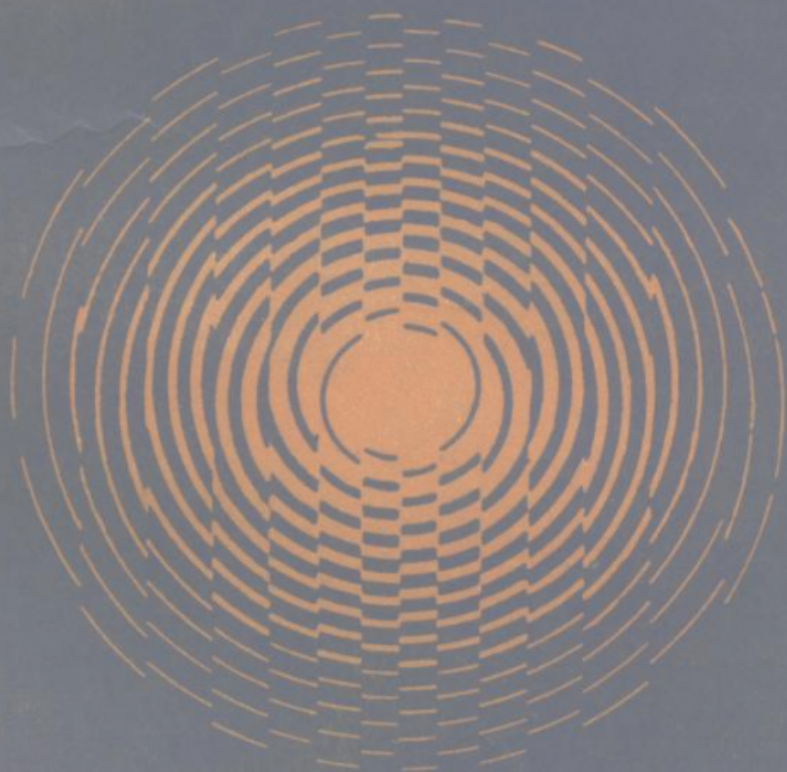


# 计算传热学

[美] 施天谟 著



科学出版社

7K120

# 计 算 传 热 学

〔美〕施天谟 著

陈越南 范正翹 陈善年 蔡 菴 译  
葛绍岩 蒋章焰 校



科 学 出 版 社

1987

## 内 容 简 介

本书是论述数值计算方法在传热学各个领域中的应用的一本专著。其特点是系统全面,内容较新,深浅合适。

全书分四篇共十五章,内容包括数值计算在热传导、层流换热、湍流换热、热辐射、燃烧、混合对流等领域中的应用。论述了各种计算方法的特征和计算技术。

本书可供机械、航空航天、工程热物理、化工、交通、力学、能源开发与利用、冶金、环境保护等有关专业的大学生、研究生、教师以及研究、设计部门的科技人员参考。

T. M. Shih

## NUMERICAL HEAT TRANSFER

Hemisphere Publishing Corporation

1984

EQ5/02

## 计 算 传 热 学

〔美〕施天谟 著

陈越南 范正超 陈善年 蔡 松 译

葛绍岩 蒋章焰 校

责任编辑 陈文芳 张英娥

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

\*

1987年12月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1987年12月第一次印刷 印张: 19 1/4

插页: 插 2

印数: 平 1—25200 字数: 502,000

统一书号: 15031·896

本社书号: 4834·15—10

定价: 布脊精装 6.50 元  
平 装 5.40 元

## 校 者 的 话

计算传热学是近十五年来形成的一门传热学分支。为了解决能源、交通、动力、节能、化工和冶金等工程技术领域中的大量传热问题，传统上都采用基于相似理论指导下的实验研究和理论分析。随着计算方法和计算技术的迅速发展，大大地推动了用数值计算方法研究传热问题的进展。计算传热学的特点是以传热现象为研究对象，以合理的数学模型与离散方法作为出发点，以电子计算机为研究手段。

计算传热学的主要优点是能以较少的费用和较短的时间预示出有实用意义和较完整信息的研究结果。对投资大和周期长的实验研究来说，它的这些优点就更为突出。虽然计算传热学不可能代替实验研究，但大量成功的通用程序和计算实例表明，它确实是一种研究复杂传热问题的有力工具。将计算传热学和实验研究相结合，不仅有助于实验方案的设计和改进，而且能缩减实验参数范围，减少实验工作量。因此，计算传热学是一种有效和经济的研究手段。

1981年，我访问马里兰大学时，施天谟教授正在完成这本书的手稿。浙江大学陈越南副教授和任安禄老师先后为这本书的代数推导和习题演算做了大量工作。我在获悉这本书的丰富内容后，没有等到英文版问世就向科学出版社推荐翻译出版这本华裔教授的新著。科学出版社欣然同意。

这是论述数值计算方法在传热学各个领域中的应用的一本专著。它包括数值计算在热传导、层流换热、湍流换热、热辐射、燃烧、混合对流等领域中的应用。书中论述了各种计算方法的特征和计算技术。此外，书中还分析了计算误差的范围，差分法和有限元法的对比。这些计算方法和误差分析的论述，为工程计算界和

计算数学界建立了学术交往的桥梁。本书中译本的出版将会对国内计算传热学的进展起到促进的作用。

葛绍岩

1985年12月于北京中国科学院工程热物理研究所

## 序

本书是为下述几种读者编写的：开始在数值分析领域内工作的传热工程师；解决传热问题的应用数学家；讲授计算传热学课程的大学教师以及学习计算传热学的大学高年级学生和研究生。

在编写时，以下四方面的考虑促进了我的工作：首先，传热学作为与利用能源和节约能源密切相关的领域已受到很大的重视，因为在世界范围内产生了能源危机。在用理论方法解决传热学问题时，因为几乎得不到封闭形的解，所以，通常倾向于大量使用计算机。第二，美国全国计算传热学学术会议于1979年9月在马里兰州的 College Park 举行，我作为这个会议的主要组织者，受到各方面强烈的反响。虽然会议文集已经出版，但在文集中收集的论文一般说来是研究与发展的结果，而不是基本概念与基础知识。对那些不太熟悉计算传热而又想有所进展的研究人员来说，会议文集恐怕就不是一个理想的资料来源。第三，虽然美国的多数主要大学已开设了计算传热学课程，但详细介绍各种数值方法的应用，它们的数值特性以及它们在导热、对流、辐射等问题上的应用的教科书还几乎没有。最后，在我看来，似乎传热工程师和应用数学家之间的联系还有些脱节。工程师们满足于传热的计算，只要得出的某些结果从物理上看是合理的就行了。他们觉得用数学上的理论去进一步研究所求出的解的数值特性是不必要的。同样，一些应用数学家则把大部分精力放在提供或发展理论上，而对工程师们的真正需要则显得似乎没有兴趣。结果是工程的解可能会不收敛，而数学家的定理则几乎不能获得实际的应用。一本能缩短这种差距的书应该说是很有用的。

在计算传热中，求解一个问题的全部过程包括下述几步：

第一步：确定物理问题。

第二步: 导出控制(积分)微分方程及相应的初始条件和边界条件。

第三步: 把这些(积分)微分方程离散成一组代数方程组。

第四步: 分析离散格式的数值特性, 如稳定性、相容性、收敛性以及误差范围。

第五步: 如果选择的格式是满意的, 那么就用矩阵法或迭代法求解代数方程组。如果不满意, 则回到第三步再选用其他格式。

第六步: 解释所求得的结果并进行讨论。

本书叙述的范围包括第三、四、五步, 略去了控制方程的推导以及对数值结果的物理解释, 因为这些内容在大多数传热学教科书中都可以找到。

更具体地说, 本书包括四部分。第一部分提供了各种数值方法(第一到第三章)的用法及数值特性(第四章)的准备知识, 想要学习这些数值方法的读者应该读第一部分。第二部分是本书的核心, 这里用第一部分所介绍的方法解出了一些简单的导热、对流、辐射问题。层流强制对流换热是重点, 因为这是基本的传热现象(第六到第九章)。第五、第十章分别介绍数值方法在导热和辐射问题上的应用。第三部分是第二部分的继续, 简要介绍了一些重要的、与传热有关的物理现象, 如自然对流与混合对流(第十一章)、湍流(第十二章)、燃烧(第十三章)。读者不必再去寻找其他参考书, 就可以按所介绍的方法去求解一些简单的物理问题。第四部分介绍了数值方法的误差范围(第十四章), 并对有限差分法和有限元法进行了比较(第十五章)。这一部分的内容可以作为工程师与应用数学家之间联系的桥梁。

本书具有值得注意的三方面的特色。首先, 整个书中所用的网格一般说来是选得很粗的, 因此用计算器就可以完成全部计算。这样一来就可以避免因编制计算机计算程序而耗费时间以及由此而可能造成的失误。一旦读者意识到粗、细网格的差别(主要是精度和稳定性), 那么, 他要是想增加网格结点的话, 就比较简单了。其

次,本书介绍了传热学领域内可能用到的绝大多数的计算方法.学习了与这些数值技巧有关的方法以后,读者或许就有能力选择解决具体问题的最合适方法.第三,每章都附有大量的例题与习题,以帮助读者加深对正文的理解.

我已得到 D. B. Spalding 教授——传热学中卓越的研究者与先行者之一——的特别许可,让我在本书序言中介绍他的某些概念. Spalding 教授认为:在用有限差分或者有限元法时,计算工作者都用到了有限个场变量及有限个子区域.这些子区域都是由网格划分整个时-空区域而成的,因此,可以认为有限差分及有限元法都是有限区域法.按照 Spalding 教授的观点,不同的有限区域法有着不同的特征,主要体现在下述几方面:(1)子区域的形状;(2)基函数(或试探函数,形状函数);(3)与代数方程有关的结点未知量的个数;(4)代数方程的系数(即使是结点未知量的个数相同);(5)导出代数方程的数学公式;(6)与线性和非线性代数方程组有关的格式.我赞同这些观点,并且欢迎读者和我进一步讨论.

最后,我要向为本书的出版作出贡献的个人表示深切的谢意.中华人民共和国浙江大学来美访问学者陈越南副教授和任安禄先生校阅了全部书稿,计算了许多数值例题,并且核对了代数运算.中华人民共和国北京大学韩厚德教授不但使我加深了对泛函分析的理解,而且提出了一些宝贵的建议和修改意见. Factory Mutual Research 的 John deris 博士,马里兰大学的 R. Bruce Kellogg 教授,国家航空和航天局戈达德空间飞行中心的 Hwa-Ping Lee 博士校阅了部分书稿并提出了一些建设性的意见.对我系里的三位同事和一些研究生也要表示感谢: Roy W. Knight 先生阅读了全部书稿并作了一些数值计算;有时和 Milton E. Palmer 教授进行了讨论,这些讨论使我受到启发;我们的系主任 Patrick F. Cunniff 教授,关切地为我安排了舒适的教学任务;学习我所讲授的计算传热学课程的学生也提出了一些建议.加州大学伯克利分校机械系的教授们,特别是 Patrick J. Pagni 教授,他是我博士论文的导师;



还有 Ralph A. Seban 教授——我曾听过他的对流换热课程——他们把我从一个幼稚的学生培养成真诚的研究人员。还要感谢海军研究局和国家科学基金会对组织美国全国计算传热学学术会议的支持。Lucille Ang 太太承担了最后定稿的繁重的打字任务，她为了完成这个任务而放弃了周末和晚上的休息。

最后，最深切地感谢我的妻子 Joyce，没有她经常的鼓励、支持、帮助和体贴，书稿恐怕只能在梦里出版。

施天谟

# 目 录

校者的话  
序

## 第一篇 基础知识

|                                   |    |
|-----------------------------------|----|
| 第一章 传热学中应用的数值方法 (I) .....         | 1  |
| 1-1 有限差分法 .....                   | 4  |
| 1-1a 二阶精度格式 .....                 | 4  |
| 1-1b 高阶精度格式 .....                 | 6  |
| 1-2 有限元 Galerkin 法和有限元变分法 .....   | 13 |
| 1-2a Galerkin 法 .....             | 17 |
| 1-2b 混合型边界条件 .....                | 28 |
| 1-2c 变分原理 .....                   | 29 |
| 1-2d 伴随变分原理 .....                 | 35 |
| 符号 .....                          | 40 |
| 习题 .....                          | 42 |
| 第二章 传热学中应用的数值方法 (II) .....        | 45 |
| 2-1 采用总体基函数的 Galerkin 法和变分法 ..... | 45 |
| 2-1a Galerkin 法 .....             | 47 |
| 2-1b 变分原理 .....                   | 51 |
| 2-1c 伴随变分原理 .....                 | 55 |
| 2-1d 混合型边界条件 .....                | 56 |
| 2-2 中心积分法 .....                   | 58 |
| 2-3 最小二乘法 .....                   | 63 |
| 2-3a 权函数 .....                    | 65 |
| 2-3b Euler-Lagrange 方程 .....      | 66 |
| 2-3c 罚泛函和罚常数 .....                | 71 |

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| 2-3d 有限元法 .....               | 73  |
| 2-4 配置法 .....                 | 75  |
| 2-4a 配置法与 Galerkin 法的联系 ..... | 76  |
| 2-4b 配置法与有限差分法的联系 .....       | 78  |
| 2-4c 正交配置 .....               | 79  |
| 符号 .....                      | 81  |
| 习题 .....                      | 82  |
| 第三章 传热学中应用的数值方法 (III) .....   | 85  |
| 3-1 一维高阶元 .....               | 85  |
| 3-1a $c^0$ 连续性 .....          | 86  |
| 3-1b $c^1$ 连续性 .....          | 93  |
| 3-1c 协调单元及分片试验 .....          | 102 |
| 3-2 积分法: 矩量法的特殊情况 .....       | 110 |
| 3-3 摄动法 .....                 | 111 |
| 3-3a 正则摄动 .....               | 112 |
| 3-3b 奇异摄动 .....               | 114 |
| 3-4 非线性两点边值问题 .....           | 118 |
| 3-4a 边值问题转换成初值问题 .....        | 118 |
| 3-4b 线性化 .....                | 125 |
| 3-4c 非线性微分方程变换成非线性代数方程组 ..... | 129 |
| 3-4d 代数方程组的迭代解法 .....         | 132 |
| 符号 .....                      | 134 |
| 习题 .....                      | 135 |
| 第四章 各种不同离散格式的数值特性 .....       | 137 |
| 4-1 数值稳定性 .....               | 138 |
| 4-1a 几个引起数值不稳定性的例子 .....      | 138 |
| 4-1b 稳态系统的稳定性准则 .....         | 142 |
| 4-1c 瞬态系统的稳定性准则 .....         | 145 |
| 4-2 数值相容性 .....               | 155 |
| 4-2a 定义 .....                 | 155 |
| 4-2b 稳定但不相容的格式 .....          | 159 |
| 4-2c 不稳定但相容的格式 .....          | 161 |
| 4-3 收敛性 .....                 | 162 |

|      |                         |     |
|------|-------------------------|-----|
| 4-3a | 定义 .....                | 162 |
| 4-3b | 有限差分公式 .....            | 163 |
| 4-3c | Galerkin 和变分有限元公式 ..... | 167 |
| 4-3d | 迭代格式 .....              | 171 |
| 4-4  | 精度和误差范围 .....           | 174 |
| 4-4a | 有限差分法的精度 .....          | 174 |
| 4-4b | 有限元法的误差范围 .....         | 175 |
| 4-5  | 效率 .....                | 176 |
|      | 符号 .....                | 177 |
|      | 习题 .....                | 178 |

## 第二篇 基本传热方式

|      |                           |     |
|------|---------------------------|-----|
| 第五章  | 导热 .....                  | 182 |
| 5-1  | 一维瞬态系统 .....              | 183 |
| 5-1a | 有限差分法(显式、隐式和混合式格式) .....  | 183 |
| 5-1b | Thomas 算法 .....           | 187 |
| 5-1c | Galerkin 有限元法 .....       | 189 |
| 5-1d | 导热系数随温度而变化时的情况 .....      | 191 |
| 5-2  | 二维稳态系统 .....              | 192 |
| 5-2a | 有限差分法(二阶精度) .....         | 193 |
| 5-2b | 有限差分法(高阶精度) .....         | 194 |
| 5-2c | Galerkin 有限元法 .....       | 197 |
| 5-2d | 总体基函数的 Ritz (变分)法 .....   | 204 |
| 5-2e | 迭代矩阵求解法 .....             | 206 |
| 5-3  | 二维瞬态系统 .....              | 210 |
| 5-3a | 有限差分法和稳定性 .....           | 210 |
| 5-3b | Galerkin 有限元法 .....       | 212 |
| 5-3c | 特征值法 .....                | 214 |
|      | 符号 .....                  | 216 |
|      | 习题 .....                  | 217 |
| 第六章  | 层流强制对流: 流体动力边界层 (I) ..... | 220 |
| 6-1  | 物理现象简述 .....              | 221 |

|      |                                |     |
|------|--------------------------------|-----|
| 6-1a | 边界层流动(抛物型) .....               | 221 |
| 6-1b | 充分发展的通道内流动(解析可积) .....         | 222 |
| 6-1c | 顺流向扩散流(椭圆型) .....              | 223 |
| 6-1d | 控制偏微分方程组 .....                 | 224 |
| 6-2  | Blasius 相似性方程式 .....           | 225 |
| 6-2a | 打靶法 .....                      | 229 |
| 6-2b | 参数展开法 .....                    | 233 |
| 6-3  | 采用 $x-\omega^*$ 变换的有限差分法 ..... | 241 |
| 6-3a | $x-\omega$ 变换 .....            | 241 |
| 6-3b | $x-\omega_D^*$ 变换 .....        | 251 |
| 6-4  | 数值稳定性、相容性和精度 .....             | 253 |
| 6-4a | 数值稳定性 .....                    | 253 |
| 6-4b | 数值相容性 .....                    | 254 |
| 6-4c | 数值精度 .....                     | 255 |
|      | 符号 .....                       | 256 |
|      | 习题 .....                       | 258 |
| 第七章  | 层流强制对流: 流体动力边界层 (II) .....     | 259 |
| 7-1  | 样条近似和高阶关系式 .....               | 259 |
| 7-1a | 二次样条公式 .....                   | 260 |
| 7-1b | 三次样条公式 .....                   | 265 |
| 7-1c | Blasius 相似性方程 .....            | 272 |
| 7-1d | 正交配置法 .....                    | 276 |
| 7-2  | 有限元法 .....                     | 277 |
| 7-2a | Galerkin 法 .....               | 277 |
| 7-2b | 伴随变分原理 .....                   | 281 |
| 7-3  | 顺流向压力梯度 .....                  | 285 |
| 7-3a | 参数展开法 .....                    | 286 |
| 7-3b | 摄动法 .....                      | 287 |
| 7-3c | 有限差分法 .....                    | 290 |
| 7-4  | 透过固体壁面的传质 .....                | 290 |
| 7-4a | 参数展开法 .....                    | 291 |
| 7-4b | 积分法 .....                      | 292 |
| 7-4c | 有限差分法 .....                    | 294 |

|                                 |            |
|---------------------------------|------------|
| 7-5 一种不用坐标变换的方法 .....           | 297        |
| 符号 .....                        | 303        |
| 习题 .....                        | 305        |
| <b>第八章 层流顺流向扩散流 .....</b>       | <b>307</b> |
| 8-1 控制偏微分方程组 .....              | 307        |
| 8-2 研究迴流问题的数值计算格式 .....         | 309        |
| 8-2a 采用交叉网格的原始变量有限差分法 .....     | 310        |
| 8-2b 原始变量有限元法 .....             | 313        |
| 8-2c 流函数-涡量法 .....              | 317        |
| 8-2d 双调和流函数公式 .....             | 317        |
| 8-2e 压力梯度法 .....                | 319        |
| 8-3 数值稳定性(一维流动) .....           | 323        |
| 8-3a 有限差分法 .....                | 324        |
| 8-3b Galerkin 有限元法 .....        | 326        |
| 8-3c 伴随变分有限元法 .....             | 328        |
| 8-3d 不对称权函数的选择 .....            | 330        |
| 8-4 对流边界条件 .....                | 331        |
| 8-5 数值不稳定性(二维流动) .....          | 333        |
| 8-5a 有限差分法 .....                | 334        |
| 8-5b 采用不对称权函数的 Galerkin 法 ..... | 337        |
| 8-5c 变分有限元法 .....               | 345        |
| 符号 .....                        | 346        |
| 习题 .....                        | 347        |
| <b>第九章 能量输运和组分输运 .....</b>      | <b>350</b> |
| 9-1 控制方程组 .....                 | 351        |
| 9-2 边界层流动(抛物型) .....            | 352        |
| 9-2a 相似性(精确)解 .....             | 353        |
| 9-2b 配置法 .....                  | 354        |
| 9-2c 有限差分法 .....                | 357        |
| 9-3 热边界层的前缘 .....               | 358        |
| 9-3a Galerkin 有限元法 .....        | 359        |
| 9-3b 应用最小二乘有限元法的一些困难 .....      | 361        |
| 9-3c 有限差分法 .....                | 364        |

|                        |     |
|------------------------|-----|
| 9-4 通道内的流动             | 367 |
| 9-4a 有限差分法             | 368 |
| 9-4b 控制容积法             | 370 |
| 符号                     | 372 |
| 习题                     | 373 |
| 第十章 辐射                 | 375 |
| 10-1 表面间的辐射换热          | 376 |
| 10-1a 黑体表面             | 376 |
| 10-1b 漫辐射-灰表面          | 379 |
| 10-2 灰气体辐射             | 381 |
| 10-2a 传递方程             | 381 |
| 10-2b 一维局部辐射热流密度       | 385 |
| 10-3 非灰气体辐射            | 388 |
| 10-3a 第一种简化: 引用全带吸收系数  | 389 |
| 10-3b 第二种简化: 指数积分近似    | 390 |
| 10-4 复合导热与辐射: 一维辐射热流密度 | 391 |
| 10-4a 有限差分法            | 392 |
| 10-4b 采用总体基函数的变分法      | 393 |
| 10-5 复合导热与辐射(二维辐射热流密度) | 395 |
| 10-6 复合导热、对流和辐射组合      | 406 |
| 符号                     | 409 |
| 习题                     | 410 |

### 第三篇 一些重要的传热现象

|                   |     |
|-------------------|-----|
| 第十一章 层流自然对流和混合对流  | 412 |
| 11-1 控制微分方程组      | 413 |
| 11-2 边界层流动(抛物型)   | 415 |
| 11-2a 相似性方法       | 416 |
| 11-2b 局部非相似性法     | 425 |
| 11-2c 离散化法        | 427 |
| 11-3 顺流向扩散流动(椭圆型) | 428 |
| 符号                | 436 |

|                                                  |     |
|--------------------------------------------------|-----|
| 习题 .....                                         | 437 |
| 第十二章 湍流导论 .....                                  | 439 |
| 12-1 对湍流的简要回顾 .....                              | 440 |
| 12-2 控制方程组 .....                                 | 441 |
| 12-3 零方程和一方程湍流模型 .....                           | 442 |
| 12-4 两方程湍流模型 .....                               | 451 |
| 12-5 高阶封闭理论 .....                                | 458 |
| 符号 .....                                         | 458 |
| 习题 .....                                         | 459 |
| 第十三章 燃烧现象导论 .....                                | 461 |
| 13-1 燃烧现象的简要评述 .....                             | 462 |
| 13-2 控制方程 .....                                  | 465 |
| 13-3 伴生的困难和推荐的解法 .....                           | 468 |
| 13-3a 关于 $\bar{q}_c''$ 和 $\bar{m}_i''$ 的说明 ..... | 468 |
| 13-3b 通过变物性体现的强烈耦合与高度非线性 .....                   | 471 |
| 13-3c 气体辐射 .....                                 | 472 |
| 13-3d 不稳定和不规则的边界 .....                           | 472 |
| 13-4 边界层火焰 .....                                 | 474 |
| 13-4a 层流火焰 .....                                 | 475 |
| 13-4b 湍流火焰 .....                                 | 483 |
| 符号 .....                                         | 484 |
| 习题 .....                                         | 485 |

## 第四篇 数值分析

|                                            |     |
|--------------------------------------------|-----|
| 第十四章 空间和误差范围 .....                         | 487 |
| 14-1 定义和例子 .....                           | 487 |
| 14-1a 空间 .....                             | 488 |
| 14-1b 线性空间 .....                           | 488 |
| 14-1c $C^0, C^1, \dots, C^\infty$ 空间 ..... | 489 |
| 14-1d 赋范空间 .....                           | 489 |
| 14-1e Cauchy 序列 .....                      | 491 |
| 14-1f 完备空间 .....                           | 492 |



|       |                                      |     |
|-------|--------------------------------------|-----|
| 14-1g | Banach 空间 .....                      | 495 |
| 14-1h | 线性无关集合 .....                         | 496 |
| 14-1i | 基函数 .....                            | 497 |
| 14-1j | 支承 .....                             | 499 |
| 14-1k | $n$ 维子空间 .....                       | 499 |
| 14-1l | 内积 .....                             | 499 |
| 14-1m | 弱(广义)解形式和双线性形式 .....                 | 500 |
| 14-1n | Hilbert 空间 .....                     | 501 |
| 14-1o | Schwarz (或 Cauchy-Schwarz) 不等式 ..... | 501 |
| 14-1p | Sobolev 空间 .....                     | 502 |
| 14-1q | 正定算子 .....                           | 503 |
| 14-2  | 有限元解的误差范围 .....                      | 504 |
| 14-3  | 二次插值函数(一维)的误差范围 .....                | 510 |
| 14-4  | 双线性插值函数(二维)的误差范围 .....               | 513 |
|       | 符号 .....                             | 514 |
|       | 习题 .....                             | 514 |
| 第十五章  | 有限差分法和有限元法的比较 .....                  | 516 |
| 15-1  | 光滑性 .....                            | 517 |
| 15-1a | 有限差分法 .....                          | 517 |
| 15-1b | 有限元法 .....                           | 519 |
| 15-2  | 数值不稳定性 .....                         | 521 |
| 15-2a | 对流数值不稳定 .....                        | 521 |
| 15-2b | 瞬态不稳定性 .....                         | 523 |
| 15-3  | 精度和误差范围 .....                        | 525 |
| 15-4  | 高阶精度的离散格式 .....                      | 527 |
| 15-4a | 有限差分公式 .....                         | 527 |
| 15-4b | 有限元公式 .....                          | 532 |
| 15-5  | 不规则几何形状的格式 .....                     | 536 |
| 15-5a | 有限差分法 .....                          | 537 |
| 15-5b | 有限元法 .....                           | 538 |
| 15-6  | 非线性项的离散化 .....                       | 541 |
| 15-6a | 有限差分法 .....                          | 542 |
| 15-6b | 有限元法 .....                           | 542 |