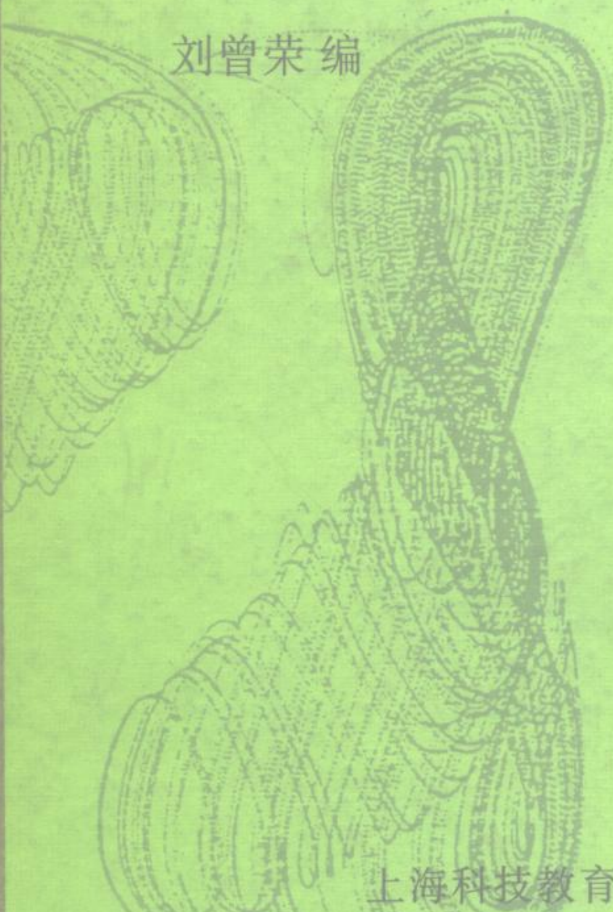
非线性科学丛书

混沌的微扰判据

刘曾荣 编



上海科技教育出版社

本书出版由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助

非线性科学丛书

混沌的微扰判据

刘曾荣　编

刘式达 孙义燧　审阅

上海科技教育出版社

内 容 提 要

本书是非线性科学丛书中的一种。主要介绍梅尔尼科夫方法及其应用、发展以及高阶梅尔尼科夫方法。这一方法用于判定一个物理或力学系统是否具有马蹄变换意义下的混沌。近10年来，这种方法取得了不少新成果。本书还对什尔尼科夫方法作了介绍，什尔尼科夫方法是研究混沌现象的又一种解析方法。本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读，也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

本书由刘式达、孙义燧审阅。

非线性科学丛书

混沌的微扰判据

刘曾荣　编

刘式达　孙义燧　审阅

上海科技教育出版社出版发行

（上海市冠生园路393号）

各地新华书店经销　商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1168　1/32　印张 6.627　字数 166,000

1994年10月第1版　1995年9月第2次印刷

印数 3201—6200 本

ISBN 7-5428-0877-X/O·47　定价(精装本)11.50元

Advanced Series In Nonlinear Science

Perturbation Criteria For Chaos

Liu Zengrong

Mathematics Department, Suzhou University
Suzhou 215006, China

Shanghai Scientific and Technological Education
Publishing House, SHANGHAI, 1994

非线性科学丛书编辑委员会

出版说明

现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法．“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科，与日新月异的新技术相结合，使用数值、解析和图形并举的计算机方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域．这种发展的一个重要特征，可以概括为“非”字当头，即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域．其中，非线性科学占有极其重要的位置．这决非人们“想入非非”，而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升．

曾几何时，非线性还被人们当作个性极强，无从逾越的难题．每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法，运用新颖的技巧．诚然，力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程，物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型．不过，这些都曾是稀如凤毛麟角的“手工艺”珍品，人们还没有悟出它们的普遍启示，也没有看到它们之间的内在联系．

20世纪60年代中期，事情从非线性现象的两个极端同时发生变化．一方面，描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算，揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质．这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径，即所谓“反散射”方法．反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念，反映了这类方程内秉的对称和保守性质．到了80年代，反散射方法推广到量子问题，发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系．

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理. 于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域. 虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统，但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的.

另一方面，在"不可积"的极端，对KAM定理条件的"反面文章"，揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性，而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例. 这些研究迅速地融成一片，一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识. 原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测. 然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构.

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象. 从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律. 如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为，则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程. 标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用.

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中，许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散，同时也提出了新的深刻的数学问题. 物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想，也在日益增多的新领域中找到应用. "非线性"一词曾经是数学中用以区别于"线性"问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿. 各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和. 非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普适方法.

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步．于是，有了动员在前沿工作的教学和研究人员，以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法．在上海科技教育出版社的大力支持下，这一计划得以付诸实现．

这套“非线性科学丛书”不是高级科普，也不是大块专著．它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展，帮助大学高年级学生、研究生、博士后人员和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域，同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人员更新知识提供自学教材．非线性科学的全貌将由整套丛书刻划，每册努力讲清一个主题，一个侧面，而不求面面俱到，以免失之过泛．在写作风格上，作者们将努力深入浅出，图文并茂，文献丰富；力求有实质内容，无空洞议论，以真刀真枪脚踏实地武装读者．从读者方面，自然要求具备理工科大学本科的数学基础，和读书时自己主动思索与推导的习惯．

“非线性科学丛书”的成功，取决于读者和作者的支持．我们衷心欢迎批评和建议．

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

前　言

梅尔尼科夫方法和什尔尼科夫方法是研究混沌现象的两种解析方法.

物理和力学中许多问题，可以归结为讨论带有弱周期扰动项的具有同宿轨道或异宿圈的二阶常微分方程和具有鞍焦型同宿轨道的三阶常微分方程. 对于这两类系统，利用一定技巧，可以建立二维庞加莱映射. 梅尔尼科夫方法和什尔尼科夫方法就是用来判定这两类系统的二维庞加莱映射具有斯梅尔马蹄变换的解析方法. 按照动力系统理论，如果一个平面映射存在斯梅尔马蹄变换，这个映射就具有反映混沌属性的不变集. 因而，我们通常就认为，可以用梅尔尼科夫方法和什尔尼科夫方法来判定系统具有斯梅尔马蹄变换意义下的混沌. 还应指出，如果二阶常微分方程具有一族周期轨道，那么，当这个系统带有周期扰动时，梅尔尼科夫方法还可以用来判定次谐分叉轨道的存在.

近10年来，梅尔尼科夫方法得到了很大发展，取得了许多成果. 这些成果包括有建立高阶梅尔尼科夫方法来处理超次谐分叉轨道；用梅尔尼科夫方法来研究多自由度的哈密顿系统的动力学行为；把梅尔尼科夫方法和平均法与平均变分法结合起来，处理一些特殊系统的动力学性质；对一类特定三阶常微分方程和一些二维或三维映射，也建立了相应的梅尔尼科夫方法. 所有这些成果，在本书中都尽可能得到反映.

至于什尔尼科夫方法，因为在三维相空间证实存在鞍焦型同宿轨道是一件极为困难的工作，所以，直到现在，还没有得到广泛应用. 本书第6章简单描述了如何在这类系统中建立庞加莱映射和证实存在斯梅尔马蹄变换的思路. 我们认为这一点是很重要的.

近年来，利用这种思路已经把所研究的问题推广到各种高维问题中去 如果熟悉了第6章中的基本思路，将有利于读者去阅读这方面的专业文献.

我们还要强调指出，用梅尔尼科夫方法和什尔尼科夫方法处理的结果，只能证明存在具有混沌属性的不变集．当然，存在这种不变集不一定能反映具有混沌属性的奇怪吸引子．一般来说，用梅尔尼科夫方法和什尔尼科夫方法处理结果，只能说明系统可能有奇怪吸引子，而不能判定系统一定存在奇怪吸引子.

作者在工作中得到国家自然科学基金会和中国科学院力学研究所非线性连续介质力学开放实验室的资助．这才使作者的研究工作能得以开展．在此向给作者提供资助的机构表示衷心感谢．多年来，作者得到了郝柏林教授、朱照宣教授、钱敏教授的支持和帮助，同时也与许多合作者进行了愉快的合作研究，在此一并表示我的感激之情.

限于作者水平，书中一定有不少不妥和错误之处，还望读者给予批评和指正.

Abstract

The two analytic methods, Melnikov method and Shilnikov method, are used to investigate chaos in the sense of Smale horseshoes. The basic concepts, theory, applications and developments of Melnikov method are discussed in detail, and Shilnikov method is also briefly introduced. Readership includes graduate students, postdoctoral fellows, and practitioners in physical and engineering sciences.

目　录

非线性科学丛书出版说明

前　言

第1章　预备知识 ……1

§1　符号动力系统 ……1

§2　斯梅尔马蹄变换 ……4

§3　横截同宿点理论 ……7

第2章　梅尔尼科夫方法 ……12

§4　平面哈密顿系统 ……12

§5　同宿轨道的梅尔尼科夫函数 ……14

§6　梅尔尼科夫函数的进一步讨论 ……21

§7　次谐轨道的梅尔尼科夫函数 ……28

§8　次谐轨道的稳定性分析 ……32

第3章　梅尔尼科夫方法的应用 ……36

§9　软弹簧杜芬系统的研究 ……36

§10　约瑟夫森结的 I-V 特性曲线 ……48

§11　斯梅尔马蹄变换阀值与次谐阀值之间的关系 ……58

第4章　梅尔尼科夫方法的发展 ……68

§12　两个自由度哈密顿系统的梅尔尼科夫方法 ……68

§13　三维缓变系统的梅尔尼科夫方法 ……74

§14　映射系统的梅尔尼科夫方法 ……84

§15　平均变分法和梅尔尼科夫方法 ……93

§16　二阶平均和梅尔尼科夫方法 ……100

第5章　高阶梅尔尼科夫方法 ……111

§17　高阶梅尔尼科夫方法提出的背景 ……111

§ 18　高阶梅尔尼科夫方法的框架 ……………………114
§ 19　$q_1^a(t)$的可解性讨论 ……………………123
§ 20　约瑟夫森结的 I-V 特征曲线的子台阶分析 ……………131
§ 21　耗散和保守非线性振子系统的讨论 ……………136
第 6 章　什尔尼科夫方法简解 ……………………143
§ 22　什尔尼科夫方法 ……………………146
§ 23　一个具有鞍焦型同宿轨道的电路系统 ……………149
§ 24　一类具有鞍焦型同宿轨道的振子方程 ……………158
§ 25　具有什尔尼科夫意义下混沌的实验研究 ……………162
附录　雅可比椭圆函数有理式的傅里叶级数 ……………167
参考文献 ……………………187

Contents

Preface

Chapter 1 Basic Theory ········ **1**

§ 1 Symbol Dynamical Systems ········ 1

§ 2 Smale Horseshoes Map ········ 4

§ 3 The Theory of Transversal Homoclinic Points ········ 7

Chapter 2 Melnikov Method ········ **12**

§ 4 Planar Hamiltonian Systems ········ 12

§ 5 Melnikov's Function of Homoclinic Orbit ········ 14

§ 6 Further Investigation on Melnikov's Function ········ 21

§ 7 Melnikov's Functions of Subharmonic Orbits ········ 28

§ 8 Stabilities of Subharmonic Orbits ········ 32

Chapter 3 Application of Melnikov Method ········ **36**

§ 9 The Investigation on Duffing Systems with Soft Spring ········ 36

§ 10 I-V Characteristic Curve of Josephson Junction ········ 48

§ 11 Relationships between Threshold of Smale Horseshoes Transformation and That of Subharmonic Bifurcation ········ 58

Chapter 4 Advance of Melnikov Method ········ **68**

§ 12 Melnikov Method on Hamiltonian Systems with Two Degrees of Freedom ········ 68

§ 13 Melnikov Method on 3-Dimensional Systems with Slow Variation ········ 74

§ 14 Melnikov Method on Mapping Systems ········ 84

§ 15 Averagung Variational Method and Melnikov

Method 93
§ 16 Second-Order Average and Melnikov Method······100
Chapter 5 Higher Order Melnikov Method············111
§ 17 Background ··111
§ 18 Framework of Higher Order Melnikov Method···114
§ 19 The Discussion on Solvability of q(t)···············123
§ 20 Sub-step of I-V Characteristic Curve of Josephson Junction ···································131
§ 21 Disspative Nonlinear Oscillators and Conservative Nonlinear Oscillators·······································136
Chapter 6 Introduction to Shilnikov Method·········146
§ 22 Shilnikov Method···146
§ 23 A Circuit System with A Homoclinic Orbit to A Saddle-Focus ··149
§ 24 A Oscillation Equation with A Homoclinic Orbit to A Saddle-Focus···158
§ 25 An Experiment Leading to Chaos in Shilnikov Sense ···162
Appendix Fourier Series of Rational Expressions of Jacobi Elliptic Functions·························167
References ···187

第 1 章

预 备 知 识

§1　符号动力系统

A 表示一个有限元素集合，$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_N\}$. 我们把 A 称为**字母表**，A 中的元素 a_j(其中 $j=1, 2, \cdots, N$)称为**符号**. 设 A 的符号多于一个.

以 Σ_A 表示一切双向无限的符号序列

$$S=(\cdots, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_2, \cdots)$$

的集合，其中 $s_j\in A$(其中 $j=0, \pm1, \pm2, \cdots$)，记号"；"加在零位元素的左方.

在 Σ_A 上定义柱集合

$$\begin{aligned}&U_n(b_{-n}, \cdots; b_0, \cdots, b_n)\\&\quad=\{S\in\Sigma_A \mid s_j=b_j. \text{ 对一切 } j, |j|\leqslant n\}.\end{aligned}$$

当 n 取遍一切自然数、b_j 取遍 A 中一切元素，所得柱集合的全体构成 Σ_A 的一个可数拓扑基. 此时，拓扑空间 Σ_A 叫做**序列空间**. 该拓扑空间可以距离化，$\forall S$、$T\in\Sigma_A$，定义距离为

$$d(S、T)=\sum_{j=-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(s_j, t_j)}{2^{|j|}}, \tag{1.1}$$

其中 $\delta(s_j, t_j)$定义为

$$\delta(s_j, t_j)=\begin{cases}0, & \text{当 } s_j=t_j \text{ 时;}\\1, & \text{当 } s_j\neq t_j \text{ 时.}\end{cases} \tag{1.2}$$

s_j 和 t_j 是序列 S 和 T 的第 j 位上符号. 可以证明：在此距离意义下，Σ_A 是一个紧致的、完全的、完全不连通的距离空间. 利用拓

扑学中任何紧致、完全、完全不连通的距离空间都同胚于康托三分集的结论，可以推出 Σ_A 同胚于康托三分集.

在 Σ_A 上定义一个映射 $\sigma: \Sigma_A \to \Sigma_A$，对于任意 $S \in \Sigma_A$，有

$$\begin{aligned}\sigma(S) &= \sigma(\cdots, s_{-2}, s_{-1}; s_0, s_1, s_2, \cdots) \\ &= (\cdots, s_{-2}, s_{-1}, s_0; s_1, s_2, \cdots),\end{aligned} \tag{1.3}$$

即 $(\sigma(S))_j = s_{j+1}$（其中 $j=0, \pm1, \pm2, \cdots$）. 也就是说，将序列 S 中元素左移一位（记号“;”右移一位）. 映射 σ 是 Σ_A 上的一个同胚，称为**移位自同构**. 显然，σ 确定了 Σ_A 上的一个动力系统. 习惯上把离散动力系统 σ 称为**符号动力系统**. 它们有如下一些动力学性质.

性质 1 σ 具有周期为任意自然数的周期点. 即存在可数无穷多个周期点.

事实上，对于任意自然数 n，当 A 由两个符号 0 和 1 组成时，取 $S \in \Sigma_2$ 以 $\underbrace{(0, 0, \cdots, 0, 1)}_{n个}$ 作为生成节，即 S 为此节循环所生成的循环序列. 显然，S 就是 σ 的周期 n 点.

性质 2 σ 的周期点在 Σ_A 中是稠密的.

按照稠密性的数学定义，上述性质就是说：在(1.1)距离意义下，对于任意 $S \in \Sigma_A$ 的小邻域内都可以找到 σ 的周期点. 事实上，对于任意 $\varepsilon > 0$，总能找到充分大的 m 和 $\bar{S} \in \Sigma_A$，其中 $\bar{S}$ 是 σ 的周期 $2m+1$ 点，它是由 $S = (\cdots, s_{-m}, s_{-m+1}, \cdots, s_{-1}; s_0, s_1, \cdots s_{m-1}, s_m, \cdots)$ 的中间 $2m+1$ 符号 $(s_{-m}, s_{-m+1}, \cdots s_{-1}, s_0, s_1, \cdots s_{m-1}, s_m)$ 作循环得到，使得

$$d(S, \bar{S}) < \varepsilon. \tag{1.4}$$

性质 3 σ 有稠轨道，即存在 $\bar{S} \in \Sigma_A$，使得 Σ_A 中的集合

$$\{S \mid S = \sigma^k(\bar{S}), k = 0, \pm1, \pm2, \cdots\}$$

在 Σ_A 内是稠密的.

当 A 由两个符号 0 和 1 组成时，取 $\bar{S}$ 的形式为：