信号与线性系统

潘维瀚 编

北京航空學院出版社

信号与线性系统

潘維瀚　编
[illegible]　主审

北京航空學院出版社

内 容 简 介

本书系统地论述了信号与系统的基本概念和分析方法。全书共十一章，内容包括：信号和系统概述，连续时间信号和系统的时域分析，傅氏级数分析，傅氏变换分析，拉氏变换分析，信流图和方块图，离散时间信号和系统的时域分析，序列的傅氏变换，离散傅氏级数和快速傅氏变换，以及状态变量法。每章末附有大量习题。

本书条理清楚，简明扼要，论述严谨，是信号与系统领域中一本受欢迎的技术理论著作。

本书可作为大学电子工程专业本科生的教本，亦可供从事信号分析与处理的科技人员、教师和研究生参考。

信号与线性系统

潘維瀚　编

責任編輯　陈子玉　杨昌竹

北京航空学院出版社

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

北京航空学院印刷厂排印　通县觅子店印刷厂装

※

787×1092　1/16　印张：$18\frac{3}{4}$　字数：468千字

1986年6月第一版　1986年6月第一次印刷

印数：1—6000册　定价：3.10元

统一书号：15432·006

前　言

本书是作者在北京航空学院电子工程系从事信号和线性系统的教学过程中编写而成的。

全书共有十一章，内容包括：信号和系统概述，连续时间信号和系统的时域分析、傅氏级数分析、傅氏变换分析和拉氏变换分析，信流图和方块图，离散时间信号和系统的时域分析、傅氏级数分析、傅氏变换分析和Z变换分析，离散傅氏变换及其快速算法，以及状态变量法。本书是按信号与系统的分析方法划分章目的，内容着重讲述信号与系统的基本概念和分析方法。全书的范围限于确定信号和线性时不变系统。作者认为，学习这门课程，练习是十分重要的。为此，全书收集了大约210个习题作为本书的一个必要内容。

本课程除讲授之外尚有9个计算机终端机时供学生练习之用。书的第十章就是配合上机而写的。为便于教学，编写时注意到各章的相对独立性，并把连续时间信号与系统和离散时间信号与系统作了并行编排。

本书承北京工业学院葛成岳副教授和曾禹村副教授审阅，并经航空工业部教材编审室审订作为高等工业院校电子工程专业学生的试用教材或教学参考书。

本书的习题和答案是由郑存生同志负责收集和整理的。在编写期间还得到教研室有关同志和系领导的支持和帮助。作者在此表示衷心的感谢。

限于作者的水平，书中难免有错误与不妥之处，诚請读者批评指正。

作　者

一九八四年十一月

于北京航空学院电子工程系

目　录

第一章　信号和系统概述

第二章　连续时间信号和系统的时域分析

第三章　傅氏级数分析

第一章　信号和系统概述

§1-1　信息、消息和信号

什么叫信号？为了说明信号的概念，需要简单地介绍一下信息和消息的定义。

信息是指对受信者来说预先不知道的消息。消息是用来表达信息的某种客观报导，如文字、语音、图象、数据……等。简言之，消息就是知道了的信息。

信号是消息的表现形式，消息是信号的內容。信号是带有消息的一种物理量，如电、光、声等等。若用电来传送消息，发信者应把消息转换成随时间变化的电压或电流，这种带有消息的电压或电流就是电信号。

举收看一場国外球賽实况为例。在现場的体育记者用摄影机记录下比赛的实况，得到大量的图片，这些图片就是人们需要知道的图象消息（即信息）。为了传送图象消息，发送者应把图象消息转换成电信号，然后由卫星通信和电视广播传送给观众。

再以无人驾驶飞机的飞行监视为例。无人驾驶飞机执行飞行任务时，地面工作人员需要知道飞机的飞行状况，如飞行速度、加速度、发动机油量、距离、高度、方位角……等。这些数据是地面工作人员需要知道的消息（即信息）。这些数据一般是非电量的。为了将数据消息传送到地面，机上发送设备应把数据消息转换成电信号，再由无线电遙测系统传送到地面监视台。

因此，信号是带有消息的一种随时间变化的物理量。

§1-2　信号的类型

任一信号既表现为一种物理量的变化，那么都可以表示为时间函数。时间函数就是信号的数学模型。根据信号时间函数的性质，可将信号大致分为下列类型：

确定信号与随机信号　若信号被表示为一确定的时间函数，对于指定的某一时刻，可确定一相应的函数值，这种信号称为确定信号。例如，正弦信号、指数信号……等。但是，通信系统中实际传输的信号往往具有未可预知的不确定性，这种信号称作随机信号。如果通信系统中传输的信号都是确定信号，接收者就不可能由它得到新的消息（即信息），这样也就失去了通信的意义。对于随机信号，不能给出确定的时间函数，只能用概率统计方法来描述。确定信号与随机信号是密切联系的。在信号理论中，一般应首先弄清确定信号的特性，再根据随机信号的统计特性来研究随机信号。本书只讨论确定信号。

周期信号与非周期信号　所谓周期信号就是依一定的时间间隔，周而复始，且无始无终的信号。周期信号可定义为

$$f(t)=f(t+nT),\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

满足上式的最小 T 值，叫做信号的周期。

常见的周期信号是正弦和余弦：

$$\sin\omega t, \qquad \cos\omega t$$

它们的周期$T=2\pi/\omega$，其中ω是角频率。

所谓非周期信号就是在时间上不具有周而复始性质的信号。非周期信号又可分为时限信号和非时限信号。

常见的非周期信号有指数信号和矩形脉冲信号：

$$e^{at}, \qquad a\text{为实数}$$

$$f(t)=\begin{cases} A, & |t|\leqslant\tau \\ 0, & |t|>\tau,\ \tau\text{为常数} \end{cases}$$

矩形脉冲信号是时限信号，时限为2τ。指数信号是非时限信号。

常参信号与变参信号 信号$f(t)$的参量是时不变的信号叫常参信号。信号$f(t)$的参量是时变的信号叫变参信号。

余弦信号$A\cos\omega t$是常参信号。调幅信号$A(t)\cos\omega t$是变参信号，它的幅度$A(t)$是时变的。在无线电技术中，其他调制信号（比如调频信号）也是变参信号。

连续时间信号与离散时间信号 连续时间信号是其定义域包括一个区间内每一点的函数。例如正弦信号和矩形脉冲信号都是连续时间信号。连续时间信号的幅值可以是连续的，也可以是离散的。图 1-1 的信号就是一个具有离散幅值的连续信号。对于时间和幅值都是连续的信号又叫模拟信号。

离散时间信号是其定义域为一个整数集的函数。因而离散时间信号是一个序列。这种序列本书写成函数符号$f(n)$，自变量n只取整数值。离散时间信号如图 1-2 所示。离散时间信号的幅值可以是连续的，也可以是离散的。如果离散信号的幅值是连续的，则叫作抽样信号。如果离散时间信号的幅值被限定为某些离散值，则这种信号又叫作数字信号，如图1-3所示。

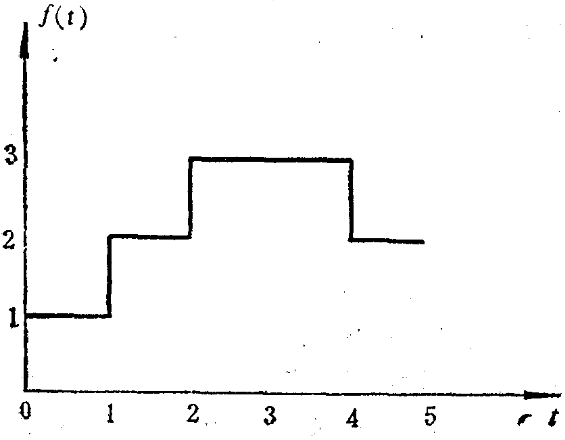


图 1-1

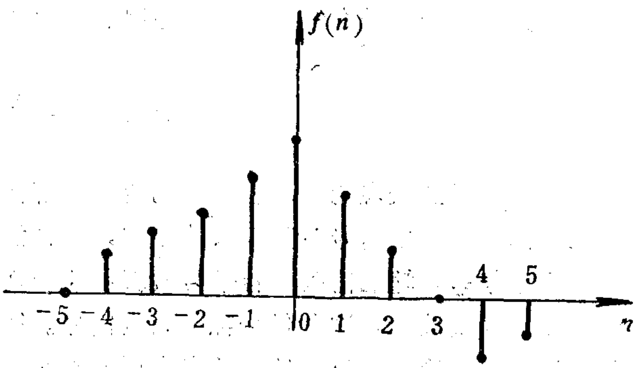


图 1-2

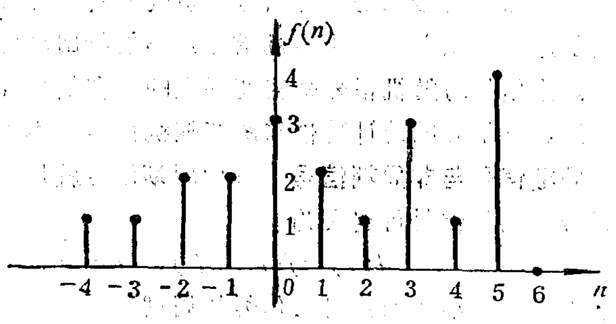


图 1-3

离散时间信号$f(n)$可由对连续时间信号$f(t)$抽样来取得。若抽样间隔

是等间距的，则

$$f(n)=f(nT) \tag{1-1}$$

常数T是抽样间隔。

阶跃函数

$$U(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

（图1－4(a)）。它的样本$U(n)=U(nT)$所组成的离散时间信号

$$U(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

称为阶跃序列（图1－4(b)）。

余弦函数

$$f(t)=\cos\omega t$$

（图1－5(a)）。对应的离散时间余弦序列

$$f(n)=f(nT)=\cos nT\omega$$

取$T=\pi/6\omega$，则

$$f(n)=\cos n\pi/6$$

（图1－5(b)）。

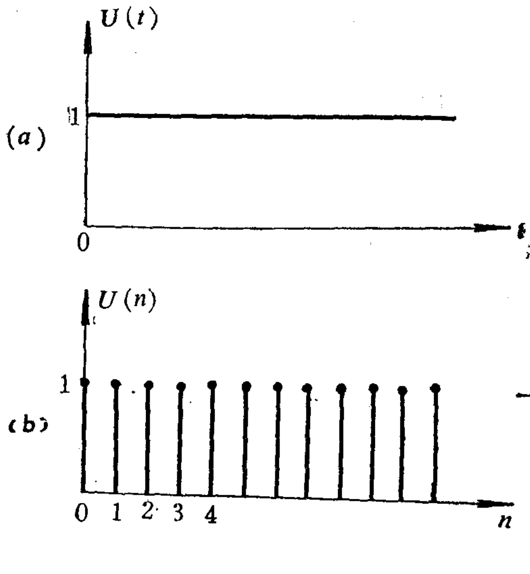


图 1-4

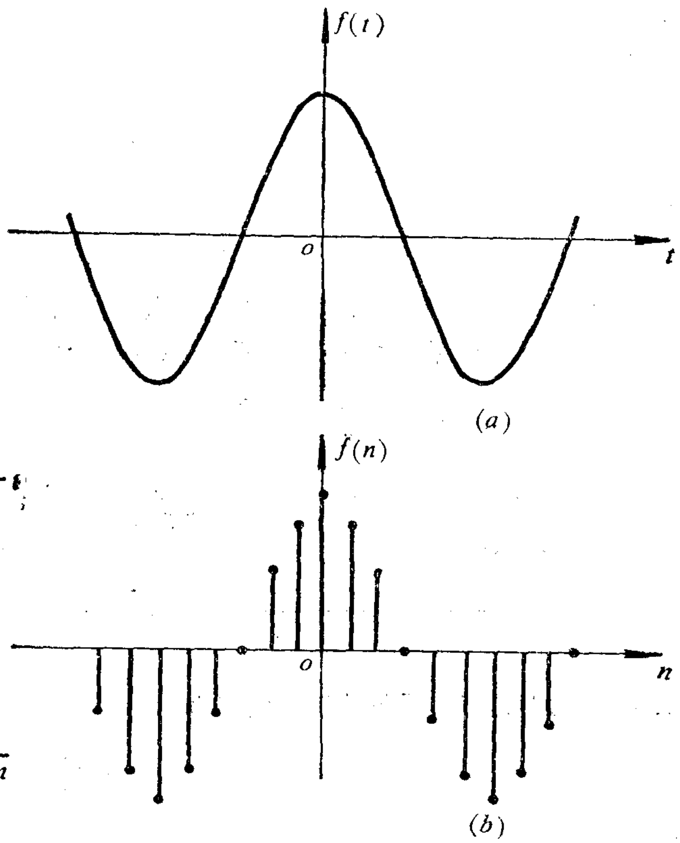


图 1-5

本书以后将连续时间信号和离散时间信号简称为连续信号和离散信号。

§1-3　系统的概念

什么叫系统？系统这个名词有多种含义，如电路系统、电子系统、通信系统、控制系统、力学系统、计算机系统、生物系统、经济系统、……。因此，要给系统下一个准确的普遍的定义是困难的。在本书中，我们所讨论的绝大多数系统属于下列三种含义。

第一种含义：系统是由电阻、电感、电容和变压器组成的电网络。例如，RC网络、耦合回路、滤波器……。

第二种含义：系统是由倍乘器、相加器和微分器（或积分器）组成的模拟装置。例如，模拟计算机。

第三种含义：系统是由倍乘器、相加器和延时器组成的数字装置。例如，数字计算机，数字滤波器。

从以上三种含义看来，所谓系统就是用来处理或传输各种信号的装置。作进一步概括，我们给系统作如下的定义：在给定的输入作用下，完成某种功能以得到所需输出的某些部件（或元件）的组合体，叫做系统。

系统的数学模型　系统的数学模型是根据物理定律和具体条件建立的，它表征出系统的特性。

例　图1-6示出一个简单电路系统。输入电压为E，输出电压为u_C，系统的数学模型可根据电路定律来建立。

$$E=Ri+u_C$$

$$i=C\frac{du_C}{dt}$$

或

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E \tag{1-2}$$

式（1-2）是简单电路系统的数学模型。

例　简单力学系统如图1-7所示。系统的输入为作用力f，系统的输出为运动速度v。

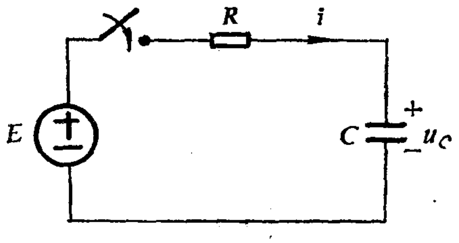


图 1-6

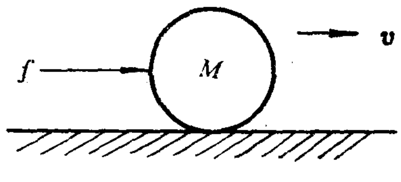


图 1-7

根据牛顿力学定律，系统的数学模型为

$$f=M\frac{dv}{dt} \tag{1-3}$$

式中M为物体的质量。

从以上讨论可知，分析系统的关键在于找出系统的数学模型。有了系统的数学模型，给出输入和初始条件就可求解系统的输出。

系统的数学模型可分为两大类，一是输入输出描述，另一是状态变量描述。输入输出描述着眼于系统输入与系统输出之间的关系，并不关心系统的内部状态。上述两个简单系统的数学模型都属于输入输出描述。状态变量描述不仅可以给出系统的输出，还可提供系统的内部状态变量的情况。状态变量法将在本书最后一章介绍。

图 1－8 示出的系统方块图一般地表明了系统的输入输出关系。$x(t)$ 是系统的输入或激励，$y(t)$是系统的输出或响应。系统的输入和系统输出存在一定的关系，即

$$y(t)=L[x(t)] \qquad (1\text{-}4)$$

式中L代表某种数学关系或某种功能关系。式(1-4)就是系统的输入输出关系，它反映了系统的外部特性。

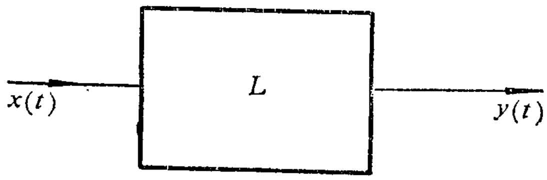


图 1-8

§1-4 系统的类型

根据系统的特性（数学模型），系统可分成以下几种类型：

线性和非线性系统；

时不变和时变系统；

动态和瞬时系统；

连续时间和离散时间系统；

集总和分布系统。

一、线性和非线性系统

什么是线性条件？线性条件包括两个独立的内容，即均匀性（比例性）和可加性。

可加性

设 $x_1(t)\rightarrow y_1(t)$，$x_2(t)\rightarrow y_2(t)$

则 $$x_1(t)+x_2(t)\rightarrow y_1(t)+y_2(t) \qquad (1\text{-}5)$$

可加性表示：如果有几个输入同时作用于系统，则系统的总响应等于由每个输入单独作用所产生的响应之和。

均匀性

设 $x(t)\rightarrow y(t)$

则 $$ax(t)\rightarrow ay(t) \qquad (1\text{-}6)$$

a为任意常数。均匀性表示：当输入增加a倍时，输出也相应地（或成比例地）增加a倍。

将可加性与均匀性结合起来，我们得到线性条件如下：

设 $x_1(t)\rightarrow y_1(t)$，$x_2(t)\rightarrow y_2(t)$

则 $$ax_1(t)+bx_2(t)\rightarrow ay_1(t)+by_2(t) \qquad (1\text{-}7)$$

式中a，b为任意常数。

线性条件又叫叠加原理。有了线性条件，我们对系统可以作如下的定义：

凡是满足线性条件（叠加原理）的系统称为线性系统；凡是不满足线性条件的系统叫做非线性系统。

例 $y=ax$ 是什么系统？

解　y 是系统输出，x 是系统输入。

$y_1=ax_1$，$y_2=ax_2$

$y_1+y_2=a(x_1+x_2)$

系统满足叠加原理，该系统是线性的。

例　$\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_0y=x(t)$ 是否线性系统？

解　x 是系统输入，y 是系统输出。

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}+a_1\frac{dy_1}{dt}+a_0y_1=x_1(t)$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2}+a_1\frac{dy_2}{dt}+a_0y_2=x_2(t)$$

将上两式相加得

$$\frac{d^2}{dt^2}(y_1+y_2)+a_1\frac{d}{dt}(y_1+y_2)+a_0(y_1+y_2)=x_1(t)+x_2(t)$$

系统满足叠加原理，该系统是线性的。

例　图 1－9 所示的乘法器是什么系统？

解　$y=x_1x_2$，，将输入增加 a 倍，看输出如何变化？

$y=(ax_1)(ax_2)=a^2x_1x_2\neq ax_1x_2$

可见系统不满足均匀性，系统是非线性的。

若　　$x_1=x_2=x$，则

$y=x^2$

显然，系统是非线性的。

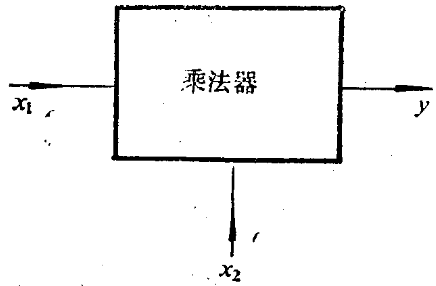


图　1-9

以上是从物理上区分线性或非线性系统的。另一方面，一般系统都可用其数学模型来表征，因此也可以根据系统的数学模型来判断系统是线性或非线性的。下列方程中，x 是系统的激励，y 是系统的响应，t 是自变量，这些方程都是非线性方程，因而它们代表的系统都是非线性系统。

$$y=\sin x$$

$$y=x^2$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+y=x(t)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}+y^3=x(t)$$

$$3\frac{d^2y}{dt^2}+y\frac{dy}{dt}+2y=x(t)$$

二、时不变和时变系统

系统的参量不随时间变化的系统叫做时不变系统。下列方程

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+a_1\frac{dy}{dt}+a_0 y=x(t) \tag{1-8}$$

代表一个系统。这个方程的系数a_i($i=0$， 1， …， n)不随时间变化，因此它代表一个时不变系统。时不变系统的特点是输出响应与输入的作用时刻无关。这个特点用数学形式来描述为：

设　　　$x(t)\rightarrow y(t)$

则　　$x(t-\tau)\rightarrow y(t-\tau)$

(1-9)

式中 τ 为时延。图 1-10 形象地说明了这个性质。

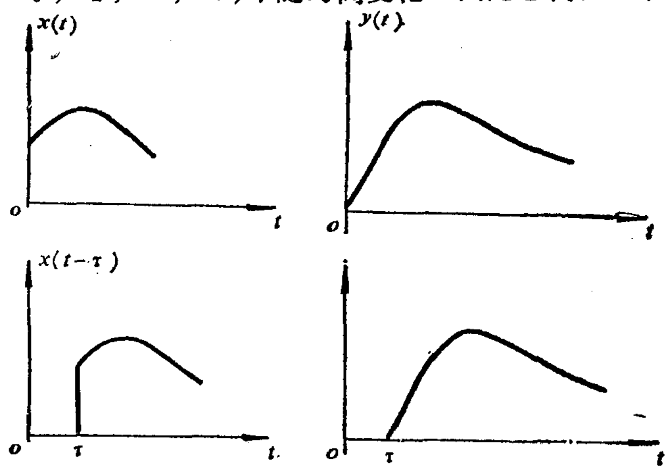


图 1-10

若系统的某些参量随时间变化，则该系统叫做时变系统。例如，炭粉话筒电路就是一个时变系统（图 1-11）。它的数学模型是变系数微分方程：

$$L\frac{di}{dt}+iR(t)=e(t)$$

式中$R(t)$代表炭粉话筒的时变电阻。

此外，时不变系统也可能是由互相补偿的时变元件组成。例如，图 1-12 电 路就是一个时不变系统。一些温度补偿电路都是属于这一类的。

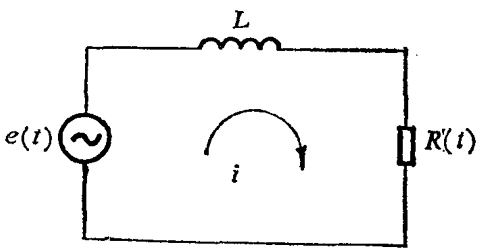


图 1-11

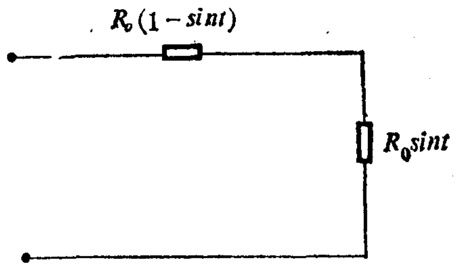


图 1-12

应当指出，系统的参量总是因环境的改变而发生变化的。严格说来，实际系统都是时变的。系统的时不变性质只是一种理想的概念，但是当系统的参量随时间作缓慢变化时，我们往往可将之作时不变系统来对待。利用系统的时不变性质可使系统分析大大简化。

本书主要研究线性时不变系统。线性和时不变性是系统分析方法的依据。

三、动态系统和瞬时系统

动态系统的响应取决于输入和初始状态，即

$$y(t)=L[\{q_n(0)\},x(t)] \tag{1-10}$$

式中$\{q_n(0)\}$代表系统的初始状态。初始状态实际上反映了输入$x(t)$的历史作用。例如，在简单力学系统中，速度

$$v(t)=\frac{1}{M}\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{M}\int_{-\infty}^{0}f(\tau)d\tau+\frac{1}{M}\int_{0}^{t}f(\tau)d\tau$$

$$v(0)=\frac{1}{M}\int_{-\infty}^{0}f(\tau)d\tau$$

初速 $v(0)$就是系统的初始状态，它可看作 $f(\tau)$在 $-\infty\to 0$ 时间内历史作用的结果。因此，动态系统的响应取决于输入和输入的历史作用。

动态系统中必含有贮能元件，贮能元件记下了 $x(t)$ 的“历史作用”，并表现为系统的初始状态$\{q_n(0)\}$。

动态系统的数学模型以微分积分方程表示。

瞬时系统的响应只取决于输入 $x(t)$，而与 $x(t)$的历史无关。瞬时系统中没有贮能元件，输入和输出是瞬时关系。瞬时系统的数学模型是代数方程。例如，电阻性电路就是一个瞬时系统。

四、连续时间和离散时间系统

系统的输入和输出是连续时间变量 t 的函数，叫做连续时间系统。输入用 $x(t)$ 表示，输出用$y(t)$表示。

系统的输入和输出是离散时间变量 n 的函数（n 为整数），称做离散时间系统。输入用$x(n)$表示，输出用$y(n)$表示。

连续时间系统以微分积分方程表示，离散时间系统以差分方程表示。

例 图 1-6 简单 RC 电路的数学模型为

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=E$$

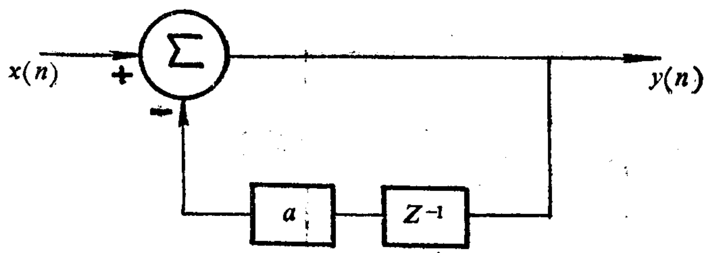


图 1-13

这是一个连续时间系统。

例 图 1-13简单离散系统的数学模型为

$$y(n)+ay(n-1)=x(n)$$

此系统满足一阶差分方程。图中 Z^{-1}为单位时延。

五、集总系统和分布系统

集总系统是一些集总元件的组合体。电集总元件的关键性质在于“电集总元件的尺寸与信号的波长相比可以忽略不计”。例如，电阻、电容、电感等元件就是一些常用的电集总元件，它们组成的电路叫做集总电路系统。对于音频电路，信号的最高频率为25kHz，对应的波长 $\lambda=12$km。显然，信号波长远大于音频电路或元件的尺寸，可见音频电路是一个集总电路系统。对于微波电路，信号波长 $\lambda=10$cm～1mm，微波电路（如波导、空腔等）的尺寸与

信号波长可以比拟，因此微波电路不是集总电路系统，而是分布电路系统。

在集总系统中，由于信号波长远大于集总系统的尺寸，信号在系统中的分布与空间无关，这就是说，集总系统的特性只与信号的时间变量有关，而与信号在系统中的传播时间无关，于是集总系统的数学模型可用微分方程来描述。

如果系统的尺寸与信号波长可以比拟，这种系统叫做分布系统。在分布系统中，信号在系统中的分布与空间有关，这就是说，分布系统的特性既与时间变量有关，又与空间变量有关（要考虑信号在系统中的传播时间）。分布系统可用偏微分方程来描述。

以上介绍了五种系统的物理特点和数学模型。本课程在系统方面的研究对象是集总、线性、时不变、动态系统。这种系统的数学模型主要是常系数微分方程或常系数差分方程。

§1-5 系统分析

系统分析讨论的中心问题是在给定的输入作用下系统将产生什么样的输出。为了确定系统对输入的响应，系统分析大致分为三个步骤，即

建立系统的数学模型；

解数学模型；

系统模拟。

一、建立系统的数学模型

系统的数学模型是根据物理定律和具体要求来建立的。对图 1-7 的运动物体，根据牛顿定律得出系统的数学模型是

$$f=M\frac{dv}{dt}$$

如果运动物体是高速火箭，则必须考虑运动物体受空气的摩擦阻力。这个摩擦力是正比于速度的平方的。考虑到这个因素，系统的数学模型应修正为

$$f=M\frac{dv}{dt}+kv^2$$

式中 k 为一比例常数。如果运动物体的速度接近光速，则根据相对论，系统的数学模型将修正为

$$f=\frac{d}{dt}(Mv)+kv^2$$

下面再介绍两个例子。

例 图 1-14示出一个机电系统，试求该系统的数学模型。

解 根据电磁感应定律得

$$e_b=k_b\frac{d\theta}{dt}=k_b\,\dot{\theta}$$

式中 θ为转子的转动角度，$\dot{\theta}$为转子的转动角速度，k_b为比例常数。

由图 1-14(b)，根据克希霍夫定律得

$$R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + k_b \frac{d\theta}{dt} = e_a$$

此外，从力学方面考虑有

T——转动力矩，$T = KI_f i_a$，

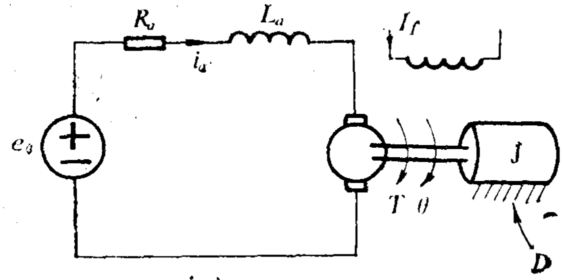
K为比例常数，

$D\dot{\theta}$——转动摩擦力矩，J——负载的转动惯量。

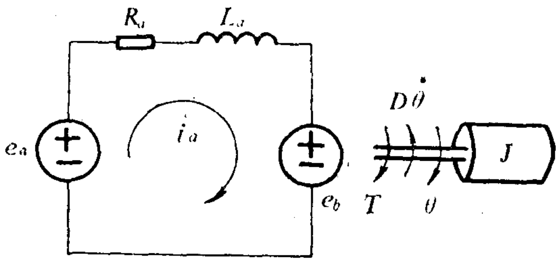
根据牛顿定律得出

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = T - D\dot{\theta} = KI_f i_a - D\frac{d\theta}{dt}$$

或
$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + D\frac{d\theta}{dt} = KI_f i_a$$



(a)



(b)

图 1-14

I_f—定子的激磁电流；
L_a—转子电枢的电感；
R_a—转子电枢的电阻；
i_a—转子电枢的电流；
e_b—转子电枢中的感应电势；
e_a—转子电枢的外加电压。

因此，机电系统的数学模型为

$$\left.\begin{aligned} & R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + k_b \frac{d\theta}{dt} = e_a \\ & J\frac{d^2\theta}{dt^2} + D\frac{d\theta}{dt} = KI_f i_a \end{aligned}\right\} \tag{1-11}$$

例 某人每月进行储蓄活动。设第 n 个月存入银行的款数为 $x(n)$，月利率为 β，第 n 个月的本金为 $y(n)$，银行每月结算一次，试求该经济系统的数学模型。

解 系统的输入为 $x(n)$，即第 n 个月的存入款数；系统的输出为$y(n)$，即第 n 个月的本金。第 n 个月的本金应由以下三部分组成：

第 $n-1$ 个月的本金$y(n-1)$；

第 $n-1$ 个月的本金的月息$\beta y(n-1)$；

第 n 个月的存入款数$x(n)$。

于是有

$$y(n) = y(n-1) + \beta y(n-1) + x(n)$$

或
$$y(n) - (\beta+1)y(n-1) = x(n)$$

故该经济系统的数学模型为一阶差分方程。

从以上例子可以看出，建立系统的数学模型必须知道各学科的专门知识，也就是说，建立各类系统的数学模型是各门学科的重要任务之一。

二、解数学模型

1． 对于集总、线性、时不变的连续系统，可用常系数微分方程来描述，即

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t)$$