实变与泛函

厉则治 编著

南强丛书

NANQIANG CONGSHU

XIAMEN DAXUE CHUBANSHE

实 变 与 泛 函

厉则治 编著
厦门大学出版社
一九九〇年·厦门

“南强”丛书
实变与泛函
厉则治 编著
*
厦门大学出版社出版发行
福建第二新华印 • 厂印刷
*
开本 787×1092 1/16 17. 4插页 425千字
1991年1月 第1版 月 第1次印刷

“南强丛书”序

厦门大学是爱国华侨领袖陈嘉庚先生于1921年4月6日创办的，到明年将有70年的历史。为了庆贺这个光辉节日，在海内外校友的倡导和支持下，我们编辑出版了这套“南强丛书”。

厦门大学创办伊始，就明确宣告：“本大学之目的，在博集东西各国之学术及其精神，以研究一切现象之底蕴与功用，同时并阐发中国固有学艺之美质，使之融合贯通，成为一种完善之文化。”厦大校歌则反复咏唱：“吁嗟乎南方之强”。几十年来，厦门大学师生弘扬“南强”精神，为实现自己的办学宗旨和追求自己的理想目标，做出了可贵的努力和贡献，培养造就了一批卓有成就的学者专家，编写出版了许多引人注目的优秀教材和学术专著，丰富了我国文化宝库。特别是新的社会主义历史时期，厦门大学满园春色，欣欣向荣，人才辈出，成果丰盈。以历史的眼光，选萃集成我校学者专家的优秀之作，出版一套以教材、专著为主的“南强丛书”，这是具有深远意义的文化积累工作，也是对建校70周年大庆的最好纪念。

“南强丛书”的出版，是我校发展史上的一件盛事，引起了广泛的关注和强烈的反响。首次征稿，各系、所踊跃推荐，参评的优秀书稿达50多部。经“南强丛书”编审委员会认真评选，首批入选的书稿有15部。这些著作涉及自然科学和社会科学各个主要学科，都是作者多年潜心研究的重要成果，其中既有久负盛名的老一辈学者专家花了心血的力作，又有后起之秀富有开拓性的佳作，还有已故著名教授的遗作。虽然数量有限，门类不全，但在某种程度上仍可以体现我校的教学、科研特色和学术水平。

出版“南强丛书”，是一项长期性的重大工程，需要各方面的热情支持和密切合作。今后，我们将根据本丛书的出版宗旨和具体条件，成熟一批，出版一批，以求更全面更系统地展示我校教学、科研的丰硕成果。

由于时间匆促和我们的水平有限，评选工作和编辑出版工作遗漏、错误在所难免，衷心希望校友和作者、读者给予指正。

最后，我们谨向资助出版本丛书的厦门大学旅港校友会前理事长黄克立先生致以衷心感谢！

厦门大学副校长
“南强丛书”编审委员会主任　郑学檬

1990年9月15日

前　言

现在有关《实变与泛函》的教科书，考虑到学生的接受能力，内容多注重一维空间的材料。现实情况是，学生一出校门或者一到四年级，却总要处理高维空间的问题：如概率论、数理统计、偏微分方程等选修课程，以及科研训练中的文献阅读. 学到的学问总是不能满足客观的需要，这是一条客观规律，但努力克服二者的差距也应该是人类进步的动力. 这本书想作一个尝试，把重点转到训练处理高维空间问题的技巧上来. 但处理高维空间远不如处理一般距离空间来得干脆利索，所以这本书的第二章就讨论距离空间.

在第三章里，一般的测度、一维空间的 *Lebesgue* 测度及高维空间的 *Lebesgue-Stieltjes* 测度是同时出来的. 这段内容在大多数中外著作中往往分成四次重复讲，而实际上只讲一维空间中的 *Lebesgue* 测度，高维空间的特殊性和 *Lebesgue-Stieltjes* 测度的难点都没有反映出来. 我们这样处理，难度增加了，但时间节省了. 本书已在数学系讲过十多次，学生还是可以接受的. 讲可测函数时特别紧凑的另一个原因是：对何时出现“几乎处处”，如何处理∞值都作过精心的考虑.

第四章是积分，用简单函数的积分来逼近作为定义，这样既直观又利索. 有界函数与无界函数，关于有限测度与无限测度的积分是一起出来的. 充分利用不定积分的 σ 可加性也是这部分材料大为简化的一个重要原因. 这一章里还讲了 *Radon-Nikodym* 定理，这不仅因为它本身在测度论中是第一重要的定理，也不仅因为它在概率论中起着极为重要的作用，而是因为用它来建立关于复测度的积分是很利索的，用它来证明单调函数的几乎处处可微性也是很经济的.

第一章有关势论部分也采用了不同的方法. 把体与 σ 体这一节放在 *Zorn* 引理之前，希望学生读后一节时容易些. 还讲了实数理论，重点放在允许取∞值的上、下界与上、下限上.

以上是实变课程比较完善的内容，一个学期 20 个星期，每星期五节课的情况适用. 其中分三个档次，最低的档次每星期五节课，每学期 16 周的情况适用，在这种情况下，可略去带有 * 的章节，只需假定学生已经知道 n 维欧氏空间上的有限覆盖定理. 对单调函数的可微性则略而不证.

第五章讨论 *Banach* 空间上的算子与泛函. 包括 *Hahn-Banach* 泛函延拓定理、连续函数全体所成的 *Banach* 空间上的泛函表现定理，以及通常称为泛函中的三大支柱. 这一章最后一节讲了算子的谱.

最后一章讲 *Hilbert* 空间. 前二节讨论正交系与共轭算子，后三节讨论算子的谱分解.

此书在厦门大学数学系讲授过十多次，许多师生和进修教师提出了宝贵的修改意见，特别是邱曙熙同志为本书作了索引与习题解答. 在此向他们致谢.

厉则治

1990 年国庆

目 录

第一章　集　论

§1　集的运算

集就是具有特定性质的一类东西，每个东西都叫做这个集的元素. 若 x 是集 A 的元素，就记作 $x\in A$，若 x 不是 A 的元素，就记作 $x\overline{\in}A$.

例 1　自然数全体成一集记为 N，记作 $N=\{1,2,\cdots\}$ 或 $N=\{n;n$ 是自然数$\}$. 这时 $3\in N$ 而 $\frac{1}{2}\overline{\in}N$.

例 2　平面上座标为自然数的点的全体成一集记为 L、或记为 $L=\{(m,n);m,n\in N\}$. 这时点 $(1,2)\in L$，$1\overline{\in}L$，$(0,2)\overline{\in}L$.

设 A、B 是二个集，若 A 的每个元素都是 B 的元素，A 就叫做 B 的子集，记为 $A\subset B$. 若 $A\subset B$，$B\subset C$，那么 $A\subset C$. 不含元素的集叫做空集，记为$\varnothing$. 对任何集 A，$\varnothing\subset A$. 若 A 不是 B 的子集，就记作 $A\not\subset B$. 若 $A\subset B$，$B\subset A$ 同时成立，称为 A 等于 B，记作 $A=B$. 若 $A\subset B$，但 $B\not\subset A$，则称 A 是 B 的真子集. 记号 $A\subset B$ 也可写作 $B\supset A$. $A=B$ 不成立时也可写成 $A\neq B$.

例 3　设 $A\triangleq\{r;r$ 是方程 $x^2=1$ 的根$\}$，$B\triangleq\{1,-1\}$，这里$\triangleq$表示它的一边用另一边定义. 那么 $A=B$. 例 1 例 2 中的等号应改用$\triangleq$方合理.

例 4　设 $a<b$ 是二个实数，那么 $(a,b)\triangleq\{x;x$ 实数，$a<x<b\}$ 是一个集，就是通常的有限开区间. 直线上有限开区间全体也成一个集 $\mathscr{M}$，开区间 $(0,1)\in\mathscr{M}$，但 $\frac{1}{2}\overline{\in}\mathscr{M}$. 讨论到以集为元素的集时，常把这种集改称为集类、集族等等而用花写字母表示之.

设 Λ 是一个集，对 Λ 中每个元素 λ 都已指定唯一一个集 A_λ 与之对应，Λ 常称为参数集. $\{A_\lambda;\lambda\in\Lambda\}$ 是一个以集为元素的集. 集

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\triangleq\{x;x\in A_\lambda(\forall\lambda\in\Lambda)\}$$

叫做集族 $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 的交，它是 $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 的公共元素全体所成的集. 若 $\Lambda=\{1,2,\cdots,n\}$ 或 $\Lambda=\{1,2,\cdots\}$，这时对应的交集改记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$、$\bigcap_{\lambda=1}^{n}A_\lambda$ 或 $A_1\cap A_2\cap\cdots$、$\bigcap_{\lambda=1}^{\infty}A_\lambda$. 若 $A_1\cap A_2=\varnothing$，则称 A_1 与 A_2 不交. 若 $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 中任二集都不交，则称 $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 为二二不交.

例 5　半开区间 $[0,\lambda)(\lambda\in(0,\infty))$ 的全体有且仅有一个公共元素 0，即 $\bigcap_{\lambda\in(0,\infty)}[0,\lambda)=\{0\}$.

证 设 $x\in\bigcap_{\lambda\in(0,\infty)}[0,\lambda)$，则每个正数 λ 使 $x\in[0,\lambda)$。取 $\lambda=\frac{1}{n}$ 得

$$0\leqslant x<\frac{1}{n},n=1,2,\cdots$$

$$0\leqslant x\leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

$$x=0\in\{0\}.$$

按子集的定义 $\bigcap_{\lambda\in(0,\infty)}[0,\lambda)\subset\{0\}$. 现在要证与上式相反的关系式. 设 $x\in\{0\}$，即 $x=0$，那么对每个正数 λ，$0\in[0,\lambda)$，所以 $0\in\bigcap_{\lambda\in(0,\infty)}[0,\lambda)$，按子集的定义 $\{0\}\subset\bigcap_{\lambda\in(0,\infty)}[0,\lambda)$. 证毕.

设 Λ 是一个参数集，对每个 $\lambda\in\Lambda$ 皆已指定唯一一个集 A_λ 与之对应. 集

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\triangleq\{x;\Lambda\text{ 中有某个 }\lambda\text{ 使 }x\in A_\lambda\}$$

就叫做集族 $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 的并，它是以所有 $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 的元素为元素的集. 若 $\Lambda=\{1,2,\cdots,n\}$ 或 $\Lambda=\{1,2,\cdots\}$ 时，并的记号顺次改用 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$、$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$、$A_1\cup A_2\cup\cdots$. 例如 $\{1,2\}\cup\{2,3\}=\{1,2,3\}$.

例 6 $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-1,n]=(0,\infty)$.

证 设 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-1,n]$，那么有自然数 n 使 $n-1<x\leqslant n$，所以 $x\in(0,\infty)$. 按子集的定义得 $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-1,n]\subset(0,\infty)$. 再设 $x\in(0,\infty)$，则有自然数 $m\geqslant x$. 取 n 为自然数集 $\{m;m$ 自然数，$m\geqslant x\}$ 中的最小数，即取

$$n\triangleq\bigwedge\{m;m\text{ 自然},m\geqslant x\},$$

那么 $n-1<x\leqslant n$. 按并的定义得 $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-1,n]$. 这就证明了 $\bigcup_{n=1}^{\infty}(n-1,n]\supset(0,\infty)$. 证毕.

定理一 设 B、C、D 是集，Λ 是参数集，对每个 $\lambda\in\Lambda$ 都已指定唯一一个集 A_λ 与之对应，则有

(一)吸收律 若 $B\subset C$，那么 $B\cap C=B$，$B\cup C=C$.

(二)单调性 若 $B\subset C$，那么 $B\cap D\subset C\cap D$，$B\cup D\subset C\cup D$.

(三)交换律 $B\cap C=C\cap B$，$B\cup C=C\cup B$.

(四)组合律 $(B\cap C)\cap D=B\cap(C\cap D)$，$(B\cup C)\cup D=B\cup(C\cup D)$.

(五)分配律 $B\cap\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(B\cap A_\lambda)$，$B\cup\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(B\cup A_\lambda)$.

(六)$B\cup C\supset B$，$B\supset B\cap C$.

(七)若 $A_\lambda\subset B(\forall\lambda\in\Lambda)$，则 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\subset B$. 若 $A_\lambda\supset B(\forall\lambda\in\Lambda)$，则 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\supset B$.

证 (一)$B\cap C=\{x;x\in B,x\in C\}=\{x;x\in B\}=B$,

$B\cup C=\{x;x\in B$ 或 $x\in C\}=\{x;x\in C\}=C$.

上两式中间的等式都用了条件 $B\subset C$.

(二)，(三)，(六)，(七)都是明显的.

(四)只证第一式：

$$\begin{aligned}(B\cap C)\cap D &= \{x;x\in B\cap C, x\in D\}\\ &= \{x;x\in B, x\in C, x\in D\}\\ &= \{x;x\in B, x\in C\cap D\}\\ &= B\cap(C\cap D).\end{aligned}$$

(五)只证第二式：

$$\begin{aligned}B\cup\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda &= \{x;x\in B \text{ 或 } x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\}\\ &= \{x;x\in B \text{ 或 } x\in A_\lambda(\forall\lambda\in\Lambda)\}\\ &= \{x;x\in(B\cup A_\lambda)(\forall\lambda\in\Lambda)\}\\ &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(B\cup A_\lambda).\end{aligned}$$

定理证毕.

设 A、B 是二个集，集

$$A-B\triangleq\{x;x\in A, x\,\overline{\in}\,B\}$$

叫做 A 减去 B 的差. 例如$\{1,2\}-\{2,3\}=\{1\}$. 关于“差”的运算也可导出许多恒等式，但我们不这样做，因为利用下面定理二(五)转化为求余集的运算较为方便.

在讨论一个具体的问题时，常存在着一个集 X，问题中出现的元素与集都是 X 的元素与子集. 这时差集 $X-A$ 就叫做 A 的余集记作 A^c. $x\in A^c$ 可简单地理解为 x 不在 A 中. 如怕引起误会，则须讲明关于那个集求余集.

定理二 设 B、C 都是 X 的子集，Λ 是一个参数集，对每个 $\lambda\in\Lambda$ 都已指定唯一的 X 的子集 A_λ 与之对应，那么

(一)$X^c=\varnothing$，$\varnothing^c=X$，

(二)$B\cup B^c=X$，$B\cap B^c=\varnothing$，

(三)$(B^c)^c=B$，

(四) 当 $B\supset C$ 时，$B^c\subset C^c$，

(五)$B-C=B\cap C^c$，

(六)对偶原理 $(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c$，$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c$. 即 $A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$交的余集等于 A_λ 的余集$(\lambda\in\Lambda)$之并，$A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$并的余集等于 A_λ 的余集$(\lambda\in\Lambda)$之交.

证 (一)、(二)、(四)是明显的.

(三)$(B^c)^c=\{x;x\,\overline{\in}\,B^c\}=\{x;x\in B\}=B$.

(五)$$\begin{aligned}B-C &= \{x;x\in B, x\,\overline{\in}\,C\}\\ &= \{x;x\in B, x\in C^c\}\\ &= B\cap C^c.\end{aligned}$$

(六)先证第一式：

$$
\begin{aligned}
(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^c &= \{x; x \overline{\in} \bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\} = \{x; \Lambda\text{ 中有某个 }\lambda\text{ 使 }x \overline{\in} A_\lambda\} \\
&= \{x; \Lambda\text{ 中有某个 }\lambda\text{ 使 }x \in A_\lambda^c\} \\
&= \bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c.
\end{aligned}
$$

用第一式及(三)证第二式：

$$(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)^c = (\bigcup_{\lambda\in\Lambda}[A_\lambda^c]^c)^c = ([\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c]^c)^c = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda^c.$$

证毕.

集的运算中,“并”与“交”是对称的. 如定理一每一款的二个关系式,用对偶原理就可从一个推出另一个.

例 7 证明 $(A-B)-C=A-(B\cup C)$

证 关于 $X\triangleq A\cup B\cup C$ 取余集,则

$$
\begin{aligned}
(A-B)-C &= (A\cap B^c)\cap C^c = A\cap(B^c\cap C^c) \\
&= A\cap(B\cup C)^c = A-(B\cup C).
\end{aligned}
$$

在定义集列的上下限之前,请读者注意一件事:在自然数全体中除去一个无限集,留下的仍旧可能是一个无限集. 例如自然数全体中除去一个无限集——偶数全体,留下的是奇数全体,仍为一个无限集.

设 $A_n(n=1,2,\cdots)$ 是已给的集列,那么集

$$
\begin{aligned}
&\overline{lim}A_n \triangleq \{x; \text{无限多个 } n \text{ 使 } x\in A_n\}, \\
&\underline{lim}A_n \triangleq \{x; \text{只有有限多个 } n \text{ 使 } x \overline{\in} A_n\}
\end{aligned}
$$

顺次叫做集列 A_n 的上限集与下限集. 显然 $\overline{lim}A_n\supset\underline{lim}A_n$,若 $\overline{lim}A_n=\underline{lim}A_n$,这个集叫做集列 A_n 的极限集,记作 $lim A_n$.

例 8 设 $A_n\triangleq\{x; x\text{ 实数}, x^n\geqslant 1\}$,那么

$$
\begin{aligned}
&\overline{lim}A_n = (-\infty,-1]\cup[1,\infty) \\
&\underline{lim}A_n = [1,\infty).
\end{aligned}
$$

证 (Ⅰ)当 $x\in[1,\infty)$ 时,$x^n\geqslant 1$ 所以 $x\in A_n(n=1,2,\cdots)$. (Ⅱ)当 $x\in(-1,1)$ 时,$x^n<1$,所以 $x\overline{\in}A_n(n=1,2,\cdots)$. (Ⅲ)当 $x\in(-\infty,-1]$ 时,$x^{2n}\geqslant 1$,$x^{2n-1}<1$,所以 $x\in A_{2n}$,$x\overline{\in}A_{2n-1}(n=1,2,\cdots)$. 综合(Ⅰ)、(Ⅱ)、(Ⅲ)及上限集与下限集的定义,结论得证.

定理三 设 $A_n(n=1,2,\cdots)$ 是一列集,那么关于 $X(\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)$ 取余集时,

$$\underline{\lim} A_n^c = (\overline{\lim} A_n)^c,$$

$$\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m,$$

$$\overline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

若 $A_n \uparrow$，即 A_n 为不减列：$A_1 \subset A_2 \subset \cdots\cdots$，那么 $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

若 $A_n \uparrow$，即 A_n 为不增列：$A_1 \supset A_2 \supset \cdots\cdots$，那么 $\lim A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

不减集列，不增集列总称为单调集列.

证 先证第一式：

$$\begin{aligned}\underline{\lim} A_n^c &= \{x;\text{只有有限个自然数 } n \text{ 使 } x \notin A_n^c\} \\ &= \{x;\text{只有有限个自然数 } n \text{ 使 } x \in A_n\} \\ &= \{x; x \notin \overline{\lim} A_n\} = (\overline{\lim} A_n)^c\end{aligned}$$

第一式得证.

再证第二式. 设 $x \in \underline{\lim} A_n$. 若无 m 使 $x \notin A_m$，则 $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$，所以 $x \in$ 右边. 若有 m 使 $x \notin A_m$，取 $k \triangleq \vee\{m; m \text{ 为自然数}, x \notin A_m\}$，即取 k 为有限集 $\{m; m \text{ 为自然数}, x \notin A_m\}$ 的最大元素，那么 $x \in \bigcap_{m=k+1}^{\infty} A_m$，所以 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$.

再设 $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$，那么有自然数 k 使 $x \in \bigcap_{m=k}^{\infty} A_m$，即集列 A_n 中至多只有有限个 $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$ 不以 x 为元素，所以 $x \in \underline{\lim} A_n$. 这就证明了第二式.

由第一、二式及对偶原理即得第三式. 若 $A_n \uparrow$，由吸收律知

$$\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = A_n, \quad \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

代入第二、三式即得 $\underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \overline{\lim} A_n$，第四式得证. 由第一、四式及对偶原理即得第五式. 定理证毕.

方程式 $x^2 + 1 = 0$ 没有实根，可以说成集 $\{x; x \text{ 为实数}, x^2 + 1 = 0\}$ 为空集. 初学的读者对这种说法也许会感到不自然，但以后的确会遇到这样的说法. 读者会逐渐领会到，用集的理论来讲清问题是十分可取的. 下面是用集来叙述问题的一个例子.

例 9（*Peano* 的自然数公理） 满足下面五个条件的集 N 叫做自然数集，它的元素叫做自然数.

（Ⅰ）$1 \in N$.

（Ⅱ）若 $a \in N$，则有唯一元素 $a + 1 \in N$，叫做 a 的后继元.

（Ⅲ）N 中任一元素不会以 1 为后继元.

（Ⅳ）若 N 中的元素 a、b 使它们的后继元 $a + 1 = b + 1$，那么 $a = b$.

（Ⅴ）若 N 的子集 M 满足下面二条件，则 $N = M$：

$$1 \in M; \qquad \text{若 } a \in M, \text{那么 } a + 1 \in M.$$

请读者注意，数学归纳法来源于上面的性质（Ⅴ）.

习 题

1. 证明区间族$(0,a)(a\in(0,\infty))$没有公共元素.

2. 设$A_n\downarrow$,那么$A_1=[\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n-A_{n+1})]\bigcup[\bigcap_{m=1}^{\infty}A_m]$. 提示必须用例6的技巧.

3. 证明:

(Ⅰ) $A-B=A-A\bigcap B=(A\bigcup B)-B$.

(Ⅱ) $A\bigcap(B-C)=A\bigcap B-C$,

(Ⅲ) $A-(B-C)=(A-B)\bigcup(A\bigcap C)$.

(Ⅳ) $(A-B)\bigcap(C-D)=A\bigcap C-(B\bigcup D)$,

(Ⅴ) $A-(A-B)=A\bigcap B$,

(Ⅵ) $(A\bigcup B)-C=(A-C)\bigcup(B-C)$,

(Ⅶ) $A-(B\bigcup C)=(A-B)\bigcap(A-C)$.

4. 求$(A-B)\bigcup C=A-(B-C)$成立的充要条件.

5. 设$A_n(n=1,2,\cdots)$是一列集,那么$B_1\triangleq A_1,B_n\triangleq A_n-(A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_{n-1})(n=2,3,\cdots)$是二二不交的,且

$$\bigcup_{n=1}^{m}A_n=\bigcup_{n=1}^{m}B_n,m=1,2,\cdots$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n.$$

这题的意思是:一列集之并可表示成一列二二不交集之并.

6. 证明$\underline{lim}(0,1+(-1)^n\frac{1}{n})=(0,1)$,$\overline{lim}(0,1+(-1)^n\frac{1}{n})=(0,1]$.

7. 若$A_n(n=1,2,\cdots)$是二二不交集列,则$\lim\limits_{n}\bigcup_{j=n}^{\infty}A_j=\varnothing$.

8. 若A_n为单调集列,B是集,那么$\lim A_n-B=\lim(A_n-B)$,$B-\lim A_n=\lim(B-A_n)$.

9. 已知a_n为自然数列,求证:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$. 证明:

(一)$a_1<\infty$;

(二)归纳假定$\sum\limits_{n=1}^{m}a_n<\infty$,那么$\sum\limits_{n=1}^{m+1}a_n=\sum\limits_{n=1}^{m}a_n+a_{m+1}<\infty$;

(三)按数学归纳法知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<\infty$.

这个证明对吗? 结论对吗? 如果错的话错在那里?

§2 照 象

X、Y是二个非空集. 照象$f:X\to Y$指的是一种规则:对每个$x\in X$它都指定B中唯一元素y与之对应,记作$x\longmapsto y$. y叫做x的象,记作$f(x)$,而把x叫做y的原象. 所以X中的每个元素x都有象$f(x)$,而且是唯一的. 但Y中的元素y却可以没有原象,也可以有许多原象. 可以说这是§2、§3二节要讨论的中心问题. X叫做f的定义空间,Y叫做f的取值空间. 我们常说$f:X\to Y$是定义于X,取值于Y的照象. Y的子集

$$fX\triangleq\{f(x);x\in X\}$$

叫做 f 的值域. Y 的元素 y 有原象的充要条件是 $y\in fX$. $Y=fX$ 时, f 就叫做填满照象. 经常要检查 f 是不是填满照象, 即对任一 $y\in Y$, 要检查有无 $x\in X$ 使 $f(x)=y$.

例 1　取值空间为一维实数空间 $R=(-\infty,\infty)$ 时, 照象也称函数. x 上定义的最简单的函数是对应于集 $E\subset X$ 的示性函数

$$\begin{aligned} 1_E(x) &= 1, \qquad \text{当 } x\in E \text{ 时}, \\ &= 0, \qquad \text{当 } x\in X-E \text{ 时}. \end{aligned}$$

它的值域 $1_E X=\{0,1\}$ 只有二个元素, 所以不是填满照象. 当 $y\neq 0$、$y\neq 1$ 时, y 无原象. E 中每一点都是 1 的原象, $X-E$ 中每一点都是 0 的原象. 设 E_i 是 X 的子集, a_i 是实数 $(i=1,2,\cdots,n)$, 那么 X 上定义的函数 $\sum_{i=1}^n a_i 1_{E_i}$

$$\left(\sum\nolimits_{i=1}^n a_i 1_{E_i}\right)(x) \triangleq \sum_{i=1}^n a_i 1_{E_i}(x)$$

的值域 $\left(\sum_{i=1}^n a_i 1_{E_i}\right)X$ 是有限个实数: 或为 0, 或为某个 a_i, 或为几个 a_i 之和. 值域为有限集的函数叫做简单函数. 易知当 $E_1,E_2,\cdots E_n$ 二二不交时, $\sum_{i=1}^n 1_{E_i}=1_{\bigcup_{i=1}^n E_i}$.

设 $f: X\to Y$. 对 $B\subset Y$, X 的子集

$$f^{-1}B \triangleq \{x; f(x)\in B\}$$

叫做 B 的原象. 显然 $f^{-1}Y=X$. 若 B 是单元素集 $\{y\}$, $f^{-1}B$ 就是 y 的原象全体所成的集. 若 $B\cap fX=\varnothing$, 那么 $f^{-1}B=\varnothing$, 特别 $f^{-1}\varnothing=\varnothing$. 若记 2^X 为 X 的所有子集所成的集, 那么 f^{-1} 是 2^Y 到 2^X 的照象.

定理一　设 $f: X\to Y$, 再设 B_1、B_2、$B_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 都是 Y 的子集, 那么

$$f^{-1}(B_1-B_2)=f^{-1}B_1-f^{-1}B_2, \qquad f^{-1}B_2^c=(f^{-1}B_2)^c,$$

其中 $B_2^c=Y-B_2$, $(f^{-1}B_2)^c=X-f^{-1}B_2$, 且

$$\begin{aligned} f^{-1}\bigcup\nolimits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda &= \bigcup\nolimits_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}B_\lambda, \\ f^{-1}\bigcap\nolimits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda &= \bigcap\nolimits_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}B_\lambda. \end{aligned}$$

从而知道当 B_1、B_2 不交时, $f^{-1}B_1$、$f^{-1}B_2$ 不交.

证　第一式由下式即知

$$f^{-1}(B_1-B_2)=\{x; f(x)\in B_1-B_2\}$$

$$= \{x; f(x) \in B_1, f(x) \overline{\in} B_2\}$$
$$= \{x; f(x) \in B_1\} - \{x; f(x) \in B_2\}$$
$$= f^{-1}B_1 - f^{-1}B_2.$$

取 $B_1 = X$，即得

$$f^{-1}B_2^c = f^{-1}Y - f^{-1}B_2 = X - f^{-1}B_2 = (f^{-1}B_2)^c.$$

下证第三式. 设 $x \in f^{-1}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$，即 $f(x) \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$，则 Λ 中有 λ 使 $f(x) \in B_\lambda$，即 $x \in f^{-1}B_\lambda$，所以 $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}B_\lambda$. 这就证明了 $f^{-1}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}B_\lambda$. 再设 $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}B_\lambda$. 这就是说，有 $\lambda \in \Lambda$ 使 $x \in f^{-1}B_\lambda$，即 $f(x) \in B_\lambda$. 所以 $f(x) \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$，即 $x \in f^{-1}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$. 这就证明了 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}B_\lambda \subset f^{-1}\bigcup_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$.

由对偶原理，第四式可由第三式得到. 第四式的特殊情况是

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = (f^{-1}B_1) \cap (f^{-1}B_2).$$

当 $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ 时，$\varnothing = f^{-1}\varnothing = f^{-1}(B_1 \cap B_2) = (f^{-1}B_1) \cap f^{-1}B_2$. 定理证毕.

例 2 设 $f: X \to (-\infty, \infty)$，值域 fX 中只有有限个不同的实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，那么 $f^{-1}\{a_j\}(j=1,2,\cdots,n)$ 是二二不交的，且 $f = \sum_{j=1}^n a_j 1_{f^{-1}\{a_j\}}$.

证 固定 $x \in X$，则有某个 a_i 使 $f(x) = a_i$ 即 $x \in f^{-1}\{a_i\}$. 从而 $(\sum_{j=1}^n a_j 1_{f^{-1}\{a_j\}})(x) = a_i 1_{f^{-1}\{a_i\}}(x) = f(x)$. 证毕.

这个例子告诉我们，简单函数必可表示成 $\sum_{j=1}^n a_j 1_{B_j}$，其中 a_j 是二二不同的，而 B_j 是二二不交的，且 $\bigcup_j B_j = X$. 下面这个定理告诉我们简单函数的重要性.

定理二 设 $f: X \to [0, \infty)$，那么简单函数列

$$\tilde{f}_n \triangleq \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{f^{-1}(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} \uparrow f.$$

意即对每一个 $x \in X$，数列 $\tilde{f}_n(x)$ 不减，且趋近于 $f(x)$.

若 $f: X \to [0,1]$，那么简单函数列

$$f_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} 1_{f^{-1}(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}$$

一致收敛于 f，且

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} 1_{f^{-1}\bigcup_{k=1}^{2^n}(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}]}.$$

证 $\tilde{f}_{n+1} \geqslant \sum_{k=1}^{n2^n} \left(\frac{2k-2}{2^{n+1}} 1_{f^{-1}(\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}}]} + \frac{2k-1}{2^{n+1}} 1_{f^{-1}(\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}}]}\right)$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n}\left(1_{f^{-1}\left(\frac{2k-2}{2^{n+1}},\frac{2k-1}{2^{n+1}}\right]}+1_{f^{-1}\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\right]}\right)=\tilde{f}_n.$$

要证 $\tilde{f}_n(x)$ 收敛于 $f(x)$，固定 $x\in X$，不妨设 $f(x)>0$. 当 $n\geqslant f(x)$ 时，$f(x)\in \bigcup_{k=1}^{n2^n}\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]$，因而 x 在某个 $f^{-1}\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]$ 中. 这时 $0\leqslant f(x)-\tilde{f}_n(x)\leqslant \frac{k}{2^n}-\frac{k-1}{2^n}=\frac{1}{2^n}$，所以当 $n\to\infty$ 时，$\tilde{f}_n(x)\to f(x)$.

要证第二个结论. 固定 $x\in X$. 当 $f(x)>0$ 时，$f(x)\in \bigcup_{k=1}^{2^n}\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]$，因而 x 在某个 $f^{-1}\left(\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}\right]$ 中，这时

$$0\leqslant f(x)-\tilde{f}_n(x)\leqslant \frac{1}{2^n}.$$

$f(x)=0$ 时，$\tilde{f}_n(x)=0$，上式也成立. 所以 $\tilde{f}_n$ 一致收敛于 f.

要证其余部分，用同样的方法知道

$$2^{n+1}(f_{n+1}-f_n)=\sum_{k=1}^{2^n} 1_{f^{-1}\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\right]} = 1_{f^{-1}\bigcup_{k=1}^{2^n}\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\right]},$$

所以

$$\begin{aligned} f=\lim_{m\to\infty} f_{m+1} &= \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{m}(f_{n+1}-f_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}1_{f^{-1}\bigcup_{k=1}^{2^n}\left(\frac{2k-1}{2^{n+1}},\frac{2k}{2^{n+1}}\right]}, \end{aligned}$$

定理证毕.

设 $f: X\to Y$，若每个 $y\in fX$ 都只有唯一原象，f 就叫做可逆照象. 经常用下面的步骤检查可逆照象：设 x_1、$x_2\in X$ 且 $f(x_1)=f(x_2)$，检查是否必有 $x_1=x_2$.

设 $f: X\to Y$，$g: Y\to Z$，那么 $x\longmapsto g(f(x))$ 是定义于 X，取值于 Z 的照象，记作 $g\circ f$ 叫做 f 与 g 的复合照象.

定理三　(一)设 $f: X\to Y$，$g: Y\to Z$ 都是可逆照象，那么 $g\circ f$ 也是可逆照象.

(二)设 $f: X\to Y$ 是可逆照象，那么存在着一个 $fX\to X$ 的可逆填满照象 g 满足

$$(g\circ f)(x)=x,\qquad 当\ x\in X\ 时,$$
$$(f\circ g)(y)=y.\qquad 当\ y\in fX\ 时$$

g 叫做 f 的逆照象，经常记作 f^{-1}.

读者注意，这里的 f^{-1} 是 Y 的元素与 X 的元素之间的对应，当仅当可逆照象时才有意义. 前面的 f^{-1} 是 Y 的子集与 X 的子集之间的对应，对每一个照象 f 都有意义. 读者遇到 f^{-1} 时应首先分清这二种情况.

证　(一)是容易的，下面证(二).

对 $y\in f(X)$，定义 g

$$g: y \longmapsto x,$$

这里 x 是 y 的唯一原象，满足 $f(x)=y$. 即当仅当 $f(x)=y$ 时 $g(y)=x$. 那么 g 是 $f(X)$ 到 X 的照象，满足

$$(g\cdot f)(x)=g(f(x))=g(y)=x, \qquad \text{当 } x\in X \text{ 时},$$
$$(f\cdot g)(y)=f(g(y))=f(x)=y, \qquad \text{当 } y\in f(Z) \text{ 时}.$$

对每个 $x\in X$，逆照象 g 的原象即为 $f(x)$. 若 $g(y_1)=g(y_2)$，记 $x=g(y_1)=g(y_2)$，则 $y_1=f(x)=y_2$. 所以 g 为可逆填满照象. 证毕.

设 $f: X\to Y$. 对 $A\subset X$，Y 的子集 $f(A)\triangleq\{f(x);x\in A\}$ 叫做 A 的象. 这样由 $X\to Y$ 的照象 f 导出一个 2^X 到 2^Y 的照象 f.

定理四 设 $f: X\to Y$，那么

$$f^{-1}fA\supset A, \qquad \text{当 } A\subset X \text{ 时},$$
$$ff^{-1}B\subset B, \qquad \text{当 } B\subset Y \text{ 时}.$$

f 为可逆时，$f^{-1}fA=A$ 对每个 $A\subset X$ 成立. f 为填满时，$ff^{-1}B=B$ 对每个 $B\subset Y$ 成立.

证 第一式由 $f^{-1}fA=\{x;f(x)\in fA\}\supset A$ 即得. 第二式由 $ff^{-1}B=\{f(x);x\in f^{-1}B\}\subset B$ 即得.

现在设 f 为可逆，固定 $A\subset X$，要证 $f^{-1}fA\subset A$. 设 $x\in f^{-1}fA$，那么 $f(x)\in fA$. 按 fA 的定义，A 中必有 a 使 $f(a)=f(x)$. 由于 f 可逆，$x=a\in A$. 第三式得证.

再设 f 为填满，固定 $B\subset Y$，要证 $ff^{-1}B\supset B$. 设 $y\in B$，由于 f 为填满，X 中必有 x 使 $y=f(x)$. 即 $x\in f^{-1}B$，所以 $y=f(x)\in ff^{-1}B$. 定理证毕.

设 X、Y 是二个非空集. X 到 Y 的照象全体记作 Y^X，叫做 Y 的 X 幂. 例如 $(-\infty,\infty)^{\{1,2\}}=\{(y_1,y_2);y_1,y_2 \text{ 为实数}\}$ 就是平面. $(-\infty,\infty)^{\{1,2,\cdots,n\}}=\{(y_1,y_2,\cdots,y_n);y_i \text{ 为实数}(i=1,2,\cdots,n)\}$ 就是 n 维实数空间，以后常记为 R^n，而 $R^1=R=(-\infty,\infty)$. 若 N 表示自然数全体，那么 $(-\infty,\infty)^N=\{(y_1,y_2,\cdots),\text{每个 } y_i \text{ 为实数}\}$ 就是实数列全体，有时也记作 R^∞. $\{1,0\}^X$ 就是 X 的子集 A 的示性函数 1_A 的全体. $A\longmapsto 1_A$ 是 X 的子集全体 2^X 到 $\{1,0\}^X$ 的可逆填满照象，这就是记号 2^X 的由来.

设 Y、Z 是二个非空集，集 $Y\times Z\triangleq\{(y,z);y\in Y,z\in Z\}$ 叫做 Y 与 Z 的乘积. Y、Z 有一者为空时，$Y\times Z$ 就理解为空集. $Y\times Y$ 就可看作是 $Y^{\{1,2\}}$. 请读者注意，不要把 $Y\times Z$ 中的元素 (y,z) 看作一个集. 因为 (y,z) 不能写成 (z,y). 当 $Y\neq Z$ 时，(z,y) 可能不是 $Y\times Z$ 的元素，$Y=Z$ 时，我们认为 (z,y) 与 (y,z) 也是不相同的，除非 $y=z$.

定理五 设 A_1、A_2、$A_\lambda(\lambda\in\Lambda)$ 是 Y 的子集，B_1、B_2、$B_\gamma(\gamma\in\Gamma)$ 是 Z 的子集. 那么