高等数学简明教程

（第三册）

李　忠 周建莹 编著

北京大学出版社

高等数学简明教程

（第三册）

李　忠　周建莹　编著

北京大学出版社
·北　京·

图书在版编目(CIP)数据

高等数学简明教程　第三册/李忠，周建莹编著. —北京：北京大学出版社，1999.8

ISBN 7-301-04138-1

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①李… ②周…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 11859 号

书　　名：高等数学简明教程(第三册)
著作责任者：李　忠　周建莹　编著
责 任 编 辑：刘　勇
标 准 书 号：ISBN 7-301-04138-1/O·442
出　版　者：北京大学出版社
地　　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址：http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　　话：出版部 62752015　发行部 62754140　理科编辑部 62752021
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
排　版　者：北京高新特公司激光照排中心
印　刷　者：北京大学印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
850×1168　32 开本　10.25 印张　250 千字
1999 年 8 月第一版　1999 年 8 月第一次印刷
印　　　数：0001—4000 册
定　　　价：14.00 元

内 容 简 介

这套教程是物理类各专业大学生的高等数学教材，共分三册，供三个学期使用。第一册的内容是一元函数的微积分及空间解析几何；第二册的内容是多元函数的微积分及常微分方程；本书为第三册，共分五章。内容包括：数项级数、函数项级数、幂级数与泰勒级数，广义积分与含参变量的积分，傅氏级数与傅氏积分，概率论初步与数理统计等。与传统教材相比，本书增加了概率论与数理统计的内容，这是为了使学生能顺利地学习统计物理并在将来适应实际工作的需要。

本书的作者们曾在北京市教委及北京大学正式立项，进行高等数学课程内容体系改革的试点工作。本书就是在试点基础上编写而成的。它打破了原来先讲微分学后讲积分学的传统讲授次序，重新架构了教学内容体系，力求使读者尽快掌握微积分的核心思想与基本计算；同时避免了由于积分概念出现过晚而造成的与其他专业基础课在配合上的脱节现象。在极限理论及其相关问题上，本书的处理也有特色，既保证了理论的严谨性，又避免了过分形式化的弊端，使读者感到朴素自然。该书强调数学理论的实际背景及其在其他学科中的作用；在内容的讲授及习题、例题的配置上尽可能展示了数学的应用价值。本书叙述简洁，深入浅出，便于自学。

本书可作为综合性大学、高等师范院校物理类及其相关专业本科生的高等数学课的教材，也可供数学教师、科技工作者及数学爱好者阅读，对非物理类专业的师生，也可有选择地使用本书作为高等数学教材。

目　　录

第九章　无穷级数 ……………………………… (1)
§1　柯西收敛原理,数项级数的概念 ……………… (1)
习题 9.1 ……………………………………………… (10)
§2　正项级数的收敛判别法 ………………………… (11)
习题 9.2 ……………………………………………… (22)
§3　任意项级数 ……………………………………… (23)
习题 9.3 ……………………………………………… (38)
§4　函数项级数 ……………………………………… (40)
习题 9.4 ……………………………………………… (63)
§5　幂级数 …………………………………………… (65)
习题 9.5 ……………………………………………… (80)
§6　泰勒级数 ………………………………………… (81)
习题 9.6 ……………………………………………… (101)
第九章总练习题 ……………………………………… (102)
第十章　广义积分与含参变量的积分 ……………… (106)
§1　广义积分 ………………………………………… (106)
习题 10.1 …………………………………………… (120)
§2　含参变量的正常积分 …………………………… (122)
习题 10.2 …………………………………………… (129)
§3　含参变量的广义积分 …………………………… (130)
习题 10.3 …………………………………………… (152)
第十一章　傅氏级数与傅氏积分 ……………………… (154)
§1　傅氏级数 ………………………………………… (154)
习题 11.1 …………………………………………… (169)

§2　贝塞尔不等式与帕斯瓦尔等式 …………………… (171)
习题 11.2 ………………………………………… (178)
§3　傅氏积分与傅氏变换 ………………………… (178)
习题 11.3 ………………………………………… (185)
第十二章　概率论初步 ……………………………… (187)
§1　随机事件 ……………………………………… (187)
§2　概率的统计定义 ……………………………… (191)
§3　古典概型与几何概型 ………………………… (193)
习题 12.1 ………………………………………… (199)
§4　条件概率与乘法公式 ………………………… (201)
习题 12.2 ………………………………………… (204)
§5　全概公式 ……………………………………… (205)
习题 12.3 ………………………………………… (209)
§6　独立试验序列概型 …………………………… (211)
习题 12.4 ………………………………………… (212)
§7　随机变量 ……………………………………… (213)
§8　离散型随机变量的概率分布 ………………… (215)
习题 12.5 ………………………………………… (220)
§9　连续型随机变量的概率分布 ………………… (221)
习题 12.6 ………………………………………… (226)
§10　随机变量函数的分布 ……………………… (227)
习题 12.7 ………………………………………… (231)
§11　随机向量及其分布 ………………………… (232)
习题 12.8 ………………………………………… (239)
§12　数学期望 …………………………………… (240)
习题 12.9 ………………………………………… (246)
§13　方差 ………………………………………… (247)
习题 12.10 ……………………………………… (253)
§14　大数定理与中心极限定理 ………………… (254)

习题 12.11 …………………………………………… (257)
第十三章 数理统计……………………………………… (258)
§1 总体与样本 ……………………………………… (258)
§2 参数估计的一般概念与最大似然法 ……………… (260)
习题 13.1 …………………………………………… (268)
§3 期望与方差的区间估计 …………………………… (268)
习题 13.2 …………………………………………… (275)
§4 假设检验的一般概念 ……………………………… (276)
§5 关于正态分布的假设检验 ………………………… (279)
习题 13.3 …………………………………………… (285)
§6 回归分析 ………………………………………… (286)
习题 13.4 …………………………………………… (296)
常用分布表…………………………………………… (297)
附表 1 正态分布数值表 …………………………… (298)
附表 2 t 分布临界值表 …………………………… (299)
附表 3 χ^2 分布临界值表 ………………………… (300)
附表 4 F 分布临界值表($\alpha=0.05$) ……………… (301)
附表 5 F 分布临界值表($\alpha=0.025$) …………… (302)
附表 6 F 分布临界值表($\alpha=0.01$) ……………… (303)
习题答案…………………………………………… (304)

第九章 无穷级数

无穷级数的概念与理论是微积分理论的发展与应用，有重要的意义. 本章先讨论数值项无穷级数，然后讨论函数项级数. 前者是后者的基础，而后者对于我们研究函数与函数的数值计算提供了新的重要途径.

对无穷级数的讨论，使我们面临着对一种较复杂的极限问题的处理. 为此，我们在本章的第 1 节中要讲述柯西收敛原理.

§1 柯西收敛原理，数项级数的概念

设 $\{a_n\}$ 是一个序列. 回顾序列极限的定义，我们说序列 $\{a_n\}$ 当 $n \to \infty$ 时以 A 为极限，如果对于任给的 $\varepsilon > 0$，都存在 N 使得当 $n \geqslant N$ 时，$|a_n - A| < \varepsilon$. 根据这个定义我们可以判定序列 $\{a_n\}$ 是否以某个常数 A 为其极限.

然而，我们的问题如果不是问"序列 $\{a_n\}$ 是否以 A 为极限"，而是问"序列 $\{a_n\}$ 是否有极限"，那么我们就不能从上述极限的定义中找出答案.

一个序列 $\{a_n\}$ 何时有极限呢？迄今为止，我们只知道下述的结论：若 $\{a_n\}$ 是一个单调有界序列，则必有极限. 除此之外，我们不知道任何更为一般的结论.

下列柯西收敛原理给出了一个序列有极限的充要条件.

定理 1 设 $\{a_n\}$ 是一个序列，则 $\{a_n\}$ 有极限的充要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，都存在 N，使得

$$|a_n - a_m| < \varepsilon, \quad 只要\ n \geqslant N,\ m \geqslant N.$$

证 *必要性* 我们假定当 $n \to \infty$ 时 $\{a_n\}$ 有极限 A. 这时，从直

观上看，$\{a_n\}$ 中充分靠后的项都聚集在 A 附近，从而它们彼此的距离足够小. 事实上，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，都存在一个 N，使得

$$|a_n - A| < \varepsilon/2, \quad \text{只要 } n \geqslant N.$$

那么，对于任意的 m 及 n，当 $m \geqslant N, n \geqslant N$ 时便有 $|a_m - A| < \varepsilon/2$，$|a_n - A| < \varepsilon/2$，从而有

$$\begin{aligned}|a_m - a_n| &= |(a_m - A) - (a_n - A)| \\ &\leqslant |a_m - A| + |a_n - A| < \varepsilon.\end{aligned}$$

充分性 设序列 $\{a_n\}$ 满足定理条件，即对任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在一个 N，使得

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \quad \text{只要 } m \geqslant N, n \geqslant N.$$

特别地，对于 $\varepsilon = 1$ 存在一个 N_1 使得

$$|a_m - a_{N_1}| < 1, \quad \text{只要 } m \geqslant N_1.$$

于是，我们有

$$|a_m| \leqslant 1 + |a_{N_1}|, \quad \text{只要 } m \geqslant N_1.$$

令 $C = \max\{|a_i| \mid i = 1, \cdots, N_1 - 1\}$，则有

$$|a_n| \leqslant \max\{C, 1 + |a_{N_1}|\}$$

对于一切自然数 n 成立. 这也就是说，序列 $\{a_n\}$ 是一个有界序列.

根据外尔斯特拉斯 - 布尔查诺定理，这时序列 $\{a_n\}$ 中有一个子序列 $\{a_{n_k}\}$ 有极限. 设当 $k \to \infty$ 时 $\{a_{n_k}\}$ 的极限为 A. 下面我们证明，$\{a_n\}$ 也以 A 为其极限.

事实上，对于给定的 $\varepsilon > 0$，存在一个 K，使得

$$|a_{n_k} - A| < \varepsilon/2, \quad \text{只要 } k \geqslant K;$$

又由假定，存在一个 N，使得

$$|a_m - a_n| < \varepsilon/2, \quad \text{只要 } m \geqslant N, n \geqslant N.$$

特别地，

$$|a_m - a_{n_k}| < \varepsilon/2, \quad \text{只要 } m \geqslant N, n_k \geqslant N.$$

取定一个 $n_k > N$ 且 $k \geqslant K$，便有

$$|a_m - A| = |(a_m - a_{n_k}) + (a_{n_k} - A)|$$

$$\leqslant |a_m - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad \text{只要 } m \geqslant N.$$

这就证明了 a_n 以 A 为极限. 定理证毕.

柯西收敛原理(有时也称柯西准则)的重要意义在于,无须借助于其他量,只须依据序列本身的性态就可判断它是否有极限. 我们将在讨论级数时看到它的重要性.

满足定理 1 中条件的序列称为**柯西序列**. 这时,定理 1 可以表述为: 一个序列有极限的充要条件是它是一个柯西序列.

一个序列有极限,又称该序列**收敛**.

以上是讨论序列极限的情况. 对于函数极限的情况,同样有柯西收敛原理. 我们这里只叙述其结论,而不给出证明. 有兴趣的读者完全可以仿照前面的步骤自行证明.

定理 2 设 $y = f(x)$ 在 a 的一个空心邻域内有定义,则 $y = f(x)$ 当 $x \to a$ 时有极限的充要条件是: 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在一个 $\delta > 0$,使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

只要 x_1 与 x_2 满足下列条件:

$$0 < |x_1 - a| < \delta, \quad 0 < |x_2 - a| < \delta.$$

现在,作为柯西收敛原理之应用,我们来讨论**无穷级数的收敛性**.

一个形如

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

的式子称为一个无穷级数. 比如通常的几何级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^k + \cdots.$$

我们把一个序列 $\{a_k\}$ 的项形式地加起来就形成了一个级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. 这里我们没有考虑这个和式的意义, 只是说它代表一个级数. 这

里的一般项 a_k 称作级数的**通项**.

简言之,一个级数就是无穷多个数的和式.通常我们遇到的和式都是有穷个数的和.这时,可以毫无困难地谈论和的值.但是对于一个级数,问题就变得复杂多了.为了讨论这个问题,我们引入级数收敛的概念.

定义 给了级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$,我们把级数的前 n 项之和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

称为级数的**部分和**.当 $n \to \infty$ 时,若部分和序列 $\{S_n\}$ 有极限 S,则称级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ **收敛**,且称 S 为这个级数的**和**,记作

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

如果一个级数的部分和 S_n 没有极限,则称级数是**发散的**.

发散级数无值可言,只有收敛级数,我们才把它的部分和的极限视作级数的值.

例 1 讨论等比级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} (a \neq 0 \text{ 为常数})$$

的收敛性.

解 当 $q = 1$ 时,$S_n = na \to \infty$,级数发散;当 $q = -1$ 时,$S_1 = S_3 = \cdots = S_{2n+1} = a$,$S_2 = S_4 = \cdots = S_{2n} = 0$,故 $\{S_n\}$ 无极限,级数发散;当 $|q| \neq 1$ 时,

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \to \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, & |q| < 1 \text{ 时}, \\ \infty, & |q| > 1 \text{ 时}. \end{cases}$$

综上所述,当 $|q| \geqslant 1$ 时级数发散,当 $|q| < 1$ 时级数收敛.

通常我们遇到的无穷位小数实际上就是一个级数.事实上,给定一个无穷位小数:

$$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

其中a_n是在$0,1,2,\cdots,9$中取值的一个整数，这个无穷位小数实际上就是下列级数的和：

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{10^k}.$$

特别地，当这小数中的每位a_n都取同一值a时，相应级数为几何级数. 由例1我们有

$$\begin{aligned}0.aa\cdots a\cdots&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a}{10^k}=\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{\infty}a\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1}\\&=\frac{1}{10}\cdot\frac{a}{1-\frac{1}{10}}=\frac{a}{9}.\end{aligned}$$

这样，我们就证明了大家在中学里早已熟知的事实：

$$0.33\cdots3\cdots=\frac{1}{3},\quad 0.99\cdots9\cdots=1.$$

例 2　判断级数

$$\begin{aligned}(1+1)&+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots\\&+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)+\cdots\end{aligned}$$

是否收敛. 若收敛，求其和.

解　这个序列的通项为$\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$，其部分和为

$$\begin{aligned}S_n&=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)+\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)\\&=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}.\end{aligned}$$

显然，当$n\to\infty$时，S_n的极限为$\frac{7}{2}$. 所以该级数收敛，其和为$\frac{7}{2}$.

部分和在研究级数时是一个重要角色. 给定级数之后，其部分和序列就由级数唯一决定. 反过来，若部分和序列$\{S_n\}$为已知，则

相应的级数也是唯一确定的. 事实上：因为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n = 1,2,\cdots),$$

故 $a_n = S_n - S_{n-1}$（我们约定 $S_0 = 0$）.

在了解了部分和与通项之间的这种联系后，由级数收敛的定义立即推出

定理 3 设 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 为给定的一个无穷级数，则该级数收敛的必要条件是其通项趋于零，也即

$$a_k \to 0 \quad (\text{当 } k \to \infty).$$

证 设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 是它的部分和. 级数收敛意味着 S_n 有极限. 设极限为 S. 那么，由 $S_n \to S(n \to \infty)$ 推出 $S_{n-1} \to S(n \to \infty)$，从而有

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to 0 \ (n \to \infty).$$

证毕.

定理 3 告诉我们一个级数收敛的必要条件是其通项趋于零. 因此，当我们考察一个级数的收敛性时，首先要考察其通项是否趋于零. 若其通项不趋于零，我们立即可以断言该级数发散.

但是，由通项趋于零并不能断言该级数收敛. 因为通项趋于零仅仅是级数收敛之必要条件，而不是充分条件.

柯西收敛原理为级数的收敛性的判定提供了充要条件：

定理 4 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛的充要条件是：对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，存在一个 N，使得

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon, \quad \text{只要 } n \geqslant N, p \geqslant 1.$$

粗略地说，这个定理告诉我们一个级数收敛的充要条件是，在级数中任意取出一段和 $a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}$，无论项数 p 有多大，只要 n 充分大，这段和的绝对值就足够小.

证 根据定义,级数$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$收敛即部分和序列

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

有极限. 由柯西收敛原理又知道,S_n有极限之充要条件为:对于任意给定的$\varepsilon > 0$,存在一个N,使得

$$|S_m - S_n| < \varepsilon,\quad 只要\ n \geqslant N, m \geqslant N.$$

这个条件又可以改写为

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon,\quad 只要\ n \geqslant N, p \geqslant 1.$$

而

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k.$$

这样就得到了定理中的条件. 证毕.

柯西收敛原理指出,收敛级数的充分靠后的任意一段之和,其绝对值可以任意小.

据此,我们来考察调和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

之收敛性.

这个级数的通项趋于零,因而不能立即断定它收敛或发散. 根据柯西收敛原理,我们应该考虑形如

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}$$

的和当$n \to \infty$时是否趋于零. 显然,不论n多大,只要取p足够大(即取项数足够多),上述形式的和就不趋于零. 比如,任意取定n后,取$p = n$,那么

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

这就表明调和级数是发散的.

虽然调和级数是发散的,但是,级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$却是收敛的. 事实上,

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\right| &= \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2} \\
&< \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\
&= \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots \\
&\quad +\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right) \\
&= \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

故对于任意给定的 $\varepsilon>0$,取 $N=[1/\varepsilon]+1$,则当 $n\geqslant N$ 时,对一切自然数 p 有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{1}{k^2}\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

这就证明了这个级数的收敛性.

以上我们看到调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的. 从直观上,对此应作如何之解释呢?可以这样理解:两者之通项虽然都趋于零,但前者通项趋于零的速度较慢,从而导致部分和不收敛;而后者通项趋于零的速度较快,保证了其部分和收敛. 一般说来,通项趋于零的速度达到一定程度,就能够保证级数的收敛性.

我们知道,级数的收敛性是由其部分和序列的收敛性定义的,而收敛级数的值也是由部分和序列的极限值定义的. 因此,由序列极限的有关定理立即推出下面的两条性质:

(1) 若 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ 都是收敛的,并分别收敛于 S_1 及 S_2,则级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\pm b_k)$$

也收敛,并收敛于 $S_1\pm S_2$.

(2) 若级数$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$收敛于S，则对任意常数c，级数$\sum_{k=1}^{\infty}ca_k$也收敛，并收敛于cS.

严格证明请读者自己完成.

我们知道，对一个序列$\{u_n\}$的前面若干项作更动并不影响序列的收敛性. 级数也有类似的性质.

(3) 设有两级数$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$与$\sum_{k=1}^{\infty}b_k$. 若存在一个N，使得

$$a_k = b_k, \quad 当\ k \geqslant N,$$

则这两个级数同时收敛或同时发散.

这一点从柯西收敛原理看得十分清楚. 事实上，当$n \geqslant N$时我们总有

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} b_k, \quad \forall\ p \geqslant 1.$$

因此，这两个级数同时满足或同时不满足关于级数收敛的柯西条件. 也就是说，它们要么同时收敛，要么同时发散.

这条性质告诉我们，级数的收敛性与其前面的有限项的值的改变无关. 所以：在级数前面添加上有限项或删除掉有限项，所成的新级数与原级数同时收敛或发散.

(4) 将收敛级数的项任意加括号后所成的新级数，仍然收敛到原级数的和(此性质称为无穷和的结合律).

证 设级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于和S，其部分和序列为$\{S_n\}$. 将其项任意加括号后所成的级数为

$$\left(u_1 + \cdots + u_{i_1}\right) + \left(u_{i_1+1} + \cdots + u_{i_2}\right) + \cdots$$
$$+ \left(u_{i_{n-1}+1} + \cdots + u_{i_n}\right) + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} v_k, \tag{3}$$

其中$v_k = u_{i_{k-1}+1} + \cdots + u_{i_k}$，并规定$i_0 = 0$. 设级数(3)的部分和序列为$\{\sigma_n\}$. 不难看出有关系式：

$$\sigma_n = S_{i_n},$$

即$\{\sigma_n\}$是$\{S_n\}$的一个子序列.因而若原级收敛于S时,也即$S_n \to S(n\to\infty)$,就有$\sigma_n \to S(n\to\infty$时).证毕.

显然,若一个级数加括号后收敛,该级数本身未必收敛.

习　题　9.1

1. 利用柯西收敛原理证明:

(1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n(n+1)}$收敛;　　(2) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$发散;

(3) 设两个级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛,且存在正整数$N$,使当$n\geqslant N$时有

$$a_n\leqslant u_n\leqslant b_n,$$

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛.

2. 已知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,又知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散,问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$是否收敛?

3. 判断下列级数是否收敛:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n 2}{2^n}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.0001}$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n}$.

4. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和序列为$\{S_n\}$.若$n\to\infty$时$\{S_{2n}\}$与$\{S_{2n+1}\}$都收敛且收敛到同一个常数$A$,证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.