同济大学数学辅导系列丛书

高等数学解题方法与同步训练

同济大学基础数学教研室 编

同济大学出版社

同济大学数学辅导系列丛书

高等数学解题方法与同步训练

同济大学基础数学教研室 编

同济大学出版社

内容提要

本书为配合同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第四版)教材(高教版本)编写而成,内容编排依照教材章节顺序,全书共12章,每章由基本要求、主要内容及基本题型与同步练习两大部分组成。基本要求和主要内容的归纳,既简洁又翔实,学生复习时,可脱开教材而查阅到全部基本内容;选编的例题和习题覆盖面广、题型多,基本上包括了各章节的典型题目。每章安排适当的同步练习,对学生分阶段地掌握有关内容,及时发现知识缺陷并随时补足,从而较好地完成全部课程,有较大的帮助;简答附有说明,指出解题思路、值得注意的方法和易犯的错误,有事半功倍的效果;书末还附有模拟考试试题,供学生自我测试。

本书融合了作者的经验之谈和教学心得,类似本书编排体例的书籍在国内较少见。本书可作为各类高校"高等数学习题课"教材,也可作为高校师生的教学参考读物,还可作为硕士研究生入学考试前的复习资料和自学考试有关人员的复习课本。

责任编辑　李炳钊
封面设计　陈益平

同济大学数学辅导系列丛书
高等数学解题方法
与同步训练
同济大学基础数学教研室　编
同济大学出版社出版
(上海四平路1239号)
(邮编200092　电话65981474)
新华书店上海发行所发行
同济大学印刷厂印刷
开本:850×1168　1/32　印数:18　字数:520千字
1998年1月第1版　1998年1月第1次印刷
印数:1—8000　定价:22.00元
ISBN7-5608-1815-3/O·160

前　言

改革开放以来,根据社会主义市场经济稳步发展的需要,我国高等教育事业得到了很快的发展,于是有更多的人进入了各类高等学校并学习“高等数学”这一课程。为了适应广大读者学习或复习的需要,我们编写了这本书。

本书是根据国家教委审订的高等工科院校“高等数学课程教学基本要求”(教学大纲)并按照同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第四版)(高等教育出版社出版)的章节顺序、以指导学生如何把握基本概念和掌握基本解题方法为主要目的而编写的。读者可将此书与各自的《高等教学》教材(尤其是同济大学主编的第四版)配合使用。全书共分十二章,每章第一节先提出基本教学要求并总结该章的基本概念及内容,使读者明确要求、抓住要点。第二节为基本题型与同步训练,先给出大量典型的例题和分析精准的解题过程,在题后以注解的形式指明概念中的难点和容易误解的疑点,并总结具有一般意义的解题方法,然后,在此基础上,按课程的顺序让读者进行同步训练。附录的简单题解可供读者自查。

本书对各高等院校及高级中专的相关专业(非数学专业)的在读学生和函授及民办高等学校参加国家统一考试的学生都适用;此外,本书也可作为专科升本科或者(非数学类)硕士研究生入学考试前的复习资料。

同济大学数学系的部分教师集多年的教学实践的经验而编写了这本书。全书由应明总撰并定稿,徐建平策划并编写第七章。参加编写工作的有(排列不分先后):朱晓平(第一、二、三章);李想(第四、五、六、八章);蒋福民(第九、十章);胡志庠(第十一、十二章)。本书的编写与出版得到了同济大学数学系郭镜明教授和同济大学出版社李炳钊副编审的关心和支持,并在出版前由郭镜明

教授审订。由于编者水平有限,书中不周全、甚至错误之处在所难免,还望同行们和广大读者不吝批评指正。

编　者

1997年7月于上海

目　　录

第一章　函数与极限

一、基本要求与主要内容

(一) 基本要求

1. 理解函数概念,包括反函数、复合函数、初等函数的概念;了解函数的四种特性,掌握基本初等函数及其图形.

2. 掌握极限的定义和极限的有关性质,掌握极限存在的夹逼准则和单调有界数列收敛准则,并能熟练运用极限运算法则求数列和函数的极限.

3. 了解无穷小与无穷大的定义及其性质,掌握无穷小的运算法则.

4. 掌握函数连续性概念以及连续函数的代数性质,了解函数的间断点及其类型,了解闭区间上连续函数的分析性质.

(二) 主要内容

1. 函数

设 x 和 y 为两个变量,D 是一个给定的数集,若对于 D 中任意一个 x,变量 y 按照一定法则总有确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y = f(x)$,其中 D 称为函数 $y = f(x)$ 的定义域,x 为自变量,y 为因变量,$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的值域,$G = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的图形.

2. 函数特性

(1) 函数的有界性　若函数 $y = f(x)(x \in D)$ 存在 $M > 0$,

使得对于 D 内任意一点 x,有 $|f(x)|<M$,则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上有界;否则称函数 $y=f(x)$ 在 D 上无界,即对于任意的 $M>0$,在 D 内至少存在一点 x,有 $|f(x)|\geq M$.

(2) 函数的单调性　若函数 $y=f(x)(x\in D)$ 对于 D 内的区间 Ⅰ 上任意两点 x_1,x_2,若 $x_2<x_2$ 时必有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $y=f(x)$ 在区间 Ⅰ 上单调增加;若 $x_1<x_2$ 时必有 $f(x_1)>f(x_2)$,称则函数 $y=f(x)$ 在区间 Ⅰ 上单调减少.

(3) 函数的奇偶性　若函数 $y=f(x)$ 定义域 D 关于原点对称(即 $x\in D$ 时,必有 $-x\in D$),且对于 D 内任意一点 x,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为偶函数;若恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $y=f(x)$ 为奇函数.

(4) 函数的周期性　若函数 $y=f(x)$ 在 D 上有定义,且存在一个非零常数 l,使得对 D 中任意 x,有 $x+l\in D$,而且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,l 称为 $f(x)$ 的周期,函数的周期通常是指最小正周期.

3. 反函数

函数 $y=f(x)$ 的定义线为 D,值域为 W,对 W 中任意的 y,至少可以确定一个 $x\in D$(适合 $f(x)=y$)与之对应,由此构成的函数 $x=\varphi(y)$ 称为 $y=f(x)$ 的反函数.

4. 基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数称为基本初等函数.

5. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 定义域为 D_1,函数 $u=\varphi(x)$ 定义域为 D,值域为 W,若 $W\subset D_1$,则对 D 内任意一点 x,有确定的值 $u=\varphi(x)$ 与之对应,由于 $u=f(x)\in W\subset D_1$,又有确定的值 y 与之对应,由此确定的函数称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数,记作 $y=f\circ\varphi(x)=f[\varphi(x)]$.

6. 数列及其极限

(1) 数列　数列是无穷有序的数组，而其第 n 项称为一般项；数列 a_n 中取无穷项且保持原有次序而构成的数列称为 a_n 的子列.

(2) 数列的极限　对于数列 a_n，若存在数 a，满足：

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$，当 $n > N$，有

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

则称数列 a_n 极限存在或收敛并把 a 称为数列 a_n 的极限，记作

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a,$$

若数列 a_n 极限不存在，则称数列 a_n 发散.

几何意义　数列 a_n 极限为 a，则 a 的任一邻域内含有数列 a_n 几乎所有的项，即除至多有限项外的所有项都在该领域中.

7. 函数极限

(1) 设函数 $y = f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义，若存在数 A，满足：

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，对于满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的任意 x，都有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时函数 $y = f(x)$ 的极限存在且极限为 A，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

单侧极限　设函数 $y = f(x)$ 在某区间 $(x_0 - r, x_0)$ $((x_0, x_0 + r))(r > 0)$ 有定义，若存在数 A，满足：

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0(\delta < r)$，对于满足 $0 < x_0 - x < \delta$ $(0 < x - x_0 < \delta)$ 的任意 x，都有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则 $A = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)(A = \lim\limits_{x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0))$ 称作 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限(右极限).

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件为其左右极限存在且相等.

(2) 设函数 $y = f(x)$ 在 $|x| > X_0$(其中 $X_0 > 0$) 内有定义，若存在数 A，满足：

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0(X > X_0)$,对于满足 $|x| > X$ 的任意x,都有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称当 $x \to \infty$ 时,函数 $y = f(x)$ 的极限存在且极限为 A,记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A)$: 设函数 $y = f(x)$ 在 $x > X_0(x < -X_0)$(其中 $X_0 > 0$) 内有定义,若存在数 A,满足:

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0(X > X_0)$,对于满足 $x > X(x < -X)$ 的任意 x,都有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称当 $x \to +\infty(x \to -\infty)$ 时函数 $y = f(x)$ 的极限存在且极限为 A,记作

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A(\lim_{x \to -\infty} f(x) = A).$$

注　给定的一个数列 a_n 可以看作定义在自然数集N上的函数$f(n)$,因此数列极限$\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ 就是函数极限 $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ (x \in N)}} f(x)$,从而数列极限与函数极限都具有下面的性质.

8. 极限的性质

(1) 唯一性　　若极限存在,则极限唯一.

(2) 有界性　　若极限存在,则函数有界(所谓有界,对函数来说是指局部有界,即在自变量变化过程中的某邻域或某无穷区间内函数有界.)

(3) 归并性

① 数列收敛的充分必要条件为其任一子列收敛;

② 函数 $y = f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 极限存在,其充分必要条件是: 对任意数列 x_n, 若 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$(其中 $x_n \neq x_0$)(或 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$),则数列 $f(x_n)$ 收敛.

(4) 若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,而且 $A > 0$(或 $A < 0$),则存在 x_0 的某

个去心邻域，在此去心邻域内，有 $f(x) > A/2$（或 $f(x) < A/2$）.

若在 x_0 的某一去心邻域内 $f(x) \geq 0$（或 $f(x) \leq 0$），且极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $A \geq 0$（或 $A \leq 0$）.

注 此性质也适用于其他极限过程和 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ 等（包括单侧极限），其结论只需根据其极限过程，改动使不等式成立的自变量范围即可.

9. 极限运算法则

在下列（1）、（2）、（3）条件设在同一极限过程中，$\lim f(x)$、$\lim g(x)$ 存在，则

（1）$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$；

（2）$\lim[f(x)g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$；

（3）$\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$（其中 $\lim g(x) \neq 0$）；

（4）$\lim f(x) = 0$，$g(x)$ 有界，则 $\lim f(x)g(x) = 0$；

（5）（复合函数）若 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$，且在 x_0 的某一去心邻域内 $\varphi(x) \neq a$，$\lim\limits_{u \to a} f(u) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = A$.

10. 无穷小与无穷大

（1）若 $\lim f(x) = 0$，则称在这极限过程中 $f(x)$ 为无穷小（量）；

若 $\lim f(x) = \infty$，则称在这极限过程中 $f(x)$ 为无穷大（量）.

（2）（无穷小与无穷大关系）在同一极限过程中，若 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大；若 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

（3）（无穷小与极限的关系）在某一极限过程中，$\lim f(x) = A$ 的充分必要条件为 $f(x) = A + \alpha$，其中 α 的同一过程中的无穷小量.

(4)（无穷小的比较）设在同一极限过程中，α、β 为无穷小量：

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0(\alpha \neq 0)$ 或 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty(\beta \neq 0)$，则称 β 为 α 的高阶无穷小量，记作 $\beta = 0(\alpha)$ 或称 α 是 β 的低价无穷小量.

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$，则称 β 和 α 为同阶无穷小量，特别若 $c = 1$ 时，则称 β 与 α 是等价无穷小量，记作 $\beta \sim \alpha$.

若 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0(k > 0)$，则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

(5)（无穷小的运算法则）在同一极限过程中，有限多个无穷小的和与积仍是无穷小；有界变量与无穷小量之积仍是无穷小.

(6)（无穷小的替换性质）设 α, β 为同一极限过程的无穷小量，且 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta', \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在 $(\alpha \neq 0, \alpha' \neq 0)$，则 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha}$ 存在，且 $\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

11. 极限存在的两个准则及两个重要极限

(1) 准则 Ⅰ：数列 $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ 满足：(ⅰ) $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$；(ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

准则 Ⅰ'：若函数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 在同一极限过程中满足：(ⅰ) $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$；(ⅱ) $\lim g(x) = \lim h(x) = A$，则 $\lim f(x) = A$.

(2) 准则 Ⅱ：单调有界数列必收敛.

(3) 两个重要极限及一些重要等价无穷小

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

当 $x \to 0$ 时，$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x$；$\ln(1 + x) \sim x$；$\mathrm{e}^x - 1 \sim x$；$1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$；$(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$；$a^x - 1 \sim x\ln a(a > 0, a \neq 1)$.

12. 函数的连续性与间断点

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的几个等价定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义,称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续,是指:

(ⅰ) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;

(ⅱ) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$;

(ⅲ) 当自变量增量为 Δx,相应地函数增量为

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$,则 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$;

(vi) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,对于满足 $|x - x_0| < \delta$ 的任意 x,都有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(2) 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处不连续,则 x_0 是函数 $y = f(x)$ 的间断点,若 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 均存在,而 $y = f(x)$ 在 x_0 间断,则称 x_0 为第一类间断点,特别当 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$,即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在时,把 x_0 称为可去间断点;当 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 时,把 x_0 称为跳跃间断点.

若 $f(x)$ 的间断点 x_0 不是第一类的,则称点 x_0 为 $y = f(x)$ 的第二类间断点,特别当 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 或 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 为无穷大时,把 x_0 称为 $y = f(x)$ 的无穷间断点;当 $x \to x_0$ 时,对应的函数值无限次地在两个固定的不同数值间变动,就把 x_0 称为 $y = f(x)$ 的振荡间断点.

13. 连续函数的代数运算性质

(1) 若函数 $f(x), g(x)$ 均在点 x_0 处连续,则函数 $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x)$ 都在点 x_0 处连续,在 $g(x_0) \neq 0$ 条件下,函数 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在点 x_0 处也连续.

(2) 若函数 $y = f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(减少)且连续,则其反函数 $x = \varphi(y)$ 也在区间 $I_y = \{y \mid y = f(x), x \in I_x\}$ 上单调增加(减少)且连续.

(3) 函数 $y = f(u)$ 在 $u = a$ 点处连续,函数 $u = \varphi(x)$ 在 $x = x_0$ 点处连续,且 $a = \varphi(x_0)$,则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在 $x = x_0$ 点处连续.

(4) 初等函数(即由常数与基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合过程而成的函数)在定义区间内连续.

14. 闭区间上连续函数的分析性质

若函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上存在 x_0,使得对于 I 上任意一点 x,满足 $f(x) \leqslant f(x_0)$(或 $f(x) \geqslant f(x_0)$),则称点 x_0 为函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上的最大值点(或最小值点),$f(x_0)$ 称为函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上的最大值(或最小值)

(1) 最大值、最小值存在与函数有界定理　若函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则有(ⅰ) $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必可取到最大值及最小值,即 $\exists\, \xi, \eta \in [a,b]$,使得 $f(\xi) = \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$, $f(\eta) = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$;(ⅱ) $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,即 $\exists\, M > 0$,使得 $|f(x)| \leqslant M, \forall x \in [a,b]$.

(2) 零点定理与介值定理　设 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,(ⅰ) 若 $f(a) \cdot f(b) < 0$,则在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi) = 0$(零点定理);(ⅱ) 若 $f(a) \neq f(b)$,则对介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意值 μ,在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi) = \mu$(介值定理).

推论　(ⅰ) 若 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,设 m, M 分别为 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值、最大值,则对介于 m 和 M 之间的任意值 μ,在 $[a,b]$ 上至少有一点 ξ,使得 $f(\xi) = \mu$;

(ⅱ) 闭区间上的不恒为常数的连续函数,其值域为闭区间.

二、基本题型与同步练习

(一) 函数及其极限

例 1 若 $f(t)=2t^2+\frac{2}{t^2}+\frac{5}{t}+5t$，证明：$f(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$.

证 $f\left(\frac{1}{t}\right)=2\left(\frac{1}{t}\right)^2+\frac{2}{\left(\frac{1}{t}\right)^2}+\frac{5}{\frac{1}{t}}+5\left(\frac{1}{t}\right)$

$$=2\frac{1}{t^2}+2t^2+5t+\frac{5}{t}=f(t)$$

例 2 证明：定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数之和.

我们先对本题作一分析，设函数 $f(x)$ 和 $(-l,l)$ 上有定义，假定 $f(x)$ 可表为奇函数 $h(x)$ 与偶函数 $k(x)$ 之和，即

$$f(x)=h(x)+k(x),$$

则

$$f(-x)=h(-x)+k(-x)=-h(-x)+k(x),$$

于是

$$h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},\quad k(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

由此启发而得到下面的证明.

证 设 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上有定义，令

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},\ \psi(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},$$

容易验证

$$\varphi(-x)=-\varphi(x),\ \psi(-x)=\psi(x),$$

即 $\varphi(x)$ 为奇函数，$\psi(x)$ 为偶函数，而且 $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$，故结论成立.

例 3 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在

$(0,l)$内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证　设 $x_1 < x_2$，x_1, x_2 为 $(-l,0)$ 内任意两点，则 $-x_1$，$-x_2$ 为 $(0,l)$ 内两点，且 $-x_1 > -x_2$.

由于 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，故

$$f(-x_1) > f(-x_2).$$

又由于 $f(x)$ 为奇函数，故

$$f(-x_1) = -f(x_1),\quad f(-x_2) = -f(x_2),$$

从而

$$-f(x_1) > -f(x_2),$$

即

$$f(x_1) < f(x_2),$$

因此 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内单调增加.

例 4　求 $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}(ad-bc\neq 0)$ 的反函数，并问 a,b,c,d 满足什么条件时，这反函数与直接函数相同？

先说明条件“$ad-bc\neq 0$”的意义：如果 $ad-bc\neq 0$，即 $ad\neq bc$，我们注意到 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 的表达式中已约定 c 与 d 不同时为零，不妨设 $c\neq 0$，于是

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{acx+bc}{c^2x+cd} = \frac{acx+ad}{c^2x+cd}$$

$$\neq \frac{acx+bc}{c^2x+cd} = \frac{a}{c},$$

因此，该条件说明 $y\neq\dfrac{a}{c}$，由下面的证明可知，这也是 y 有反函数的条件.

证　由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$，得到

$$(cy-a)x = b-dy,$$

由前面说明，$y\neq\dfrac{c}{a}$，故解得