高等院校选用教材　工科类

高等数学习题课教程

（上　册）

龚漫奇　主编

科学出版社

高等院校选用教材(工科类)

高等数学习题课教程

(上册)

龚漫奇 主编

科学出版社

2000

内 容 简 介

本书是根据全国工科高等数学教学大纲的要求编写的，也是编者多年来从事高等数学教学、辅导工作的总结．全书分上、下两册．上册共六章：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用．每章分五部分：内容提要、基本例题、综合例题、习题、习题答案与提示．每册末尾还附有北方交通大学近几年来的一些期末试卷和解答．

本书可作为各类工科大学学习高等数学的辅导教材，也可作为高等数学的各类学习者的辅导用书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题课教程(上册)/龚漫奇主编．-北京：科学出版社，2000
高等院校选用教材(工科类)
ISBN 7-03-008562-0

Ⅰ．高… Ⅱ．龚… Ⅲ．高等数学-高等学校-教材 Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 61463 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2000年9月第 一 版 开本：787×960 1/16
2000年9月第一次印刷 印张：23
印数：1—5 000 字数：411 000

定价：28.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

序

数学作为自然科学的一个分支所研究的是现实世界中的客观存在:数与形以及它们之间的关系.由于从宏观的宇宙银河系到微观的粒子结构,从物质生产到人们的社会生活,无处不含有数与形,也就无处不含有运用数学描述、处理和解决那里出现问题的可能性.而且,随着人们对于自然界和社会认识的深化,愈来愈会显示数学对于人类文明发展的重要性.

数学与其他自然科学学科一样源于对于客观存在的观察和实验,以便从中发现其固有的规律性.然而,它之所以独立于其他学科的永恒的生命力在于它的抽象性与严密的逻辑推理.正是因为如此,学习数学使得能够熟练地运用它分析和解决问题决非易事.为此不仅要投入,而且要注意学习方法.后者尤其要重视,因为它会使你的投入适得其所,甚至有时会事半功倍.

在方法上,一般而言,要抓住如下几个环节:

博学 在掌握课堂上所学主要内容的基础上,广泛地阅读有关的文献,特别是参考书籍.本系列丛书照顾到了这种广度.

审问 多问几个为什么.问好为什么.不会提出问题,更不会提出合适的问题,就很难说掌握了所学的内容.本系列丛书照顾到了这方面,适度地提出了一定量的问题,并给出了提示,或解答,以引导读者养成这种习惯.

慎思 数学本身就是一门训练人的思维,增强人的智力的学问.不善于思索,不慎于思索,就难于了解数学,更不用说掌握它了.本系列丛书照顾到了人们在学数学中的思想发展,逐渐引导读者举一反三.

明辨 着力了解数学各分支之间的区别与联系.不区别无以深入,不能了解和掌握各分支的独特的思维方式和处理方法,更不能得其精髓.不联系无以高远,就难以发展了.本系列丛书照顾到了这种区别和联系.

笃行 最重要的还是亲自去做.不折不扣地做,由此及彼地做,异想天开地做.学习的过程就含有创造.在充分地作练习、解题中就会有所体现和体验.本系列丛书均着重于引导读者心体力行.

在方法得体的基础上,若能以"人一能之己十之,人十能之己百之"的精神去投入,就会取得'虽愚必明,虽柔必强'的效果.

虽然本系列丛书是面对工科,因为这里的作者均为工科执教数学多年,有

较丰富的教与学的经验.然而,并不意味这里的数学仅适用于工科,因为数学本身绝无纯粹与应用的明显界限,可以想象,本系列丛书对于理科也会不无裨益.

谨以此为序.

刘彦佩

前　言

“高等数学”是大专院校工科类专业的一门必修课，由于这是大学入学后的第一门数学课，与中学数学的连接有一定的跨度．加之该课程涉及内容广泛、知识点多且难，教学速度也比中学提高很多，因此学生都会感到难以适应这门课的学习，很难掌握这门课的内容，尤其面对众多的题目类型及有一定难度的考试压力时，更加容易使学生感到困惑和艰难．为了帮助这些初入大学的学生学好这门课程，同时也是为了这些学生报考研究生时有一本自己熟悉的复习参考资料，我们编写了这套《高等数学习题课教程》(上、下册)．

本书共分十二章：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分应用、空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数和微分方程．每章含五个部分：内容提要、基本例题、综合例题、习题和习题答案与提示，第一部分“内容提要”是该章的主要概念和结果的简单叙述，核心是第二、三部分．第二部分基本例题是为了帮助学生搞清基本概念，学会解题的基本方法，熟悉高等数学常见的题目类型，总之是为了帮助学生进入高等数学学习这个门．这部分例题中的大多数都是多年从事高等数学教学(包括习题课教学)的老师在教学中反复使用过的例题．第三部分是综合例题．这部分内容主要是根据多年的教学积累，在大量收集各种参考资料(包括各类试题、习题集、复习资料等)后，将具有代表性的题目编辑整理而成的．其目的是为了使学生能够更深入更全面的了解高等数学的解题思想，更广泛的接触各种题目类型，从而更好地掌握高等数学这门课程．第四、五部分是习题和习题答案，主要是为了学生学过例题以后，能够亲手练习，巩固学习效果．另外，书后还附有北方交通大学近三年的期末试卷及解答，可以供读者检查自己的学习效果，也可以了解大学期末试题的形式和难度．

为了读者使用本书时获得更好的效果，我们建议，首先应熟知每一章的内容提要，再看例题．看例题时，先只看题目，不看分析与解答，自己想一想，动手算一算，尽量能自己给出结果，然后再去看例题的分析和解答．也许有人会认为这样做太浪费时间，学习效率太低，尤其是经过思考没有得出正确的结论时．实际上经过多年的教学实践证明：在学习效果上，主动而深刻地对典型问题的思考要比被动的接受大量的解题信息好得多．而且就是在主动思考没有得到正解时也是如此，这是因为在长时间的思考没有得到正解后再看正确的

解答会给人留下更加深刻的印象. 另外,对于不是自己做出的习题或例题应注意其解题思路. 待过一段时间已经淡忘了该题的解题过程后,再重解该题看能否想起它的解题思路并给出正解,这也是一种较好的反复学习的方法.

本书编写的具体分工为:第一、二章由邓小琴编写,第三章由黎传奇编写,第四、六章由吴灵敏编写,第五章由郑神州编写,第七、八章由缪克英编写,第九章由龚漫奇编写,第十章由赵生变编写,第十一章由赵达夫编写,第十二章由王秋元编写. 全书最后由龚漫奇审校、定稿.

由于水平所限,书中缺点错误在所难免,敬请读者批评指正.

编者

目　　录

第一章　函数与极限

一、基本要求

1. 理解函数概念,包括反函数、复合函数、初等函数的概念.

2. 了解函数的四种特性,掌握基本初等函数及其图形.

3. 会建立简单的实际问题中的函数关系式.

4. 理解极限的概念,对定义中的“任给”、“存在”、“恒有”要具体理解.

5. 掌握极限的性质和四则运算法则,掌握极限存在的两个准则.

6. 会用两个重要极限求极限.

7. 理解无穷小与无穷大的定义以及无穷小阶的概念,掌握等价无穷小替代的方法.

8. 理解函数连续性的概念,会判断间断点的类型.

9. 了解闭区间上连续函数的性质,并会用它们证明一些问题.

重点:理解函数、极限和连续等概念.

重点题型:求函数的表达式和定义域;用极限定义证明极限;求极限;求函数的间断点并分类;用介值定理证明一些题.

二、内容提要

1. 函数概念.

2. 函数特性:有界性、单调性、奇偶性和周期性.

3. 极限定义.

4. 极限的性质:唯一性、有界性、保号性.

5. 极限的运算法则如下:

(1)设在同一极限过程中,$\lim f(x)$、$\lim g(x)$存在,则

$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$;

$\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\lim g(x)$;

$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$　(其中 $\lim g(x)\neq 0$).

(2)若 $\lim f(x)=0$,$g(x)$有界,则

$$\lim f(x)g(x)=0.$$

(3)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,且在 x_0 的某一去心邻域内 $\varphi(x)\neq a$,$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=A$.

6.无穷小与无穷大:

(1)无穷小与无穷大的概念以及关系.

(2)无穷小与极限的关系.

(3)无穷小的比较.

(4)无穷小的替换定理如下:

设 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,如果 $\lim\frac{\alpha'}{\beta'}=A$(或$\infty$),则

$$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}=A(\text{或}\infty).$$

注:乘积因子中的等价无穷小可以替换.

7.极限存在如下的两个准则:

准则Ⅰ:夹逼定理.

准则Ⅱ:单调有界数列必有极限.

8.两个重要极限及一些常用等价无穷小

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1;\ \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$

当 $x\to0$ 时,$\sin x\sim x$;$\tan x\sim x$;$\arcsin x\sim x$;$\arctan x\sim x$;

$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$;$\ln(1+x)\sim x$;$\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$;

$e^x-1\sim x$;$a^x-1\sim x\ln a$;$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x(\alpha\neq0)$.

9.函数在 x_0 点连续的定义如下:

设 $f(x)$在 x_0 点的某一个邻域内有定义,则

定义1:如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则$f(x)$在 x_0 点连续.

定义2:若 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,如果 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\Delta y=0$,则 $f(x)$在 x_0 点连续.

10.间断点的分类如下:

第一类间断点:若 x_0 点为 $f(x)$的间断点,且 x_0 点的左、右极限存在,则称 x_0 点为 $f(x)$的第一类间断点.若 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$,则称 x_0 点为 $f(x)$的可去间断点;若 $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$,则称 x_0 点为 $f(x)$的跳跃间断点.

第二类间断点:不是第一类间断点的任何间断点,称为第二类间断点.

11.初等函数在其定义区间内是连续的.

12.闭区间上连续函数的性质:

(1)最大值和最小值定理.

(2)有界性定理.

(3)介值定理与零点定理.

三、例题分析

基本例题:

例 1.1 判断下列各题中 f 与 g 是否为同一函数:

(1)$f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$;

(2)$f(x)=1, g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$;

(3)$f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}, g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$.

分析:当且仅当给定的两个函数,其定义域和对应法则完全相同时,才表示同一函数,否则就是两个不同的函数.

解:

(1)不同.因为 f 的定义域 D_f 为除零外的所有实数,而 g 的定义域 D_g 为全体正实数.

(2)相同.因为 f 与 g 的定义域和对应法则都相同.

(3)不同.因为 $D_f=(2,+\infty)$,而 $D_g=(-\infty,1]\cup(2,+\infty)$.

例 1.2 求下列函数的定义域:

(1)$f(x)=\lg(1-\lg x)$;

(2)$f(x)=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}+\dfrac{\sqrt{2x-x^2}}{\lg(2x-1)}$;

(3)$f(x)=\arccos\dfrac{x}{[x]}$,$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

分析:求复杂函数的定义域,就是求解简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.若 $f(x)$中含有$\dfrac{1}{\varphi_1(x)}, \sqrt[2n]{\varphi_2(x)}(n\in N), \log_a\varphi_3(x), \arcsin\varphi_4(x)$. $\arccos\varphi_5(x)$时,则 $f(x)$中的 x 必须满足下列不等式组:

$$\begin{cases} Q_1(x)\neq 0, \varphi_2(x)\geqslant 0, \\ \varphi_3(x)>0, |\varphi_4(x)|\leqslant 1, \\ |\varphi_5(x)|\leqslant 1. \end{cases}$$

解:

(1)要使 $f(x)$有意义,x 应满足

$\begin{cases} x>0 \\ 1-\lg x>0 \end{cases}$,即 $0<x<10$.故 $D_f=(0,10)$.

(2)要使 $f(x)$有意义,x 应满足

$$\begin{cases}\left|\dfrac{2x-1}{7}\right|\leqslant 1,\\ 2x-x^2\geqslant 0,\\ 2x-1>0,\\ 2x-1\neq 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-6\leqslant 2x\leqslant 8,\\ x(x-2)\leqslant 0,\\ 2x-1>0,\\ x\neq 1,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 4,\\ 0\leqslant x\leqslant 2,\\ x>\dfrac{1}{2},\\ x\neq 1,\end{cases}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}<x<1\text{ 或 }1<x\leqslant 2,$$

$D_f=\left(\dfrac{1}{2},1\right)\cup(1,2]$.

(3)要使 $f(x)$ 有意义，x 应满足

$$-1\leqslant\frac{x}{[x]}\leqslant 1,$$

且

$$[x]\neq 0,$$

而

$$x-1<[x]\leqslant x.$$

当 $x<0$ 时，$0<\dfrac{x}{[x]}\leqslant 1$；当 $0\leqslant x<1$ 时，$\dfrac{x}{[x]}$ 无意义；

当 $x\geqslant 1$ 时，$1\leqslant\dfrac{x}{[x]}$(当 $x\in N$ 时，等号成立). 故

$$D_f=\{x\mid x<0\text{ 或 }x=1,2,3,\cdots\}.$$

例 1.3　设 $f(x)=\begin{cases}-x^2,x\geqslant 0,\\ -e^x,x<0,\end{cases}$ $\varphi(x)=\ln x$，求 $f(\varphi(x))$ 的定义域.

分析: 求复合函数 $f(\varphi(x))$ 定义域的方法是解不等式组

$$\begin{cases}x\in D_\varphi\\ \varphi(x)\in D_f.\end{cases}$$

解:

由于 $D_f=(-\infty,+\infty)$，$D_\varphi=(0,+\infty)$，

因此　对 $\forall x\in D_\varphi$，$\varphi(x)\in D_f$. 故 $f(\varphi(x))$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

例 1.4　设 $f(x)=\sqrt{x^2-1}$，$g(x)=\sqrt{1-x^2}$，求 $f(g(x))$ 及 $g(f(x))$.

分析:

(1)两个函数能复合的充要条件是内层函数的值域与外层函数的定义域之交集非空.

(2)两个初等函数进行复合时，通常采用**代入法**. 即将一个函数的表达式代替另一个函数中的自变量，这样就得到这两个函数的复合函数.

解: 可知 $D_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，$D_g=[-1,1]$.

(1)先求 $f(g(x))$的定义域:

$$\begin{cases}x\in D_g\\ \sqrt{1-x^2}\in D_f\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[-1,1]\\ \sqrt{1-x^2}>1\end{cases}\Rightarrow x=0.$$

再由代入法:

$$f(g(x))=\sqrt{(\sqrt{1-x^2})^2-1}=\sqrt{-x^2}=0,x\in\{0\}.$$

(2)求 $g(f(x))$的定义域:

$$\begin{cases}x\in D_f\\ \sqrt{x^2-1}\in D_g\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|\geqslant 1\\ 0\leqslant\sqrt{x^2-1}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}.$$

由代入法得

$$g(f(x))=\sqrt{1-(\sqrt{x^2-1})^2}=\sqrt{2-x^2},1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{2}.$$

例 1.5 已知 $f(x)=\begin{cases}\ln x,x>0,\\ x,x\leqslant 0,\end{cases}g(x)=\begin{cases}x^2,x\leqslant 1,\\ x^3,x>1,\end{cases}$求$f(g(x))$.

解:方法一(先内后外法)

$$f(g(x))=\begin{cases}f(x^2),x\leqslant 1\\ f(x^3),x>1\end{cases}=\begin{cases}\left(\begin{cases}\ln x^2,x^2>0\\ x^2,x^2\leqslant 0\end{cases}\right),x\leqslant 1\\ \left(\begin{cases}\ln x^3,x^3>0\\ x^3,x^3\leqslant 0\end{cases}\right),x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\ln x^2,x^2>0\text{ 且 }x\leqslant 1\\ x^2,x^2\leqslant 0\text{ 且 }x\leqslant 1\\ \ln x^3,x^3>0\text{ 且 }x>1\\ x^3,x^3\leqslant 0\text{ 且 }x>1\end{cases}=\begin{cases}\ln x^2,x\leqslant 1\text{ 且 }x\neq 0,\\ x^2,x=0,\\ \ln x^3,x>1.\end{cases}$$

方法二(先外后内法)

$$f(g(x))=\begin{cases}\ln g(x),g(x)>0,\\ g(x),g(x)\leqslant 0,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\ln x^2,x\leqslant 1,\text{且 }g(x)>0,\\ \ln x^3,x>1,\text{且 }g(x)>0,\\ x^2,x\leqslant 1,\text{且 }g(x)\leqslant 0,\\ x^3,x>1,\text{且 }g(x)\leqslant 0,\end{cases}$$

因为 $g(x)>0\Leftrightarrow(x^2>0\text{ 且 }x\leqslant 1)$或$(x^3>0\text{ 且 }x>1)$

$$\Leftrightarrow(x\leqslant 1\text{ 且 }x\neq 0)\text{或}(x>1)\Leftrightarrow x\neq 0.$$

所以,$g(x)\leqslant 0\Leftrightarrow x=0$.故

$$f(g(x))=\begin{cases}\ln x^2, x\leqslant 1 \text{ 且 } x\neq 0,\\ \ln x^3, x>1 \text{ 且 } x\neq 0,\\ x^2, x\leqslant 1 \text{ 且 } x=0,\\ x^3, x>1 \text{ 且 } x=0,\end{cases}=\begin{cases}\ln x^2, x\leqslant 1 \text{ 且 } x\neq 0,\\ x^2, x=0,\\ \ln x^3, x>1.\end{cases}$$

例1.6　若 $f(x)$是二次有理整函数，且 $f(a)=f(b)=0\ (a\neq b)$，$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=m$.求 $f(x)$.

解:由题设 $f(a)=f(b)=0$,不妨设

$$f(x)=A(x-a)(x-b),$$

由

$$m=f\left(\frac{a+b}{2}\right)=A\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)$$
$$=-A\left(\frac{b-a}{2}\right)^2,$$

得

$$A=-\frac{4m}{(b-a)^2}.$$

所以

$$f(x)=-\frac{4m}{(b-a)^2}(x-a)(x-b).$$

例 1.7　已知 $H(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ 1, x\geqslant 0,\end{cases}$试将 $f(x)=H(x)-H(x-1)$表示成分段函数.

解:因为 $H(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ 1, x\geqslant 0,\end{cases}$　　所以

$$H(x-1)=\begin{cases}0, x<1,\\ 1, x\geqslant 1.\end{cases}$$

当 $x<0$ 时

$$H(x)-H(x-1)=0;$$

当 $0\leqslant x<1$ 时

$$H(x)-H(x-1)=1;$$

当 $x\geqslant 1$ 时

$$H(x)-H(x-1)=0.$$

故

$$H(x)-H(x-1)=\begin{cases}0, x<0,\\ 1, 0\leqslant x<1,\\ 0, x\geqslant 1.\end{cases}$$

例 1.8 设 $f(x+2)=2^{x^2+4x}-x$,求 $f(x-2)$.

解:为了求 $f(x-2)$,先求 $f(x)$.下面给出求 $f(x)$的两种常用的方法.

方法一

$$f(x+2)=2^{(x+2)^2-4}-(x+2)+2,$$

故

$$f(x)=2^{x^2-4}-x+2.$$

方法二

令 $x=t-2$,代入原式得

$$f(t)=2^{t^2-4}-t+2,$$

故

$$f(x)=2^{x^2-4}-x+2.$$

因此

$$\begin{aligned}f(x-2)&=2^{(x-2)^2-4}-(x-2)+2\\&=2^{x^2-4x}-x+4.\end{aligned}$$

例 1.9 设 $f(x)=2^{x-1}+\dfrac{1}{2^{x+1}}$. 证明:$f(x+a)+f(x-a)=2f(x)\cdot f(a)$.

证: $f(x+a)+f(x-a)$

$$\begin{aligned}&=2^{x-1}\cdot 2^a+\frac{1}{2^{x+1}\cdot 2^a}+\frac{2^{x-1}}{2^a}+\frac{2^a}{2^{x+1}}\\&=2^a\left(2^{x-1}+\frac{1}{2^{x+1}}\right)+\frac{1}{2^a}\left(2^{x-1}+\frac{1}{2^{x+1}}\right)\\&=f(x)\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)\\&=2f(x)\left(2^{a-1}+\frac{1}{2^{a+1}}\right)=2f(x)\cdot f(a).\end{aligned}$$

例 1.10 设 $f(x)=e^x+2, f(\varphi(x))=x^2$,求 $\varphi(x)$.

解:因为 $f(x)=e^x+2$,得 $f(\varphi(x))=e^{\varphi(x)}+2$. 又 $f(\varphi(x))=x^2$,所以有下列等式:

$$e^{\varphi(x)}+2=x^2,$$

$$\varphi(x)=\ln(x^2-2), x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty).$$

例 1.11 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$;

(2) $y=\begin{cases} x, x<1, \\ x^3, 1\leqslant x\leqslant 2, \\ 3^x, x>2. \end{cases}$

解:

(1)将例 1.11(1)两边立方得

$$y^3=x+\sqrt{1+x^2}+3(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}})^2(\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}})$$
$$+3(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}})(\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}})^2+x-\sqrt{1+x^2},$$

因为

$$\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}=-1,$$
$$y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}},$$

可化简为

$$y^3=2x-3y,$$

从而得

$$x=\frac{1}{2}(3y+y^3),$$

故反函数为

$$y=\frac{1}{2}(3x+x^3).$$

(2)当 $x<1$ 时,$y=x$,故反函数为 $y=x, x\in(-\infty,1)$.

当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$y=x^3$,故反函数为 $y=\sqrt[3]{x}, x\in[1,8]$.当 $x>2$ 时,$y=3^x$,故反函数为 $y=\log_3 x, x\in(9,+\infty)$.综上所述,所求反函数为

$$y=\begin{cases} x, x<1, \\ \sqrt[3]{x}, 1\leqslant x\leqslant 8, \\ \log_3 x, x>9. \end{cases}$$

说明:

(1)只有一一对应的函数才有反函数.

(2)求反函数的步骤是:从 $y=f(x)$ 中解出 x,将所得表达式中的 x 与 y 对换,即得所求函数的反函数.

例 1.12 设 $f(x)$ 满足关系式:$af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=e^x(|a|\neq|b|)$,试求 $f(x)$ 的表达式.

解:由原方程以及把原方程中的 x 换为 $\frac{1}{x}$ 可得