dots + uq^n,$$

$$S_n - S_n q = u - uq^n,$$

$$S_n = \frac{u(1 - q^n)}{1 - q},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{u}{1-q}, & \text{当 } |q| < 1 \text{ 时,} \\ \infty, & \text{当 } |q| > 1 \text{ ④ 时.} \end{cases}$$

若 $q=1$, 則所給数貫的諸項全都等于 u ③; 在这种情形下, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $S_n = nu \rightarrow \infty$, 如果 $q=-1$ 的話, 那么, 显而易见, $S_{2k-1}=u$, $S_{2k}=0$ ($k=1, 2, \dots$), 因而当 $n \rightarrow \infty$ 时部分和 S_n 不仅沒有有限的极限; 而且連无限的极限也沒有。

因此, 只有在数貫的公比 q 适合条件 $|q| < 1$ 时, 也就是当几何数貫为递减⑤的时候, 所給数貫所有諸項 (按我們所采用的意义) 才有和之可言。在这种情形下, 我們有

$$\frac{u}{1-q} = u + uq + \dots + uq^{n-1} + \dots$$

无穷几何数貫的諸項构成某种序列。因此, 只要在一般情形下也象在几何数貫的情形完全一样地引进和的概念, 那么就以几何数貫諸項的求和法作为去求任意序列諸項之和的一般方法是很自然的。由于这样的推广, 我們便导出常数項級数的概念以及有关的其他概念。

設我們有数列:

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

只要用加号把所給数列的諸項依次联结起来, 我們就得到式子

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (1)$$

这个式子称为常数項級数。

諸数 $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ 称为級数的項, u_n 称为級数的一般項。

級数前 n 項的和称为級数的第 n 部分和, 記作 S_n :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

③ 而 $u \neq 0$ 。——譯者。

⑤ 按絕對值來說——譯者。

若当 n 无限增加时, 級数(1)的部分和 S_n 存在有限的极限, 則級数(1)称为收敛的, 而数值

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

称为級数的和, 并且写成

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

如果当 $n \rightarrow \infty$ 时, S_n 沒有有限的极限, 則級数(1)称为发散的。

几何数貫:

$$u + uq + uq^2 + \cdots + uq^{n-1} + \cdots$$

可以作为常数項級数的例子。

因为在这里

$$S_n = u + uq + \cdots + uq^{n-1},$$

所以只須 $q \neq 1$, 則有

$$S_n = \frac{u(1-q^n)}{1-q}.$$

由此可見, 若 $|q| < 1$, 則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{u}{1-q},$$

这就意味着所給的几何数貫是收敛級数; 若 $|q| > 1$, 則

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$$

(設数貫中 $u \neq 0$); 当 $q = -1$ 时,

$$S_{2k-1} = u, S_{2k} = 0, k = 1, 2, \cdots,$$

从而 S_n 沒有极限; 因此, 当 $|q| > 1$ 或 $q = -1$ 时, 几何数貫是发散級数。

最后, 若 $q = 1$, 則所給数貫为

$$u + u + \cdots + u + \cdots$$

也是发散級数^①, 因为在这种情形下,

① 設数貫中 $u \neq 0$ —— 譯者。

当 $n \rightarrow \infty$ 时; $S_n = nu \rightarrow \infty$.

由是, 几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} uq^{n-1}$ 当 $|q| < 1$ 时收敛, 而当 $|q| \geq 1$ 时

发散。在 $|q| < 1$ 的情形下, 我们有:

$$\frac{u}{1-q} = u + uq + uq^2 + \cdots + uq^{n-1} + \cdots.$$

二级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1)$$

及

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m} + \cdots \quad (2)$$

要吗就同为收敛, 要吗就同为发散。实际上, 第二级数的部分和 S'_m

恒可表示成第一级数的部分和 S_{n+m} 减去常数 $A = \sum_{k=1}^n u_k$ 的形式,

即

$$S'_m = S_{n+m} - A.$$

由此可见, 当 $m \rightarrow \infty$ 时, 部分和 S'_m 与部分和 S_{n+m} 要吗就同时有极限, 要吗就同时没有极限。

若二级数(1)与(2)都收敛, 则第二级数的和称为第一级数的第 n 余项, 并且记作 R_n :

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots.$$

显而易见, 收敛级数的和恒可表示成

$$S = S_n + R_n$$

的形式。由此可见, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $R_n \rightarrow 0$ 。

利用级数收敛及级数之和的定义以及关于极限的定理, 不难证明下列命题:

1. 若 c 为一常数, 而级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

收敛且其和为 S , 则级数

$$cu_1 + cu_2 + \cdots + cu_n + \cdots$$

也收敛且其和为 cS 。

2. 若二級数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots,$$

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

都收敛, 且其和分别为 U 及 V , 則級数

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \cdots + (u_n \pm v_n) + \cdots$$

也收敛; 且其和为 $U \pm V$ 。

在加法的情形下, 这一断語对于任意有限个收敛級数來說都是成立的。

§ 2. 收敛的必要与充分条件

根据定义, 級数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1)$$

为收敛就是指: 当下标 n 无限增加时, 部分和 S_n 的极限 S 存在, 即部分和所成的序列

$$S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots \quad (2)$$

收敛; 可見級数(1)为收敛的条件就是数列(2)收敛的条件。由数列极限存在的柯西檢驗法, 我們可以說: 要使数列(2)收敛于一个极限, 必須而且只須 对于任一个 $\varepsilon > 0$ 都存在这样的下标 N , 使对所有的 $n > N$ 及 $m > N$ 來說, 不等式

$$|S_m - S_n| < \varepsilon$$

都是成立的。为明确起見, 我們設 $n < m = n + p$ 。于是我們有:

$$S_m - S_n = S_{n+p} - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p},$$

并且这里的 p 可以是任何自然数, 因为 m 与 n 只要都大于 N 就行了, 它們彼此之差却可以随便多少。由是我們得到下述的級数收敛的条件:

要級数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

收斂，必須而且只須：對於任一個 $\varepsilon > 0$ 來說，都存在這樣的下標 N ，使對所有的 $n > N$ 來說，無論自然數 p 是什麼，不等式

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

都是成立的。

这个条件叫做柯西条件或柯西檢驗法。由是，就特殊情形 $p=1$ 而言，可以推知：要級数收斂，就必须對於所有的 $n > N$ ，不等式

$$|u_{n+1}| < \varepsilon$$

都是成立的，也就是說，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

这样一來，我們得出結論：

要級数收斂，就必须當項數 n 无限增加時，級数的一般項趨於

零。

這是級数收斂的必要条件，但不是充分条件。称为調和級数的

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

可为这事的佐証。

在这里，當 $n \rightarrow \infty$ 時 $u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ ；但是可以証明調和級数不滿足柯西条件（柯西条件不仅是收斂性的充分条件，而且也是必要条件），因而不可能是收斂級数。對於這一點，我們指出：

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}.$$

由是可見，若 $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ，而 $p=n$ ，則對於調和級数來說，無論下標 n 如何大，不等式

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} < \varepsilon$$

都是不成立的。因此，在調和級数的情形下，就不是对于每一个 $\varepsilon > 0$ 都可找到如柯西条件中所說的那样的下标 N ，可見調和級数是发散的。

这就証明了：条件

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

乃是級数收斂的必要条件，但不是充分条件。

§ 3. 絕對收斂与条件收斂

我們还要介紹两个概念。

若級数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1)$$

諸項絕對值所成的級数

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots \quad (2)$$

收斂，則級数(1)称为絕對收斂的。

当級数(2)收斂时，級数(1)不可能是发散的，这是因为

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \cdots + |u_{n+p}|,$$

可見，若級数(2)滿足柯西条件，則級数(1)也滿足同样的条件。

这样看来，若級数(2)收斂，則級数(1)也收斂，并且在这种情形下，我們就称之为絕對收斂，以期由此得以強調指出：它之所以收斂是由于一般項的絕對值趋于零相当地快所以致之；而不是有賴于出現了异号諸項，当項数取得相当多的时候，諸項才以某种形式互相抵消，以致使級数的部分和趋于有限的极限。

若級数(1)收斂，但与它对应的級数(2)发散，則称級数(1)为条件收斂的。

在实际上，用柯西檢驗法去判定所給級数是否收斂的問題往往是很困难的。因此，重要的是，在研究級数时必须要有的一些便于

使用的判別收斂及發散的充分條件。下面我們來講幾種。

首先我們來照交錯級數，也就是其中任何相鄰兩項符號都相反的級數。

萊布尼茲定理 若當 $n \rightarrow \infty$ 時交錯級數第 n 項的絕對值單調地趨於零，則這級數至少必為條件收斂級數。

証 設所給的交錯級數

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots \quad (3)$$

滿足條件

$$u_1 > u_2 > \cdots > u_n > \cdots$$

及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

我們來看這級數的具有偶數指標的部分和所成的序列 $\{S_{2k}\}$ 。

由關係式

$$S_{2k} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2k-1} - u_{2k}) \quad (4)$$

可見序列 $\{S_{2k}\}$ 是遞增的，因為依題設對於所有的 n 來說都有 $u_n > u_{n+1}$ ，所以在(4)的右邊所有的差全是正的。

但同時

$$S_{2k} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2k-2} - u_{2k-1}) - u_{2k}, \quad (4)$$

由此可見，序列 $\{S_{2k}\}$ 是上有界的，即對所有的 k ，都有

$$S_{2k} < u_1.$$

因而 $\{S_{2k}\}$ 是上有界的增序列，所以存在極限：

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = S.$$

因為

$$S_{2k+1} = S_{2k} + u_{2k+1},$$

由題設

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_{2k+1} = 0,$$

所以我們有：

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = S.$$

因此，

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

而這就意味着所給級數(3)是收斂的。

至于由級数(3)諸項的絕對值所組成的級数,在所給条件下則可能是收斂的,也可能是發散的。因此,萊布尼茲定理只提供了級数为条件收斂的充分条件,却没有解决所給級数是不是絕對收斂的問題。

例如,几何級数

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots$$

滿足萊布尼茲定理,并且显然是絕對收斂的;但称为萊布尼茲級数的級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

虽然也滿足萊布尼茲定理,可是它却仅仅是条件收斂的,因为由它的諸項絕對值所組成的級数是調和級数——是發散的。

最后,我們指出:若用級数(3)的部分和来代替这級数的和,則所产生的誤差的絕對值必小于被抹掉級数第一項的絕對值。

实际上,对于級数(3),我們有:

$$\begin{aligned} |S - S_n| &= |u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \dots| = \\ &= |u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - \dots| < u_{n+1}. \end{aligned}$$

下述法則告訴我們檢驗級数的絕對收斂性,特別是檢驗正項級数的收斂性的方法。

級数比較法則 設有两个正項級数:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (u)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots, \quad (v)$$

对于所有的 n 都有 $u_n \leq v_n$, 則由級数(v)的收斂性可推知級数(u)的收斂性,而由級数(u)的發散性可推知級数(v)的發散性。

实际上,設級数(v)收斂,則它滿足柯西条件。但因

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p} \leq v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+p},$$

可見級数(u)也滿足柯西条件,因而收斂。

若級数(u)發散,則級数(v)也必發散。因为要是不然,假若級

数(v)收敛的话,则据所已证明的道理可知级数(u)也将是收敛的,那就与假设矛盾了。

注意:上述法则可以改成从某项起(譬如从第 n_0 项起)满足条件 $u_n < v_n$ 就行了。因为在讨论级数的收敛性或发散性的问题上,级数的有限多项不起什么作用,因而当 $n < n_0$ 时不必一定要满足条件 $u_n \leq v_n$ 。

我们再来瞧瞧级数的两个收敛检验法,它们都是基于与几何数贯相比较而来的。

达朗贝尔检验法 我们先证明下述断语。

设级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \quad (1)$$

从某一项(第 n_0 项)起所有诸项都满足条件:

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < q < 1, \quad (5)$$

则级数(1)必绝对收敛。

实际上,由条件(5)我们有:

$$\left| \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \right| < q, \left| \frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}} \right| < q, \dots, \left| \frac{u_{n_0+m}}{u_{n_0+m-1}} \right| < q, \dots$$

由此即得

$$|u_{n_0+1}| < |u_{n_0}|q, |u_{n_0+2}| < |u_{n_0}|q^2, \dots, |u_{n_0+m}| < |u_{n_0}|q^m, \dots \quad (6)$$

因为级数

$$|u_{n_0}|q + |u_{n_0}|q^2 + \cdots + |u_{n_0}|q^m + \cdots$$

是几何数贯,它的公比 q 适合 $0 < q < 1$, 所以是收敛级数,因此,由级数比较法则与诸不等式(6)可知级数

$$|u_{n_0+1}| + |u_{n_0+2}| + \cdots + |u_{n_0+m}| + \cdots \quad (7)$$

也必收敛。由此也推知级数

$$|u_1| + |u_2| + \cdots + |u_n| + \cdots \quad (2)$$

收斂,因为級数(7)乃是級数(2)的余項之故。可是級数(2)收斂就意味着所給級数(1)絕對收斂。

注意:若对于級数(1)來說,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = k < 1,$$

則級数(1)滿足条件(5),因而級数(1)絕對收斂。

实际上,若我們取定适合条件 $k < q < 1$ 的某一数 q , 則因当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow k < q$ 之故, 所以当 n_0 充分大时, 对于所有的 $n \geq n_0$ 來說, 不等式

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < q$$

都是成立的。

如果对于級数(1)來說, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = k > 1,$$

則当 n_0 充分大时, 对于所有的 $n > n_0$ 來說, 不等式

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$$

都是成立的, 也就是說

$$|u_{n+1}| > |u_n|,$$

由此可見, 当 $n \rightarrow \infty$ 时 u_n 不趋于零, 即級数(1)不滿足收斂的必要条件, 从而是发散的。

若对于級数(1)來說,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1,$$

則級数(1)可能是收斂的, 也可能是发散的。例如: 对于調和級数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 來說, 显然 $k=1$; 我們知道, 調和級数是发散級数。可是, 对