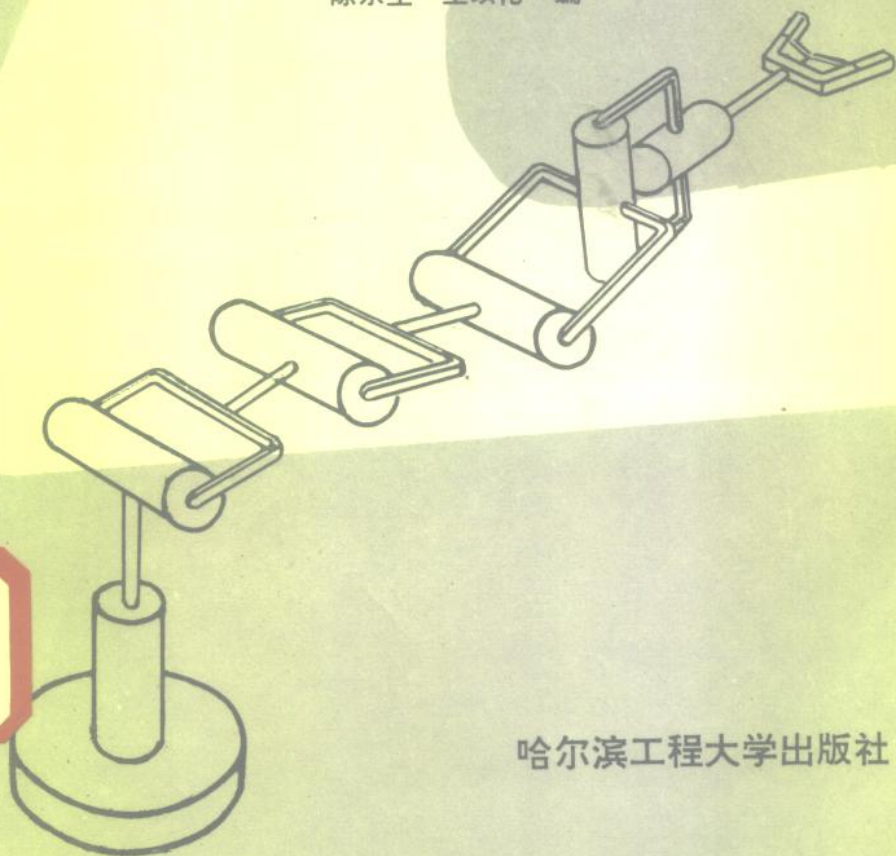


多刚体 动力学基础

陈乐生 王以伦 编



哈尔滨工程大学出版社

(黑)新登字第9号

内 容 简 介

本书综合了国内外被广泛采用的书籍、资料共编写成10章。第1章为虚位移原理;第2章讨论完整系统的拉格朗日方程;第3、4章介绍刚体定点转动的运动学和动力学;第5章为多刚体动力学基础;第6章分析空间齐次变换关系;第7至第10章讨论机器人运动学和动力学的分析方法;附录部分简单介绍了矢量和张量的基本运算。

本书可作为机械工程及自动化专业高年级本科生教学用书,也可供有关研究生和工程技术人员参考。

多刚体动力学基础

陈乐生 王以伦 / 编

责任编辑 李玉琴

哈尔滨工程大学出版社出版
新华书店经销
哈尔滨毕升电脑排版有限公司排版
哈尔滨工业大学印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 7.625 字数 193 千字
1995年3月 第1版 1995年3月 第1次印刷
印数: 1—2000册

ISBN 7-81007-416-4
TH·16 定价: 6.80元

前 言

机电结合、发展机电一体化技术，是机械行业现代化的必由之路。同时，它为工科院校机械工程有关的专业的教学工作带来了新的活力，提出了新的课题。其中，作为联结“机”与“控”的纽带中的一个重要环节是机械系统的动力学分析。

在机械系统的动力学范畴内，机械振动、机械动力学分析已经有了相当成熟的理论和相关的教材。而空间多自由度机械系统的动力学理论只是在 80 年代以来才得以迅速的发展。虽然有关的书籍、资料 and 文章很多，但适用于本科生学习的教材还不成熟。“多刚体动力学基础”正是为高年级机械工程和自动化专业的本科生而尝试编写的，我们相信它适应了机电一体化技术发展的需要，弥补了仅有理论力学知识所造成的不足。

多刚体动力学涉及的知识面很广，程度也很深，考虑到大学本科生的知识结构，本书在内容的衔接、渐进性、系统性和联系实际等方面作了认真的安排。本书将从虚位移原理入手，建立动力学普遍方程，再深入讨论完整系统的拉格朗日方程和刚体定点转动的运动学和动力学；最后以机器人这一典型的多自由度机电一体化机械系统为主要内容分析了空间齐次变换关系，机器人运动学和动力学。在动力学分析中，仅介绍拉格朗日方法和牛顿-欧拉方法。以求使得学生掌握住基本的多刚体系统的动力学分析方法。这是本书编写的特点。

由于编者水平所限，书中缺点、错误在所难免，敬请使用者

提出宝贵意见。

编者对本书中所参考的有关书籍、文章、资料的作者表示深切的谢意。

编 者

1994 年 7 月

目 录

1	虚位移原理	1
1.1	非自由系统的约束	1
1.2	广义坐标和自由度	4
1.3	虚位移原理	9
	习题 1	13
2	第二类拉格朗日方程	16
2.1	第二类拉格朗日方程	16
2.2	第二类拉格朗日方程的讨论	18
	习题 2	26
3	刚体定点转动运动学	28
3.1	刚体绕定点转动的欧拉定理	28
3.2	描述刚体定点转动的解析法	30
	习题 3	50
4	刚体定点转动的微分方程	52
4.1	刚体的质量几何	52
4.2	绕定点转动刚体的动量矩与动能	58
4.3	刚体绕定点转动的运动微分方程	59
	习题 4	67
5	多刚体系统动力学概述	69
5.1	多刚体系统动力学研究的对象	69
5.2	用常规方法建立多刚体系统动力学 分析的数学模型	71
6	齐次坐标及其变换	76
6.1	齐次坐标	76

6.2	齐次坐标的变换矩阵	80
6.3	齐次变换	83
	习题 6	103
7	机器人运动学	104
7.1	机器人的结构形式与坐标系	104
7.2	机械手系统变换方程和变换图	107
7.3	机器人运动学方程	110
7.4	两种典型操作手的运动学方程	127
	习题 7	134
8	机器人运动学方程的解	137
8.1	欧拉变换方程的解	137
8.2	RPY 变换方程的解	142
8.3	Sph 变换方程的解	143
8.4	机器人运动学方程解的实例	145
	习题 8	158
9	微分变换关系	160
9.1	微移动和微转动	160
9.2	相对于杆坐标系的微变换	168
9.3	各杆坐标系微变换的变换关系	173
9.4	操作手的雅可比矩阵	178
9.5	逆雅可比矩阵	186
	习题 9	193
10	机器人动力学	196
10.1	机器人的牛顿-欧拉法	196
10.2	机器人的拉格朗日方法	212
	习题 10	232
	附 录	234
	参考文献	238

1 虚位移原理

本章作为刚体动力学的基础介绍非自由质点系统的约束分类，引入广义坐标的概念，通过对坐标变分的讨论给出系统自由度的定义，最后由虚位移原理导出动力学普遍方程。

1.1 非自由系统的约束

多个质点的集合可以组成一个质点系统，根据系统的运动是否受到预先规定的几何及运动条件的制约可以分为自由系统和非自由系统。

对于非自由系统，那些预先规定的、与初始条件及受力条件无关的、限制系统的几何位置或（和）速度的运动学条件称为约束。约束有多种形式，这里只介绍其中两类。

1.1.1 完整约束与非完整约束

仅仅限制系统的几何位置（也称位形）的约束称为完整约束。若用 x_i 、 y_i 、 z_i 表示系统中某质点的笛卡尔直角坐标，那么 N 个质点组成的质点系统的完整约束的约束方程可写作

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N) = 0 \\ (k = 1, 2, \dots, r; \quad r < 3N) \quad (1.1.1)$$

完整约束又称为几何约束。

若不仅限制系统的位形，而且还限制系统的运动速度，这样的约束称为非完整约束。其约束方程取微分的形式。一个由 N 个质点组成的系统的非完整约束方程可写作

$$f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_N, \dot{y}_N, \dot{z}_N, t) = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, r; \quad r < 3N) \quad (1.1.2)$$

非完整约束因其表现出微分形式，因此又称为微分约束或运动约束。但是，如果约束方程可以积分，那么它又能从微分形式回到有限形式，其实质仍然是完整约束。

例 1.1 一个半径为 r 的轮子沿斜面向下作纯滚动（见图 1-1），分析轮子所受的约束。

解：轮子所受的几何约束为

$$y_c = r \quad (1.1.3)$$

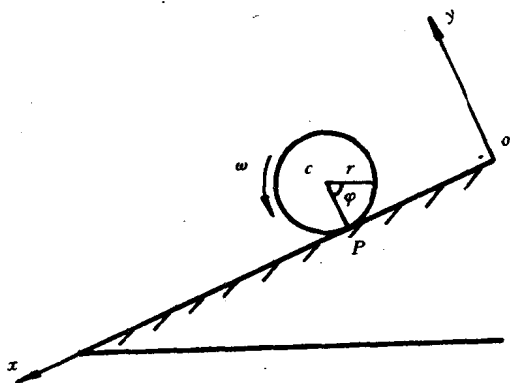


图 1-1 轮子的约束

又运动条件的限制是轮子作纯滚动时 P 点的速度为零，即

$$v_c - r\omega = 0 \quad (1.1.4)$$

$$\text{或} \quad \dot{x}_c - r\dot{\varphi} = 0 \quad (1.1.5)$$

这一约束方程显然是可积分的，即

$$x_c - r\varphi + c = 0 \quad (1.1.6)$$

故而轮子仍受完整约束，其约束方程为 (1.1.3) 式和 (1.1.6) 式。

例 1.2 质点 m_1 和 m_2 由一长为 l 的刚性杆相连，设该系统在图 1-2 所示 xoy 平面内运动。若要求杆中点 c 的速度保持沿杆轴方向，分析该系统的约束情况。

解：由于杆是刚性的，所以 m_1 与 m_2 必须满足的几何约束是

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = l^2 \quad (1.1.7)$$

而运动约束是 c 点的速度必须沿杆轴方向，即

$$\frac{\dot{y}_c}{\dot{x}_c} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \operatorname{tg} \theta$$

代入 m_1, m_2 坐标即为

$$\frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{\dot{x}_1 + \dot{x}_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad (1.1.8)$$

(1.1.8) 式说明系统受到一个非完整约束。

我们经常遇到的系统一般是非完整系统。非完整约束又分为一阶线性非完整约束、一阶非线性非完整约束、二阶非完整约束等。 N 个质点的系统受到 k 个一阶线性非完整约束时，其约束方程可以写作

$$\sum_{i=1}^N (a_{\lambda} \dot{x}_i + b_{\lambda} \dot{y}_i + c_{\lambda} \dot{z}_i) + d_{\lambda} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k) \quad (1.1.9)$$

或写作

$$\sum_{i=1}^N (a_{\lambda} dx_i + b_{\lambda} dy_i + c_{\lambda} dz_i) + d_{\lambda} dt = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k) \quad (1.1.10)$$

1.1.2 定常约束与非定常约束

约束方程中不显含时间 t 的约束称为定常约束。例如由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2 \quad (1.1.11)$$

所确定的约束。

约束方程中显含时间 t 的约束称为非定常约束。例如由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2(t) \quad (1.1.12)$$

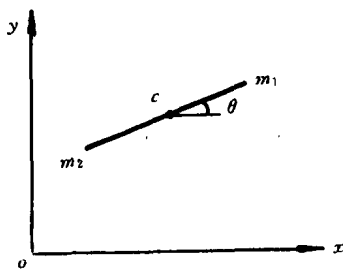


图 1-2 平面运动杆的约束

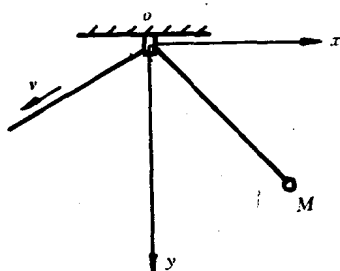


图 1-3 质点的非定常约束

所确定的约束。

例 1.3 设质点 M 所系绳子穿过 O 点, 如图 1-3 所示, 绳子另一端以一匀速 v 拉动使 M 在 xoy 平面内运动。试讨论 M 的约束。

解: 设 M 的起始位置为 l_0 , 则它到 O 点的距离 l 将随时间变化。其约束方程为

$$x^2 + y^2 = (l_0 - vt)^2 \quad (1.1.13)$$

显然, M 所受的约束是非定常约束。

1.2 广义坐标和自由度

1.2.1 广义坐标

系统的几何位置即位形可以用坐标参数来描述, 我们已经习惯于用笛卡尔直角坐标系来作这样的描述。然而, 根据问题的不同, 不一定非得采用长度坐标参数来描述系统的几何位置。

例如, 我们可以用直角坐标 (x, y) 来描述图 1-4 所示的作平面运动的动点 M 的几何位置; 也可以用极坐标 (φ, r) 来描述; 还可以用 (A, φ) 这组参数来表示, 其中 A 为图中阴影部分的面积; 还可以有其他的参数表示方法。这就是说, 动点 M 的几何位置可以用不同的参数组来描述, 即有了选择参数

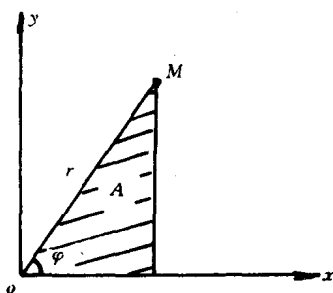


图 1-4 点 M 的广义坐标

的余地。为此，引入广义坐标的概念。

所谓广义坐标，就是选择一组互相独立的参数 $q_1, q_2, \dots, q_n$ ，只要它们能够确定系统的位形，而不管这些参数的几何意义如何。这样的一组参数就称为广义坐标。因此，上述中的 $(x, y), (\varphi, r), (A, \varphi)$ 等都可以作为描述 M 点的位形的广义坐标。可见，广义坐标对于某一系统来讲不是唯一的，或者说，可以任意选取。

广义坐标可以用下面的通式表示

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (1.2.1)$$

式中， $\mathbf{r}_i$ 表示系统中第 i 个质点的位形； q_j ($j=1, \dots, n$) 和 t 是广义坐标。

1.2.2 用广义坐标表示的非完整约束方程

(1) 速度的广义坐标表示

设 N 个质点组成的系统有 n 个广义坐标 q_j ($j=1, \dots, n$)，且 $q_j = q_j(t)$ ，则系统中第 i 个质点的速度是

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \quad (1.2.2)$$

式中， $\dot{q}_j$ 相应地称为广义速度。

$\mathbf{v}_i$ 可以写作如下投影形式

$$\begin{aligned} v_x = \dot{r}_{ix} = \dot{x}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \\ v_y = \dot{r}_{iy} = \dot{y}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial y_i}{\partial t} \\ v_z = \dot{r}_{iz} = \dot{z}_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial z_i}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

若系统为定常，由于

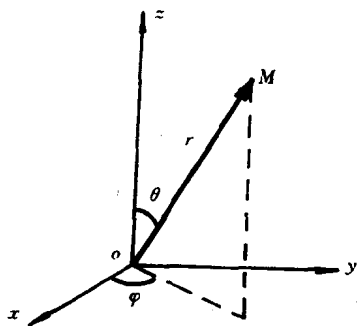
$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} = 0 \quad (1.2.4)$$

结果有

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (1.2.5)$$

例 1.4 空间中的一动点 M , 若选取极坐标 r, θ, φ 为广义坐标, 如图 1-5 所示, 则 M 点在笛卡尔直角坐标系中的位置是

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (1.2.6)$$



于是 M 点的速度为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \\ \dot{y} &= \frac{\partial y}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \\ \dot{z} &= \frac{\partial z}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

图 1-5 点 M 的速度

即

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi - r \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

于是, M 点的速度为

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \\ &= \sqrt{\dot{r}^2 + \dot{r}^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta} \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

(2) 用广义坐标表示的非完整约束方程

一阶线性非完整约束方程已由 (1.1.9) 式给出, 把第 i 个质点的速度的广义坐标表示代入该式得到

$$\sum_{i=1}^N \left[a_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) + b_i \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial y_i}{\partial t} \right) \right]$$

$$+ c_k \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial z_i}{\partial t} \right) + d_k = 0$$

$$(\lambda = 1, 2, \dots, k) \quad (1.2.10)$$

整理后可得

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N \left(a_{ki} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + b_{ki} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + c_{ki} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j$$

$$+ \sum_{i=1}^N \left(a_{ki} \frac{\partial x_i}{\partial t} + b_{ki} \frac{\partial y_i}{\partial t} + c_{ki} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right) + d_k = 0$$

$$(\lambda = 1, 2, \dots, k) \quad (1.2.11)$$

若令

$$A_{\lambda j} = \sum_{i=1}^N \left(a_{ki} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + b_{ki} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + c_{ki} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)$$

$$B_\lambda = \sum_{i=1}^N \left(a_{ki} \frac{\partial x_i}{\partial t} + b_{ki} \frac{\partial y_i}{\partial t} + c_{ki} \frac{\partial z_i}{\partial t} \right) + d_k \quad (1.2.12)$$

于是 (1.2.11) 式可首记为

$$\sum_{j=1}^n A_{\lambda j} \dot{q}_j + B_\lambda = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k) \quad (1.2.13)$$

上式即为用广义坐标表示的一阶线性非完整约束方程。上式也可以记为

$$\sum_{j=1}^n A_{\lambda j} dq_j + B_\lambda dt = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, k) \quad (1.2.14)$$

1.2.3 坐标变分和自由度

坐标的变分与坐标的微分是两个不同的概念。设某系统运动的微分方程的解是

$$q_1 = q_1(t), \dots, q_n = q_n(t) \quad (1.2.15)$$

所谓坐标的微分是指在上式所描述的真实运动中 (图 1-6 中的实线部分) 坐标的无限小变化, 即经过 dt 时间之后发

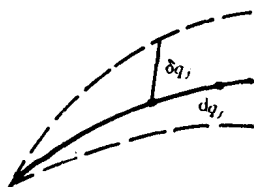


图 1-6 微分和变分

生的坐标变化 dq_j ；而坐标的变分则是指在某一时刻 t ， q_j 本身在约束许可条件下的任意的无限小增量，也就是系统的可能运动（图 1-6 中的虚线所示）与真实运动在某时刻的差，记作 δq_j 。由于都是坐标的无限小变化，故变分也表现出微分的形式，并且和微分具有相同的运算规则。

我们把系统独立的坐标变分数称为系统的自由度。

对于 N 个质点组成的力学系统，如果系统是自由的，则其位形的确定要 $3N$ 个坐标。这些坐标自然相互独立，其变分也相互独立，故自由度为 $3N$ 。如果系统受到 l 个完整约束，那么在 $3N$ 个坐标中，只有 $3N-l$ 个相互独立，并且它们的变分也相互独立，故其自由度为 $3N-l$ 个。如果系统为非完整系统，假设该系统除了 l 个完整约束之外，还受到 k 个非完整约束，该系统独立的坐标数为 $3N-l$ 个，但其独立的坐标变分数由于 k 个微分形式约束的存在只有 $3N-l-k$ 个，故系统的自由度为 $3N-l-k$ 个。

综上所述，若一个系统的广义坐标数为 n ，则：

完整系统： $n = \text{独立的坐标数} = \text{独立的坐标变分数} = \text{系统的自由度}$ 。

非完整系统： $n = \text{独立的坐标数} \neq \text{独立的坐标变分数} = \text{系统的自由度}$ 。

例 1.5 如图 1-7，一平面曲柄连杆机构， A 、 B 两点的位置可确定系统的位形，分析其自由度。

解：这是一个平面机构， A 、 B 共有 $2N=4$ 个坐标，系统要满足 3 个完整约束

$$\begin{aligned} x_A^2 + y_A^2 &= r^2 \\ (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 &= l^2 \\ y_B &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

该系统没有非完整约束，因此是一个完整系统，其自由度数为 $4-3=1$ ，独立的坐标数也是 1。若选取 φ 为广义坐标，当 φ 给定时，整个系统的位形也就确定

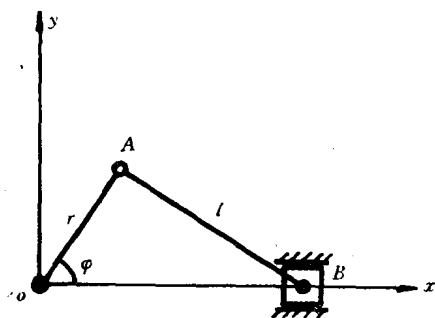


图 1-7 平面曲柄连杆机构

$$x_A = r \cos \varphi$$

$$y_A = r \sin \varphi$$

(1.2.17)

$$x_B = r \cos \varphi + \sqrt{l^2 + r^2 \sin^2 \varphi}$$

$$x_B = 0$$

1.3 虚位移原理

1.3.1 虚位移

系统从真实位形过渡到任何相邻近的可能位形的过程中，系统各质点所具有的与真实运动无关的、为约束所容许的无限小位移称为虚位移。位形的这种可能的变化与前面提到的坐标变分的概念是一致的，因此虚位移可以用坐标的变分来表示。

设某一非定常、完整系统，其中任一质点 M_i 的向径（位形）可以记为

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1.3.1)$$

对 $\mathbf{r}_i$ 取变分就可以得到 M_i 的虚位移，即

$$\delta r_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1.3.2)$$

其中, 按虚位移的定义, $\delta t = 0$, 故 r_i 变分中项 $\frac{\partial r_i}{\partial t} \delta t = 0$ 。

若把 (1.3.2) 式展开可写作

$$\delta r_i = (\delta r_i)_1 + (\delta r_i)_2 + \dots + (\delta r_i)_n \quad (1.3.3)$$

其中 $(\delta r_i)_j = \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \delta q_j \quad (1.3.4)$

由 (1.3.3) 式可以看出, 完整系统某质点的虚位移由 n 项组成, 每一项都和某一坐标的变分 δq_j 成正比, 即表示在该坐标变分不为零而其余坐标变分均为零时的虚位移。因此, 每一组虚位移相互独立, 质点的虚位移等于 n 组独立虚位移的线性组合。

对于非完整系统, (1.3.2) 式仍然成立, 但 (1.3.3) 式中每一组虚位移并不互相独立, 它们受到 k 个非完整约束方程的制约

$$\sum_{j=1}^n A_{\lambda j} \delta q_j = 0 \quad \lambda = (1, \dots, k) \quad (1.3.5)$$

这里, 独立的虚位移组数等于 $n - k$ 。上式是将式 (1.2.13) 的微分改为变分得到。

1.3.2 理想约束

工程实际中的约束大多可以近似地认为其约束反力在系统的任何虚位移上所作元功之和等于零, 我们把具有此类特性的约束称为理想约束。如刚性联结、滚动接触、光滑接触等。

按理想约束的概念, 如果系统中第 i 个质点所受约束反力用 R_i 表示, 虚位移用 δr_i 表示, 那么对于该系统下式成立

$$\sum_{i=1}^N R_i \cdot \delta r_i = 0$$

写作投影形式为

$$\sum_{i=1}^N (R_{ix} \delta x_i + R_{iy} \delta y_i + R_{iz} \delta z_i) = 0 \quad (1.3.7)$$

1.3.3 虚位移原理

我们都知道, 一个非自由系统处于静力平衡时, 系统中任一

质点应满足条件

$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = 0 \quad (1.3.8)$$

式中, $\mathbf{F}_i$ 表示作用于系统中第 i 个质点的主动动力; $\mathbf{R}_i$ 表示该质点的约束反力。如果给 i 质点一个虚位移 $\delta \mathbf{r}_i$, 则有

$$(\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (1.3.9)$$

对整个系统求和可得

$$\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (1.3.10)$$

若系统为理想约束系统, 把 (1.3.6) 式代入上式可得

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (1.3.11)$$

上式说明, 对于一理想约束的质点系, 其静平衡的充要条件是作用于系统上的主动动力在任何虚位移上所做的元功之和为零。这就是虚位移原理。

(1.3.11) 式的投影形式为

$$\sum_{i=1}^N (F_{ix} \delta x_i + F_{iy} \delta y_i + F_{iz} \delta z_i) = 0 \quad (1.3.12)$$

由 (1.3.2) 式可以得到质点 i 的虚位移的投影形式为

$$\begin{aligned} \delta x_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ \delta y_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ \delta z_i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

将它们代入式 (2.3.12) 后经交换求和顺序并整理可得

$$\sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) \right] \delta q_j = 0 \quad (1.3.14)$$

令

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \left(F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)$$