

稳定理论

上 卷

〔德意志民主共和国〕 G·毕尔格麦斯特 H·斯托依普 著

中国工业出版社

52.53
222
21

稳 定 理 論

上 卷

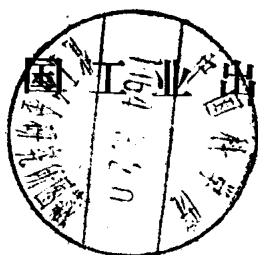
〔德意志民主共和国〕 G·毕尔格麦斯特 H·斯托依普 著

戴天民 赵其昌 陈醒輝
張庆彬 白紹良 王生傳

譯

俞 載 道 校

中 國 工 業 出 版 社



内 容 简 介

本书叙述结构稳定性的基本理论和计算方法。书中详细地说明结构稳定的基本概念和理论，并系统地讨论了杆件稳定性的平衡求解法和能量求解法，包括极限荷载理论。这里既有精确的解法，又有近似解法，如逐次迭代法、李兹法、迦辽金法、差分法及积分方程法等。此外，还讨论了薄壁杆件中较复杂的翘曲扭转、弯扭屈曲和侧屈曲等稳定问题。书中对于不同情况的受压杆件都给出了计算公式，并附有大量的计算例题。

原书目的之一是对德意志民主共和国钢结构稳定规范 (DIN 4114) 作理论解释，同时又为德意志民主共和国高教总署审定为高等学校教科书。

本书系根据德意志民主共和国柏林科学出版社 1957 年出版的版本译出，后又按 1959 年再版本校订。凡再版本已经修订的，本书均已按照修正。

本书可供一般土建结构专业工程师、研究人员以及高等学校师生参考。

GUSTAV BÜRGERMEISTER HERBERT STEUP

STABILITÄTSTHEORIE

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN—1957

稳 定 理 论

上 卷

戴天民 赵其昌 陈醒辉 译
张庆彬 白绍良 王生传

俞 载 道 校

建筑工程部编辑部编辑 (北京西郊百万庄)

中国工业出版社出版 (北京佟麟阁路丙 10 号)

(北京市书刊出版事业许可证出字第 110 号)

中国工业出版社第一印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 · 各地新华书店经售

开本 $787 \times 1092 \frac{1}{16}$ · 印张 22 · 字数 524,000

1964 年 2 月北京第一版 · 1964 年 2 月北京第一次印刷

印数 0001—3100 · 定价 (10-7) 3.05 元

统一书号: 15165 · 2670 (建工-339)

序

近几十年来，鋼結構是向充分發揮結構物中的潛在能力方面发展，以利用材料的性能。由此，輕型薄壁构件的应用也相应地得到了发展。但是，由于結構的稳定問題日益重要，采用傳統力学的簡單方法已不能准确地分析这类結構的性能。为适应发展的要求，建筑統一技术规范协会决定，根据著名的科学家們提供的許多研究成果，制訂稳定問題的一般計算规范，即德意志民主共和国工业规范 DIN 4114，其中包括屈曲、側屈及凸曲等稳定問題。

本书试图指出和討論其中許多問題，并相应地选择了大量例題，以說明这些理論和规范 DIN 4114 中的計算公式的应用。

本书若干地方已超出一般理論的范围，而提出了較深的概念，例如，以理論为主的有限变形以及采用能量法求解稳定判別式等問題。在討論解固有值問題的数学近似計算方法时，給出了参考文献中常用的計算方法的总覽。讀者可以由此得到繼續深入研究提高的資料。关于杆件系統及空間結構的稳定問題将在下卷中討論。

对于工程技术荣誉博士、教授 E. 格瓦拉 (Ernst Chwalla) 先生友好地遺留給作者当时的规范 DIN 4114 的初稿，作者在此再次表示謝意。

此外，工学士 H. 哥列次瑪 (Horst Kretzschmar) 先生为本书做了例題計算，并不辞辛苦地参加了本书的校閱工作，作者在此致以衷心的感謝。

出版社随时照顾到作者的願望，排印出外表美觀的书，作者对此也表示謝意。

著 者

1957 年夏天，于德累斯頓城

06802

目 录

序

第一章 平衡稳定导论	1
1.1 结构静力研究中的稳定验算	1
1.2 稳定问题与应力问题的对比	1
1.21 一阶理论的应力问题	6
1.22 二阶和三阶理论的应力问题	9
1.23 具有平衡分枝的稳定问题	12
1.24 无平衡分枝的稳定问题	16
第二章 按平衡法求解稳定问题	21
2.1 概論	21
2.2 保向中心受压理想弹性杆件	21
2.21 分枝荷载的简化计算	21
2.211 两端铰接的压杆	21
2.212 各种不同嵌固条件下的压杆	25
2.213 弹性嵌固的压杆	27
2.214 具有弹性可动横向支承的压杆	28
2.215 具有连续弹性基座的压杆	29
2.216 在温度作用下的压杆	32
2.217 截面惯性矩变化的压杆	33
2.218 具有变化法向力的压杆	35
2.22 在超临界和低临界范围内较精确的探讨	38
2.221 弹性压缩对分枝荷载的影响	38
2.222 剪切变形对分枝荷载的影响	39
2.223 超临界范围	40
2.3 具有初弯矩的压杆	46
2.31 受横向荷载的偏心受压杆件的变形状态	46
2.311 横向荷载作用于跨中的压杆	46
2.312 具有同侧相等力臂的偏心受压杆件	47
2.313 具有异侧相等力臂的偏心受压杆件	47
2.314 受按正弦曲线形状分布的横向荷载作用的压杆	48
2.315 具有初弯轴的压杆	49
2.32 平衡分枝的充分判定式	49
2.33 应力问题的迭代解法	51
2.4 非保向力作用时, 由理想弹性材料制	

成的中心受压杆件	53
2.41 保切向端点荷载作用下的一端固定压杆	53
2.42 受保极荷载作用的一端固定压杆	54
2.43 受连续保切向力作用的压杆	56
2.5 保向力作用下, 由弹塑性材料制成的中心受压杆件	56
2.51 概述	56
2.52 屈曲实验	56
2.521 泰特马耶 (Tetmajer) 实验	56
2.522 卡門 (Kármán) 实验	57
2.523 鋼结构协会 (Deutscher Stahlbauverband) 的实验	57
2.53 恩格塞-卡門 (Engesser-Kármán) 的塑性屈曲理论	59
2.531 基本考察	59
2.532 分枝荷载的计算	60
2.533 不同截面形状的屈曲模量	62
2.54 建筑鋼的强化现象对屈曲应力的影响	63
2.55 按 DIN 4114 压应力-压缩法则所决定的屈曲应力	64
2.56 山雷 (Shanley) 效应	66
2.561 基本考察	66
2.562 “利得 (Ryder) 模型”的应力和变形	67
2.563 山雷效应和压杆的设计	70
2.6 在保向力作用下由弹塑性材料制成的偏心受压杆件	70
2.61 基本考察	70
2.62 极限荷载较严密的计算	71
2.621 卸载区域的意义	71
2.622 力矩和曲率的相互关系	73
2.623 挠曲线微分方程式的图解积分	75
2.624 细长比和最大挠度的相互关系	76
2.625 平均压应力与最大挠度之间的相互关系	77
2.626 长细比和极限应力间的相互关	

S0800

系	78	4.24 試解函数的适当选择	149
2.63 計算极限荷载的近似法	79	4.25 恩格塞-維安納罗(Engesser Vianello)	
2.631 正弦形挠曲綫的假設与建筑鋼的变形法則	79	图解法	151
2.632 在理想的彈塑性变形法則下正弦形挠曲綫的假設	82	4.26 施瓦茲(Schwarz)常数法	152
2.633 选择預定中心受压杆件截面的 ω 方法	88	4.3 李茲(Ritz)法	154
2.634 用杆件表征值直接选择压杆截面	93	4.31 概說	154
2.635 預定偏心压杆和具有横向荷载的压杆的設計方法	94	4.32 变分問題的基本要点	154
2.7 弹性理論中平衡法的一般試解	100	4.33 李茲对变分問題的簡化	155
2.71 基本考察	100	4.34 应用	156
2.72 应力状态	101	4.341 单力作用下的压杆	156
2.721 无限小位移理論的試解	101	4.342 自重作用下的压杆	158
2.722 有限位移理論的試解	103	4.4 迦辽金(Galerkin)法	159
2.73 位移状态	105	4.41 概說	159
2.74 应变状态	105	4.42 由变分問題而来的推导	160
2.75 弹性法則	108	4.43 应用	161
2.751 无限小位移理論的試解	108	4.431 单力作用下的压杆	161
2.752 有限位移理論的試解	109	4.432 自重作用下的压杆	162
2.76 随遇平衡状态的微分方程	110	4.433 慣矩分段变化的压杆	163
第三章 用能量法解稳定問題	117	4.5 差分法(Differenzenverfahren)	164
3.1 概述	117	4.51 概說	164
3.2 能量法的导演	117	4.52 差分方程的推导	165
3.21 內力的变形功和势能	117	4.53 在压杆上的应用	166
3.22 外力的功与势能	119	4.54 高級近似的差分式	167
3.23 虚位移原理	121	4.6 級数試解法	168
3.24 弹性势能的逗留值原理	124	4.61 概說	168
3.25 非守恒系統	125	4.62 幂級数試解的一般展开	168
3.26 稳定平衡、随遇平衡和不稳定平衡的能量判別式	126	4.63 在压杆上的应用	169
3.27 “滾珠模拟”的觀察	129	4.7 最低特征值上下限的計算	170
3.3 能量方法的应用	130	4.71 概說	170
3.31 彈簧鉸接并接受横向荷载的刚性杆	130	4.72 与相关可解問題的比較	170
3.32 彈簧鉸接的受压刚性杆	130	4.73 施瓦茲(Schwarz)圈定法	171
3.33 受横向荷载的抗弯杆件	131	4.74 董克萊(Dunkerley)求下限法	171
3.34 軸向受压的抗弯杆件	133	4.75 苏斯威尔(Southwell)下限	174
3.35 能量試解的簡化写法	138	4.8 积分方程法	175
第四章 計算分枝荷载的近似法	142	4.81 概說	175
4.1 概論	142	4.82 压杆挠曲曲綫的积分方程(第二种欧拉情形)	175
4.2 逐次漸近法	143	4.83 横向受力压杆挠曲曲綫的积分方程	177
4.21 簡單特征值問題的迭代規則	143	4.84 积分方程的迭代解法	178
4.22 迭代法的收斂性	144	4.85 “挠度法”	178
4.23 自輻性及正交性	146	4.86 葛兰麦(Grammel)法	181
		第五章 多肢压杆	185
		5.1 概論	185
		5.2 中心受压的框架式杆件	185
		5.21 屈曲荷载和比較細長比	185
		5.22 恩格塞近似公式的推广	189

5.23 由对角放置的两个角钢组成的 压杆	190	6.43 问题的欧拉方程式	236
5.24 单个肢杆细长度的限界条件	190	6.44 扭轴受约束时的弯扭屈曲	237
5.3 中心受压的格子式杆件	192	6.5 各种不同截面形状和荷载作用偏心距 情况下挺直压杆的稳定情形	238
5.31 屈曲荷载和比较细长比	192	6.6 按平衡法解侧屈问题	240
5.4 横撑的计算	194	6.61 概述	240
5.41 理想横力的推导	194	6.62 梁的受压翼缘的屈曲	241
5.42 缀板的设计	196	6.63 侧屈问题的第一个解答——按普兰德 尔(Prandtl)	241
5.5 偏心受压的多肢杆件	197	6.631 平衡条件的建立	241
第六章 弯扭屈曲和侧向屈曲	200	6.632 微分方程的解	243
6.1 概論	200	6.633 理想的侧屈荷载和侧屈应力	244
6.2 基本考察	201	6.64 梁的普遍侧屈问题	244
6.21 中心受压杆件的扭转屈曲	201	6.641 平衡条件的建立	245
6.22 中心受压杆件的弯扭屈曲	203	6.642 克希霍夫-克雷布平衡条 件	248
6.23 翘曲力扭转理论	204	6.643 微分方程的联立	249
6.231 剪力中心	204	6.644 几何与力学的边界条件	250
6.232 圣维南扭转与翘曲力扭转	209	6.65 对各种边界条件和荷载情形求解微分 方程式	252
6.233 开口薄壁截面的翘曲正应力	210	6.651 双对称截面悬臂梁的理想侧屈 荷载	253
6.234 自然扭转静止轴	211	6.652 夹支梁的理想侧屈荷载	255
6.235 翘曲剪应力	212	6.653 在大小相等方向相反的边缘力 矩作用下轴向受压梁的侧屈力 矩	259
6.236 翘曲扭矩和翘曲抗矩	213	6.654 在成一定比例的边缘力矩作用 下梁的理想侧屈力矩	260
6.237 几种截面的剪力座标与翘曲抗 矩的计算	214	6.655 梁在任意压力与两个大小相等 方向相反的端力矩作用下的理 想侧屈荷载	261
6.3 按平衡法解弯扭屈曲问题	219	6.656 在不等端力矩作用下轴向受压 梁的侧屈荷载	261
6.31 单对称截面的中心受压杆件	219	6.657 悬吊矩形梁的理想侧屈荷载	262
6.311 平衡条件的建立	219	6.66 侧屈问题的能量法	264
6.312 微分方程的解	221	6.661 随遇状态能量判别式的推 导	264
6.313 弯扭屈曲荷载和比较细长比	222	6.662 欧拉方程式和力学边界条件	265
6.314 其他边界条件的近似公式	223	6.663 具有约束扭转的侧屈	266
6.32 单对称截面的偏心受压杆件	224	例 题	270
6.321 平衡条件的建立	224	附 录	336
6.322 微分方程的解	226		
6.323 几何的与力学的边界条件	227		
6.324 夹支情况下的弯扭屈曲荷载与 比较细长比	228		
6.325 对一般边界条件的比较细长 比	229		
6.326 扭转静止轴的位置	231		
6.4 按能量法解弯扭屈曲问题	232		
6.41 概述	232		
6.42 能量基本公式的推导	232		

第一章 平衡稳定导論

1.1 結構靜力研究中的稳定驗算

研究結構靜力的目的，在于保證一个正在架設的或已完成的結構物，在它的尺寸和荷載已知的情況下对破坏具有足够的安全度。单个构件或整个結構失去作用，可用应力和位移状态的特定限值来标出。据此，結構靜力研究包括下列項目：

a) 在靜載和动載以及溫度作用下，材料的强度不应超过容許值；容許值是将安全系数除以流限或破坏应力而得(应力驗算)。在持久負荷的情況下，則必須对持久破坏保證有足够的安全(持久强度驗算)。

b) 对于特定的位移分量，如梁的中点挠度，应加以限制，以便保證結構物能滿足使用的要求。

c) 构件以及整个結構必須具有足够的穩固性和滑动安全度。同时，必須保證結構物不与其基础分开。

d) 此外，还必须研究单个构件或整体結構的承載能力是否会由于荷載的微量增加而使变形突然剧增的这种可能性而受到損害。在达到这种“临界”状态时，結構丧失了它在原来位置时的“稳定性”，而趋近于当变形进一步增大而导致的破坏。

以后我們將研究以上所述的最后一类現象，而在数学处理上則归結为所謂“稳定問題”的研究。我們將了解，这类問題的特征是：在特定荷載的范围内，平衡是多值的。因此，一定的已知荷載可能与很多的平衡位置相对应，而它們对于微小干扰的稳定程度是各不相同的。

在广义上，稳定問題的提法如下：对一已知尺寸而且可以变形的結構体系，如在特定荷載作用下有很多个具有不同程度稳定性能的平衡状态，則这些平衡状态将会使最小位能原理得到滿足^①。如按能量观察的方法，离开平稳位置的微小干扰所需要消耗的正的外功的平衡状态，称为“稳定的”。相反，假如在微小的干扰情況下，体系离开了原来位置而且做了功，則平衡是“不稳定的”。“随遇”平衡的限界状态的标志是：在平衡位置的微小干扰变形时，所作的功等于零。

随遇平衡也可以包括在“不稳定”平衡的概念之內。

在后面(3.26)，我們还要更深入地来研究“稳定判別式”^②問題。

1.2 稳定問題与应力問題的对比

我們凭經驗知道，橫向受弯杆件的承載能力，在軸向压力作用下，将要惊人地降低。

① 例如，众所周知的在化学反应中的最小强制原理，亦同样可在靜力和动力过程中用位能形式来表达。

② 必須严格地分清运动过程中的“动力稳定”和构成我們討論主題的“靜力稳定”的区别。“动力稳定”是指一不受外界影响的体系，其位能在正的阻尼情況下随时間而衰减。若在負的阻尼情況下能量增大；那末，在能量上來說，体系是不稳定的。

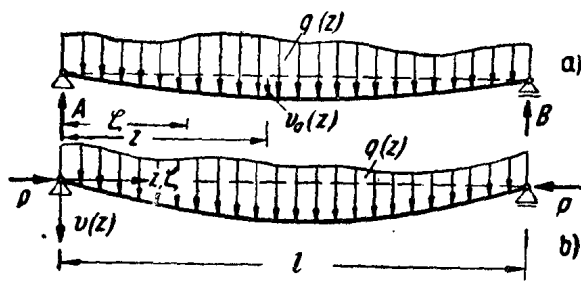


图 1

a) 横向受力的梁; b) 附加轴向压力的作用

分組成，即由横向荷载所产生的基本部分

$$M_q(z) = A \cdot z - \int_0^z q(\zeta) \cdot (z - \zeta) d\zeta$$

$$A = \frac{1}{l} \int_0^l q(z) (l - z) dz$$

以及由轴向压力 P 在已变形的梁上所产生的未知的附加部分①：

$$M_P(z) = P \cdot v(z)$$

因此，梁的上下边缘应力为

$$\sigma_{o,u} = \frac{P}{F} \pm \frac{M_q(z)}{W_{o,u}} \pm \frac{P \cdot v(z)}{W_{o,u}}$$

式中： $W_{o,u}$ ——抗弯模量，

F ——截面面积。

为了计算应力和变形状态，特别是为了判断横向受压杆件的稳定性，我们必须引用与变形有关的精确理论。

稳定理论属于普遍的“变形理论”。在悬桥、拱桥和悬索结构的静力研究上也应用到这种理论。在处理稳定问题时，我们放弃“古典”理论的方法，而且相反地，必须研究在变形体系上的力的作用。

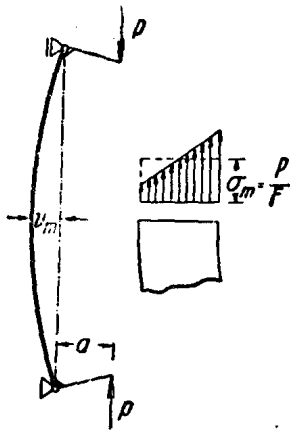
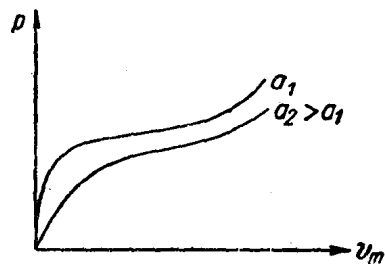


图 2 由理想弹性材料制造的偏心受压杆件

首先，我们不拟对图 1 所示体系的比较复杂的问题来进行深入探讨，而先来说明平面偏心受压杆件（图 2）的几个比较简单的关

图 3 对于不同偏心荷载情况下最大挠度 v_m 与 P 的关系

① 压力 P 在以后永远采用正号。

系。同时，暂时将以后要推导的某些理论先拿来应用一下。

由理论弹性材料制成的、原来挺直的杆件，在荷载增加时，对于不同偏心 $a_2 > a_1$ 的力与变形关系曲线，如图 3 所示。

特殊情形 $a=0$ 除外，每一荷载都与一个单值变形相对应。它可用杆件 midpoint 挠度 v_m 来表示。这个平衡是属于稳定类型的，因为如要增大中点挠度只有作外功才有可能。所以，比值 $dP : dv_m$ 永远是正的。图 2 所示平衡位置的干扰（譬如是由于一个暂时作用的微小横向荷载所引起的），在完全弹性的假定下，如把干扰因素撤去后，就恢复原状。这个结论只具有理论意义，因为钢材是有限弹性的，当变形在“比例极限”以上时，它成为弹塑性类型。按照这种想法，如将使用应力 σ_{vorh} 和比例极限 σ_P 作比较的话，我们就可以得到一个设计依据。由于当应力高于流限或压缩极限时就出现比较大的残余变形，因此要适当地保证使用应力不达到流限，使

$$\nu_F(\sigma_G + \sigma_N) = \sigma_F$$

这里， σ_G 和 σ_N 分别表示由自重和有效荷载所引起的使用应力， ν_F 是选定的安全系数，而 σ_F 是在受拉时表示流限，受压时为压缩极限。

当偏心逐渐变小即 $a \rightarrow 0$ 时，力与变形关系曲线趋向于一个特殊的极限情形（图 4 和图 5）。在偏心力作用时，变形随着荷载的增大而连续地增加，但在准确的中心荷载作用时，变形与荷载关系的特征曲线蜕变为一个不连续的图形。一特定的临界荷载与不连续点相对应。当荷载小于临界荷载时，只有挺直杆轴的平衡位置才是可能的。由于准确的中

心受力作用以及线性弹性规律是理想化了的假定，故将这个理想的临界荷载用指标“ Ki ”表示，也称为欧拉荷载①。

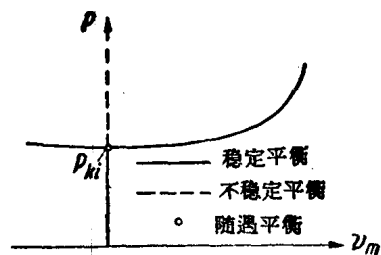
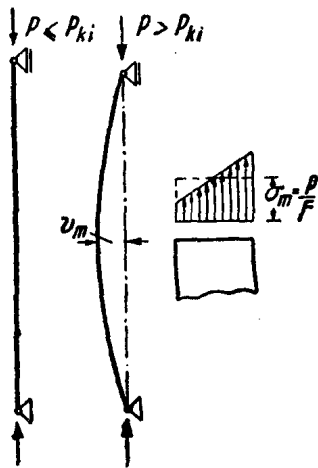


图 4 理想弹性材料制造的中心受压杆件

图 5 中心受压杆件的最大挠 v_m 与荷载 P 的关系

当 $P > P_{Ki}$ ，在准确中心力作用时，带有挺直杆轴的平衡图形在理论上是可能的。在有极其微小的干扰的情形下（也许是受有一很小的横向荷载临时作用），结构即寻求新的平衡位置，如图 5 力与变形关系曲线的实线分枝所示。由此可见，大于 P_{Ki} 时的具有挺直杆轴的平衡图形是靠不住的，亦即是不稳定的。因为与所谓“越过临界”范围 $P > P_{Ki}$ 相对应的变形曲线的稳定分枝向两面分开，所以，人们称之为“具有平衡分枝的稳定问题”。在超过临界荷载时，屈曲现象可能突然发生，亦即杆件屈曲了。

① 中心受压杆件的分枝荷载，首先是由 L. 欧拉于 1744 年所得出的[1]。

如将简化的应力与应变曲线(如图6所示)作为弹塑性材料(例如建筑钢)应力应变关系的基础,那末,图3的性质有很大的变化。在理想弹性材料的前提下,假如力与变形关系曲线(包括极限情形 $\alpha=0$ 在内)是单调增加 $\frac{dP}{dv_m} > 0$ 的话,则在有限弹性材料的情况下,会出现荷载的最大值(图7和图8)。在所谓“极限荷载”,即最大值 P_{Kr} 的左边,受力杆件的最大挠度只有当荷载增加时才会增大。因此,在到达曲线的顶点以前,内力与外力之间的平衡是稳定的。

因为当荷载 $P > P_{Kr}$ 时,不再有平衡图形与之对应,于是整个过程变为一个动力问题。关于动力问题,不在我们讨论范围以内。重要的是:按照力与变形关系曲线,相应于 $v > v_{Kr}$ 的平衡图形不可能是稳定的,因为极其微小的干扰也足以迫使杆件离开平衡位置。因此,在达到极限荷载 P_{Kr} 时,杆件的承载能力已经耗尽。

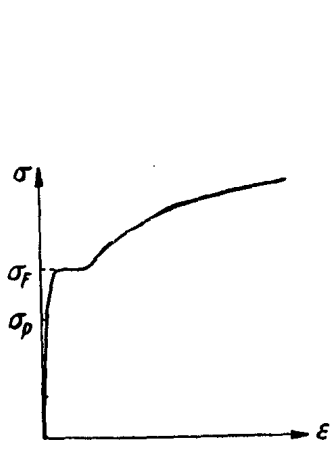


图6 建筑钢应力与应变的简化曲线

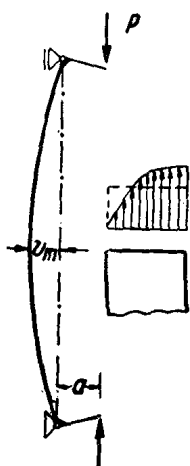


图7 由弹塑性材料制成的偏心受压杆件的

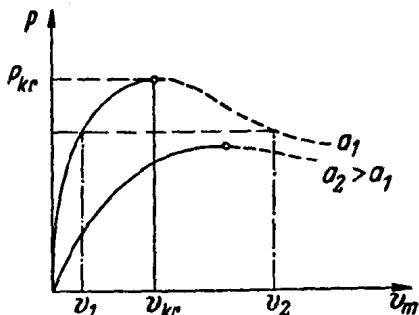


图8 偏心受压钢杆的最大挠度 v_m 与荷载 P 的关系

这时,杆件的工作情况是这样的:在受力最大的截面的塑化区随着荷载的增大而增大时,杆件内部对于强迫变形的抵抗能力亦在减弱;以致最后,促使变形的力的影响大大超过促使稳定的内力。若超过极限荷载,那末,就动力的意义而言,杆件屈曲直到破坏为止。在解答曲线中,在临界纵标的右边,递减着的轴向力与增长着的挠度相对应。对于工程实际有意义的,只是以 P_{Kr} 为极限荷载的稳定平衡状态部份,至于杆力减小而变形增大的部份,则仅有理论上的意义。这里,有这样一个稳定问题,即当荷载 $P < P_{Kr}$ 时,在解答曲线 $P(v_m)$ 中有两个特定的挠度 v_1 和 v_2 。

假如已经超过相应于最大挠度 v_{Kr} 的极限荷载 P_{Kr} 的话,那末,对应于 $P = \text{常数}$ 、挠度为 v_2 的平衡位置只有在荷载连续变化时才能达到。若压力在超过 v_{Kr} 以后按下降分枝连续减少的话,那末,解答曲线上的变形 $v_m > v_{Kr}$ 才算有意义。由于在这个范围内的平衡位置是以“不能持久”作其表征,故平衡应看作是“不稳定的”。

图8所示的力与变形关系曲线,随着偏心 $\alpha \rightarrow 0$ 逐渐趋近一种具有平衡分枝的极限情形。对于在塑性变形范围内才能屈曲的粗短杆件来说,它的极限荷载与分枝荷载是重合的(图9);或者,如果屈曲应力尚在弹性范围以内的话,则粗短杆件的极限荷载仅在有限挠

度的情况下才能达到(图 10)。因为塑性屈曲理論在主要方面是由恩格塞^①所发展,故把塑性范围的分枝荷载 P_K 称为“恩格塞荷载”。若屈曲应力恰好和比例极限应力重合,则这个荷载就和理想的分枝荷载相同。在恩格塞荷载以下,直杆的平衡属于稳定类型。因为图 9 所示的力与变形关系曲线的下降分枝表示不稳定的平衡状态,因此,这里就不存在越过临界的范围问题。

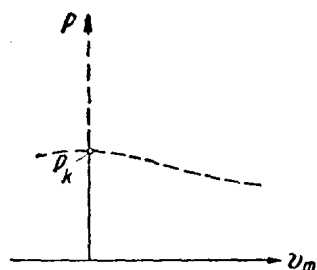


图 9 小细长比的中心受压鋼杆的挠度与荷载的关系

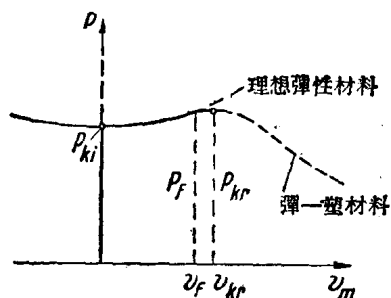


图 10 大细长比的中心受压鋼杆的挠度与荷载的关系

由弹塑性材料制成的,具有较大细长比的中心受压杆件的工作情况,如图 10 所示。

在越过临界范围时,由于在 P_F 时部份截面开始塑化的缘故,当荷载再增加时,具有弯曲杆轴的稳定平衡位置就趋向于一个具有最大承载能力 P_{Kr} 的极限位置。

判断中心或偏心压杆承载能力的欧拉、恩格塞荷载或极限荷载,标志着一种临界状态;在这种状态下,杆件的抗弯能力不再足够有效地去克服外力所产生的变形的影响。在屈曲现象中这种失去工作能力的情况并不受下列条件的限制:即在最大受力截面处所有的杆件纤维应力均已达到强度极限值 σ_F 或 σ_B 。从图 7 的应力图中,可以看出,部分塑化的截面本身,在随遇平衡状态中还没有达到它的完全可能承受的最大塑性弯矩。因此,也可以说,稳定问题“与强度无关”;当然,这不应解释为材料流限对临界荷载没有影响。

以受纯弯曲的静定梁为例,由于荷载增加,在最大受力截面处形成“塑性铰”,亦即所有截面纤维完全塑化,则在该处的承载能力才算完全耗尽。此时,内力矩也就不可能再增加了。这个极限承载能力显然与强度有关。对于设计来说,在“应力问题”上,不去计算承载能力限界,而以线性弹性规律为基础,去寻求那样的荷载,即在它的作用下,在最大受力截面处的截面边缘纤维应力刚好达到流限。因此,“应力问题”与“稳定问题”的区别:不是使“使用荷载”不超过分枝或极限荷载的问题,而是使它不超过导致塑流发生的荷载 P_F 。

在计算截面力时,按以未变形或变形后的结构作为计算的基本假定,将应力问题区分为“一阶的”或“二阶的”^②。

为了弄清楚稳定问题与应力问题的界限,我们曾先对弹性和弹塑性材料的中心或偏心压杆的平面屈曲的力与变形关系曲线进行了对比。对于直杆的空间屈曲问题(例如,弯扭屈曲),桁架和杆系结构以及面状结构的稳定问题也存在着类似上述的关系。在系统地研究

① 关于塑性屈曲理論的奠基著作[2][3]是由 F. 恩格塞于 1889 和 1895 年写出的。

② 就是所谓线性的或非线性的——譯者註。

具有和沒有平衡分枝的穩定問題以前，我們想先對應力問題和穩定問題之間的原則性區別再作進一步說明。

1.21 一階理論的應力問題

按“古典理論”的靜力研究，靜定結構的內力，只由平衡條件即可求得，無需應力與應變的關係。因為在已知荷載作用下，結構已發生變形，故嚴格說來，必須寫出變形狀態下的平衡條件。在大多數工程實際中，由於在強度上對負荷加以限制，我們僅局限於對結構位移或扭轉與其他尺寸相比是非常微小的情形進行研究，因此，一般說來，按未變形結構來考慮平衡是能夠獲得足夠精確度的。在這樣的假定下，精確的非線性理論的試解方程式變成簡單的線性關係。

超靜定結構的截面力再不能只由平衡條件求出。這裡，必須借助於描述應力與變形關係的彈性方程式來計算贅餘值。與按結構真實變形作為依據的精確理論的對比，按古典理論簡化的假定是：把基本靜定體系看做是未變形的，並在基本體系相應的截面力作用下求出作為計算基礎的基本體系的特定的變形。

例如，在普通的板和殼計算中，力和體積力、表面力及邊緣力之間的平衡條件是在未變形的平板或壳体微元上建立起來的（圖 11 和圖 12）。

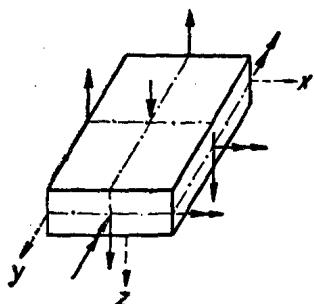


圖 11 在未變形的平板微元上的截面力

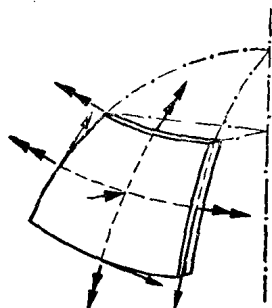


圖 12 在未變形的壳体微元上的截面力

我們把以下按古典理論建立起來的所有計算方法（不考慮變形對於力的作用的影响）

歸納在“一階理論”的概念中。由於局限於變形極其微小的情況，故可在杆系和板結構中假定：垂直於中面的直線上各點，在變形後仍然在一條法線上。據此，對於受彎杆件伯努利的截面平面假說得以滿足。

若材料是勻質的、各向同性的和完全彈性的，那末，在虎克變形規律無限適用的情況下，應力與變形間的線性關係有效。在微小變形時，應變 ε （正的表示伸長）與彎曲杆件的曲率 $\frac{1}{\rho}$ （圖 13）之間有

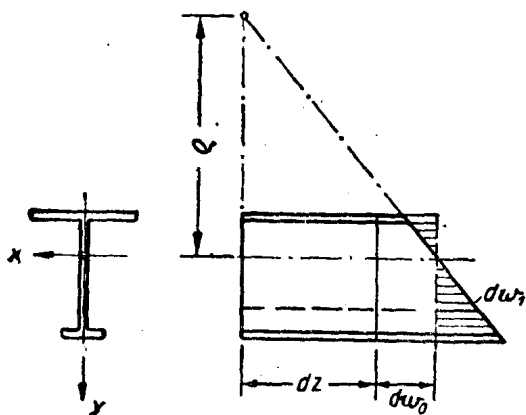


圖 13 按一階理論杆件微元的軸向變形和彎曲

下列關係：

$$dw_0 = \varepsilon_0 dz$$

$$dw_1 = \frac{-y}{\rho} (dz + dw_0)$$

$$\varepsilon = \frac{dw_0 + dw_1}{dz} = \varepsilon_0 - \frac{y}{\rho} (1 + \varepsilon_0)$$

以綫性弹性規律, 提供下列平衡条件

$$N(z) = \int_F \sigma \cdot dF = \int_F E \varepsilon_0 dF - \int_F \frac{E y}{\rho} (1 + \varepsilon_0) dF = EF \cdot \varepsilon_0 \quad (1a)$$

$$M(z) = \int_F \sigma \cdot y dF = \int_F E \varepsilon_0 \cdot y dF - \int_F \frac{E y^2}{\rho} (1 + \varepsilon_0) dF = -EI \frac{1 + \varepsilon_0}{\rho} \quad (1b)$$

因为軸向应变 ε_0 与 1 比較是极小的量, 故可簡化为

$$M(z) = -\frac{EI}{\rho} \quad (2)$$

曲率可通过在 $z+w$ 处挠曲綫的坐标来决定。在略去軸向变形对曲率的影响后, 令 $v=v(z)$, 得

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{\sqrt{(1+v'^2)^3}} = \frac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}} \quad (3a)$$

由于局限于微小的变形, 則有 $v'^2 \ll 1$, 故用綫性表达式表示曲率

$$\frac{1}{\rho} = v'' \quad (3b)$$

是足够准确的。

由 (2) 和 (3b) 通过重复微分, 可得普通的梁弯曲理論^①的力与变形关系:

$$\left. \begin{aligned} EI(z)v'' &= -M(z) \\ EI(z)v''' &= -Q(z) & M'(z) &= Q(z) \\ EI(z)v'''' &= +p(z) & Q(z) &= A - \int_0^z p(z) dz \\ EF \cdot \varepsilon_0 &= N(z) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

这些方程式是研究一阶理論的基础。作用在未变形杆軸上的截面力的方向示于图 14。

用数字或图解形式, 积分这些綫性微分方程式, 一般說来, 沒有困难。与此按微分方程的积分所建立起来的“平衡法”相反, 在能量法中无需借助平衡条件即可导出位能最小条件。这里将弹性体系的

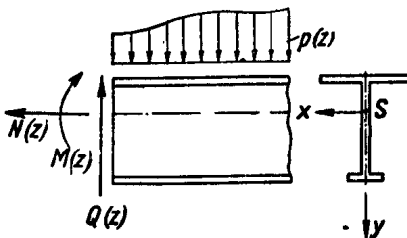


图 14 按一阶理論在未变形杆件单元上的截面力

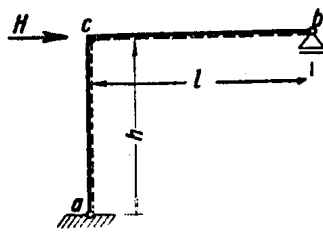


图 15 靜定的Γ型剛架

① 力矩 $M(z)$ 等于外力矩, 外力矩也可以用 $M^{(e)}(z)$ 表示。从内力矩 $M^{(i)}(z)$ 的平衡条件

$$M^{(e)}(z) + M^{(i)}(z) = 0$$

得出

$$M^{(i)}(z) = -M(z)$$

內力和外力所作的功，用适当的方式加以比較。

为了計算靜力贅余值，通常应用按能量法所導得的虛力原理来代替平衡法。

应当指出，無論是“平衡法”或“能量法”，都導出一致的結果。对能量解法，以后，將要在很多情况下作进一步的闡明和深入的分析。

無論在靜定結構或在超靜定結構中，应指出一阶应力理論的特点。

为了利用平衡法決定支承点 b 在已知荷載作用下的水平位移（图 15），必須把微分方程进行积分。同时，截面力是对未变形的結構而言的。若以弯矩分布为例，我們得到一綫性图形（图 16）。若以变形的結構为基础，那末，支柱的弯矩是非綫性的图形（图 17）。

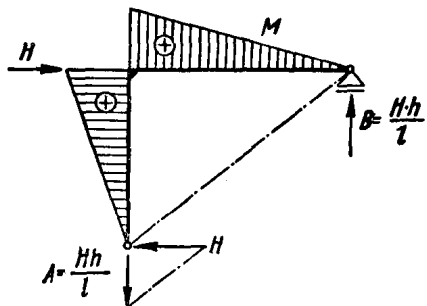


图 16 由荷載 H 在不变形結構上所引起的弯矩

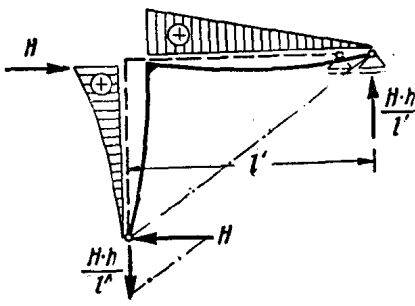


图 17 由荷載 H 在变形的結構上所产生的弯矩

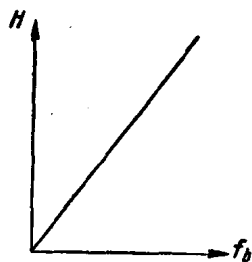


图 18 按一阶理論，力与位移之間的比例关系

所出現的积分常数，可用熟知的边界和过渡条件消除。因为在工程实际中，仅局限于微小的变形，故由变形所产生的附加支承反力 ΔA 与 ΔB 对于截面力的影响是非常小的，因此，在一阶理論中把它略去不計。于是，力与变形之間的关系是綫性的（图 18）。

位移可用变形互等定理（貝蒂-馬克斯威尔定理）較简单地导出。这个定理是在考察能量的基础上建立起来的。由假想单位荷載 1 所产生的截面力标记为 $\bar{M}$ 、 $\bar{N}$ 和 $\bar{Q}$ ，由已知荷載所产生的用 M 、 N 和 Q 表示，于是，在假想荷載方向上的位移分量 f 为

$$\bar{1} \cdot f = \sum \left(\int \frac{M \cdot \bar{M}}{EI} ds + \int \frac{N \cdot \bar{N}}{EF} ds + \int \kappa \frac{Q \bar{Q}}{GF} ds \right) \quad (5)$$

按一阶理論，由外力和虚荷載所产生的截面力是在未变形的体系上确定的。因此，位移是与外力成比例的。

对于超靜定結構，具有基本上相似的关系，如图 19 所示。截面力与位移仍借助于綫性化了的方程式并考虑边界和过渡条件单独地算出。当然，在这超靜定結構中，应用变位互等定理亦是很有利的。贅余外力可由弹性方程式求出，只要在靜定基本体系中，把两种

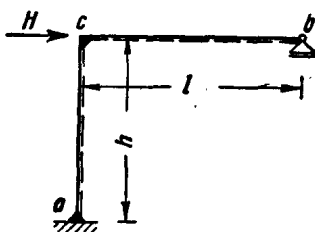


图 19 一次超靜定 Γ 型剛架

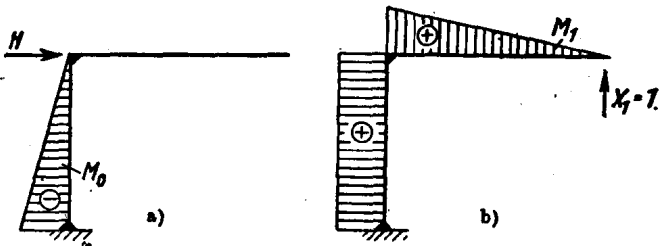


图 20

- a) 在靜定基本体系上，由 H 所引起的荷載状态；
b) 由 $X_1=1$ 所引起的荷載状态

荷载 (图 20) $H-M_0, N_0, Q_0 \quad X_1=1-M_1, N_1, Q_1$

这样来叠加, 而使在赘余力方向上的位移按照超静定体系的边界条件等于零。因为每一部份状态的截面力都由未变形的基本体系上导出, 于是, 可从线性弹性方程

$$\delta_1 = X_1 \delta_{11} + \delta_{10} = 0$$

解出

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

其中, 赘余力系数和荷载项分别为:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int \frac{M_1^2}{EI} ds + \int \frac{N_1^2}{EF} ds + \int \frac{\kappa Q_1^2}{GF} ds \\ \delta_{10} &= \int \frac{M_1 M_0}{EI} ds + \int \frac{N_1 N_0}{EF} ds + \int \frac{\kappa Q_1 Q_0}{GF} ds \end{aligned}$$

因为应力状态已被确定, 故水平位移 f 很容易由 (5) 计算出来。

我们可以概括地说, 在一阶理论中, 由于线性化了力与变形的关系, 叠加原理一般是适用的。

一个与影响 L_i ($i=1, 2, \dots, n$) 有关的力或变形量 W_K , 可由下式表示

$$W_K = \sum_{i=1}^n L_i W_{Ki} = L_1 W_{K1} + L_2 W_{K2} + \dots + L_n W_{Kn} \quad (6)$$

W_{Ki} 是在 K 处由 $L_i=1, L_j=0$ 所引起的作用。

这样, 譬如 n 次超静定结构的弹性方程式可写为

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11} + X_2 \delta_{12} + X_3 \delta_{13} + \dots + X_n \delta_{1n} &= -\delta_{10} \\ X_1 \delta_{21} + X_2 \delta_{22} + X_3 \delta_{23} + \dots + X_n \delta_{2n} &= -\delta_{20} \\ &\vdots \\ X_1 \delta_{n1} + X_2 \delta_{n2} + X_3 \delta_{n3} + \dots + X_n \delta_{nn} &= -\delta_{n0} \end{aligned} \quad (7a)$$

其中, 荷载项与赘余力系数是线性相关的。或者, 对于 r 次超静定体系

$$\begin{aligned} X_1 \delta_{11}^{(r)} + X_2 \delta_{12}^{(r)} + X_3 \delta_{13}^{(r)} + \dots + X_n \delta_{1n}^{(r)} &= -\delta_{10}^{(r)} \\ X_1 \delta_{21}^{(r)} + X_2 \delta_{22}^{(r)} + X_3 \delta_{23}^{(r)} + \dots + X_n \delta_{2n}^{(r)} &= -\delta_{20}^{(r)} \\ &\vdots \\ X_1 \delta_{n1}^{(r)} + X_2 \delta_{n2}^{(r)} + X_3 \delta_{n3}^{(r)} + \dots + X_n \delta_{nn}^{(r)} &= -\delta_{n0}^{(r)} \end{aligned} \quad (7b)$$

1.22 二阶和三阶理论的应力问题

在某些结构静力问题中, 按一阶理论的简单解法会得出错误的结果, 或者几乎不能描述承重构件在荷载作用下的工作情况。其原因就在于: 变形对于截面力大小的影响起着决定性的作用。因此, 在列平衡条件时必须考虑结构体系变形的影响。因为在工程实际中, 即使在这样的情况下, 也仅局限于与承载构件尺寸相比是很小的变形, 故仍允许挠曲率曲线的表达式保持原来一阶理论的简单线性形式

$$\frac{1}{\rho(z)} = v''(z) \quad (8)$$

其次, 伯努利的截面平面假设, 仍然有效。我们把下述的研究方法称为“二阶理论”, 即: 考虑变形对于平衡条件的影响, 但假定曲率与位移导数成线性关系。

主要对理論上有意义的大变形問題，我們必須用准确的表达式

$$\frac{1}{\rho(z)} = \frac{v''}{\sqrt{(1+v'^2)^3}} \quad (9)$$

作为基础，但略去軸向位移的影响。

这个表达式表征大变形理論，赫瓦拉[22]把它称为“三阶理論”。为了完善起見，應該

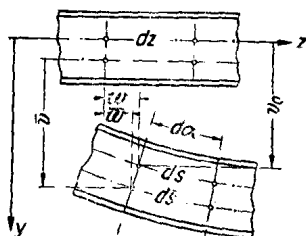


图 21 在变形时，一段纖維的纵向变形

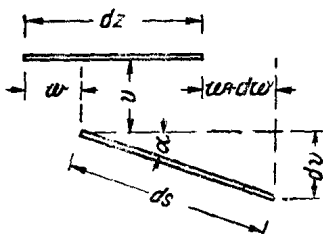


图 22 在变形时，纖維 dz 的位移

同时考虑軸向位移 w 对截面力的影响。这种更普遍的理論，是沒有实际意义的，因为一般說来，簡化了的表达式 (8) 和在相当大的变形时用公式 (9) 来解决問題已足够精确了。

距杆件形心綫 y 处的纖維应变 $\bar{\epsilon}$ 与角度变化 α' 有

下列关系 (图 21)

$$\begin{aligned} d\bar{s} &= ds - y \cdot d\alpha \\ \frac{d\bar{s}}{dz} &= \frac{ds}{dz} - y \cdot \frac{d\alpha}{dz} \\ \bar{\epsilon} &= \epsilon - y \cdot \alpha' \end{aligned} \quad (10)$$

因此，在綫性弹性規律的假定下，在变形后杆件单元上的平衡条件与 (4) 相对比，提供下列的关系式：

$$N(z) = \int_F \sigma dF = \int_F (E\epsilon - Ey\alpha') dF = EF\epsilon \quad (11a)$$

$$M(z) = \int_F \sigma y dF = \int_F (E\epsilon y - Ey^2\alpha') dF = -EI\alpha' \quad (11b)$$

这些公式是由富吕格尔[14]所闡明的。

为了將軸向应变用位移 $v(z)$ 和 $w(z)$ 来表示，我們来观察纖維单元在形心綫上的坐标 (图22)：

$$\text{在变形前} \quad A: \begin{cases} z \\ 0 \end{cases} \quad B: \begin{cases} z + dz \\ 0 \end{cases}$$

$$\text{在变形后变为} \quad A^*: \begin{cases} z + w \\ v \end{cases} \quad B^*: \begin{cases} z + dz + w + dw \\ v + dv \end{cases}$$

因此，变形的表达式为

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{ds - dz}{dz} = \frac{1}{dz} (\sqrt{(dz + dw)^2 + dv^2} - dz) \\ &= \sqrt{1 + 2w' + w'^2 + v'^2} - 1. \end{aligned} \quad (12a)$$

按图22，得角度的变化

$$\tan \alpha = \frac{dv}{d(z+w)} = \frac{v'}{1+w'}$$