线性多变量系统的分析与设计

徐和生 陈锦娣 编著

国防工业出版社

线性多变量系统的分析与设计

徐和生　陈锦娣　编著

国防工业出版社

内容简介

本书介绍有限维线性多变量控制系统的基本理论和比较实用的设计方法。主要内容包括输入-输出描述，状态空间描述和微分算子描述，系统的可控性、可观测性、稳定性，系统的极点和零点，实现理论，以及有关状态反馈、状态观测器、解耦控制、灵敏度和鲁棒性、渐近跟踪和干扰抑制等问题的补偿器设计方法。

本书注重理论的物理意义或几何意义，便于读者领会问题的实质。在讨论理论和设计问题时，尽量运用便于数值计算和编制计算机程序的方法。本书避免应用高深数学，凡具有大学线性代数和微分方程知识的读者均可阅读本书。

本书可用作自动控制、系统工程、应用数学等专业研究生和本科高年级学生的教材或参考书，也可供高等学校教师、研究人员和工程技术人员参考。

线性多变量系统的分析与设计
徐和生　陈锦娣　编著
责任编辑　陈子玉
*
国防工业出版社出版、发行
（北京市车公庄西路老虎庙七号）
新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印刷
*
787×1092 1/16 印张28 3/4 667千字
1989年8月第一版 1989年8月第一次印刷 印数：0,001— 2,080册
ISBN 7-118-00961-2/TP6 定价：14.60元

前　言

线性多变量系统理论和设计是现代控制理论的一个分支。二十多年来，许多学者在不同方向进行了大量研究，取得了丰硕成果，使线性多变量系统理论和设计成为现代控制理论中最基础和最成熟的部分，而且在实际应用中也起了较大的作用。我国许多高等学校都为研究生开设了这门课程。随着科学技术的发展，工程技术人员和科学工作者也迫切需要掌握这门学科。本书是为研究生和科技工程工作者撰写的教科书和参考书。

本书介绍有限维线性多变量系统的结构和控制问题。主要内容是状态空间法和微分算子法的基本理论和设计方法。所用的数学工具是线性代数、多项式矩阵理论和微分方程，不超过研究生水平。在证明理论的同时，注意揭示其物理意义或几何意义，使读者既能掌握理论的实质而不被数学推导所困惑，又能受到逻辑思维的训练，为发展理论打下基础。基于同一原因，在利用微分算子法时，尽可能从它的传递函数矩阵出发进行研究，并与古典控制理论对照，使之易于理解和掌握。为了使读者能够应用书中介绍的成果，力求将设计方法写成便于数值计算和编制计算机程序的形式。这里应予说明的是，本书讨论的设计问题是指简单而有效的一般设计方法，不含具体工程实际问题和物理实现。

全书共分十二章。第一章介绍系统的分类和一些基本性质如因果性、线性性、定常性等。第二章是本书要用到的线性代数和多项式矩阵理论的一些概念和结果，以便读者查阅。鉴于多项式矩阵理论可能不为一些读者所掌握，写得比较详细。第三章介绍输入-输出描述(包括矩阵分式描述)、状态空间描述和微分算子描述和状态方程的解。离散系统的描述也在这里介绍。还介绍了系统的零点和极点，以及等价系统和严格系统等价的概念与性质。第四章的内容是动态系统的状态可控性和状态可观测性，输出函数可控性和输入函数可观测性以及逆系统的概念。定常系统的规范形和规范分解之所以在本章讨论是由于我们认为，在此基础上分析定常系统可控性和可观性与特征结构的关系以及若当形动态方程的可控性和可观测性，证明比较简洁。本章还讨论了多项式矩阵描述的分状态的可控性和可观测性以及它们与解耦零点的关系。在第五章中，我们对严格系统等价的性质做了进一步讨论。在此基础上研究输入-输出描述、微分算子描述与状态空间描述之间的变换关系，主要是最小实现问题。第六章是本书最短的一章，介绍线性连续和离散系统的有界输入-有界输出稳定性，平衡状态的稳定性，以及二者之间的关系，用李亚普诺夫第二方法判别线性系统的稳定性。第七章的主要内容是组合系统的状态空间描述和微分算子描述，可控性、可观测性和稳定性的讨论，以及在工程实践中有重要意义的非退化性、鲁棒性和灵敏度等问题。第八章到第十章集中讨论了控制器的设计问题。第八章讨论状态反馈、状态观测器、输入-输出反馈补偿器和串联补偿器的设计方法。第九章讨论系统的稳态性能，主要讨论输出跟踪和输出调节问题和单位反馈系统的串联补偿器和输入-输出反馈补偿器的设计方法，还将古典控制理论中的误差系数和系统型别的概念推广到多变量系统。第十章介绍解耦控制。讨论根据系统的微分算子描述的拉氏

变换即多项式矩阵描述进行。在动态解耦问题中，我们用输入-输出反馈补偿器和串联补偿器得到解耦非退化的充分必要条件，在将系统解耦的同时实现了解耦系统的极-零点配置，并讨论了解耦系统的可控性、可观测性和稳定性。第十一章在时域和频域中讨论二次型性能指标下的线性调节器和线性跟踪问题。内容包括最优控制律与加权矩阵的关系，最优闭环系统的稳定性的鲁棒性，并提出在二次型指标下的最佳传递函数矩阵的表达式，它在阶跃输入和等速输入下有渐近跟踪性质，并可据以设计出具有鲁棒性的最优控制系统。第十二章简要介绍现代频域法。主要讨论对角优势矩阵及其实现，逆奈奎斯特稳定性判据，故障稳定性，以及系统设计问题。

我们通力合作撰写了这本书，书稿虽然分别执笔，但相互审阅，提出修改意见。大体说来，徐和生写了第一～第四章和第六、第七两章，拟定编写大纲并统一全部书稿。陈锦娣写了第五章和第八～第十二章及全部习题。限于水平和时间，缺点错误在所难免。敬请读者给予批评指正。

本书承北京控制工程研究所屠善澄教授审阅了全部书稿，李宝绥高级工程师和严拱天高级工程师也参加了审阅工作。他们提出了许多宝贵意见，对此我们表示衷心的感谢。北京工业学院刘纪元同志描绘了全部图稿，我们感谢她给予的帮助。我们的研究生也为本书的完稿做了许多工作，这里不再一一表示谢忱。

目 录

第四章 线性系统的可控性和可观测性

第五章 系统各种描述之间的关系

第六章 线性系统的稳定性

第七章 组 合 系 统

第八章 线性定常系统的极-零点配置补偿器的设计

第九章 系统的稳态性能及其补偿器的设计

第十章 解耦控制

第十一章 线性最优控制

本书使用的符号

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$	列向量
$A, B, P, \cdots$	矩阵
$\overline{A}$	矩阵 A 的复共轭矩阵
A^T	矩阵 A 的转置
A^H	矩阵 A 的复共轭转置 $A^H = (\overline{A})^T$
A^{-1}	矩阵 A 的逆矩阵
$a \in A$	a 是集合 A 的元素。或 a 属于 A
$A \subset B$	集合 A 包含在集合 B 中，或 A 是 B 的子集合
$A \cup B$	集合 A 与集合 B 的并
$A \cap B$	集合 A 与集合 B 的交
$A \overset{\text{def}}{=\!=} B$	A 定义等于 B
C	复数集合
C^n	复 n 维向量空间
$\mathrm{C}^{m\times n}$	$m \times n$ 复数矩阵空间
$\mathrm{C}[s]$	复系数多项式的全体
$\mathrm{C}(s)$	复系数有理函数的全体
$\mathrm{C}[s]^{m\times n}$	$m \times n$ 复系数多项式矩阵的全体
$\mathrm{C}(s)^{m\times n}$	$m \times n$ 复有理函数矩阵的全体
$\det A$	方阵 A 的行列式
$\deg A(s)$，$\delta A(s)$	多项式矩阵和有理函数矩阵的次数
$\deg \det A(s)$	矩阵 $A(s)$ 的行列式次数
$\mathrm{diag}\{a, b, c\}$	对角线元素为 a, b, c 的对角线形矩阵，即 $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$
$\dim \mathscr{X}$	线性空间 $\mathscr{X}$ 的维数
F	域
$f: A \to B$	集合 A 到集合 B 的映射
G	群
$\mathscr{N}(A)$	线性变换或矩阵 A 的化零空间
R	实数集合
$\widetilde{\mathrm{R}}$	环
R^n	实 n 维向量空间
$\mathrm{R}^{m\times n}$	$m \times n$ 实数矩阵空间

$\mathscr{R}(A)$	线性变换或矩阵A的值域空间	$\forall s$	对于所有s
$R[s]$	实系数多项式的全体	$T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$	线性空间$\mathscr{X}$到线性空间$\mathscr{Y}$的线性变换（线性算子）
$R(s)$	实系数有理函数的全体	$T^*:\mathscr{Y}\to\mathscr{X}$	T的伴随算子
$R[s]^{m\times n}$	$m\times n$实系数多项式矩阵的全体	$\mathrm{tr}A$	方阵A的迹，即其对角线元素之和
$R(s)^{m\times n}$	$m\times n$实有理函数矩阵的全体	$\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, …	线性空间
		$\langle x, y\rangle$	向量x和y的内积
$\mathrm{rank}A$	矩阵A的秩		
$\mathscr{S}\perp\mathscr{T}$	子集合（或子空间）$\mathscr{S}$与子集合（或子空间）$\mathscr{T}$正交	$\delta_{ci}M(s)$	多项式矩阵$M(s)$第i列的次数
$\mathscr{S}^{\perp}$	子集合（或子空间）$\mathscr{S}$的正交补	$\delta_{ri}M(s)$	多项式矩阵$M(s)$第i行的次数
$\mathscr{S}+\mathscr{T}$	$\mathscr{S}$与$\mathscr{T}$的和	$\bar{\sigma}[A]$	矩阵A的最大奇异值
$\mathscr{S}\oplus\mathscr{T}$	$\mathscr{S}$与$\mathscr{T}$的直接和	$\underline{\sigma}[A]$	矩阵A的最小奇异值
$\mathscr{S}-\mathscr{T}$	$\mathscr{S}$与$\mathscr{T}$的差		

第一章　绪　　论

1.1　引　　言

自动控制理论作为一门独立学科从二十世纪四十年代起迅速地发展起来。在五十年代末以前，自动控制理论研究的对象主要是单输入-单输出线性定常系统，尽管在非线性系统和时变系统方面也有重要成果。单输入-单输出系统的输入量和输出量都只有一个，因而又简称单变量系统。描述单输入-单输出线性定常系统的数学方程是线性常系数微分方程或线性常系数差分方程，研究的内容是系统特性的分析和系统设计的方法，所用的方法是时域法和频域法，即用微分方程或差分方程和传递函数或频率特性描述系统的特性。这两种方法是交替发展的。由于频域法更便于应用，工程上常用频率特性曲线和根轨迹进行这种系统的分析和设计。设计步骤基本是探试法。这种以单变量系统为研究对象的控制理论称为古典控制理论，在工程上得到了广泛而卓有成效的应用，迄今还有不少工程领域仍用它为基本设计方法。但是，随着科学技术的发展，学科之间的相互渗透，出现了许多更为复杂的系统，而且对于系统性能要求。不只满足于符合指定的指标，而且要求性能指标最优化，因而提出了许多以前未发现和未解决的问题。系统的复杂性可能表现在不同方面，例如系统阶数的高低，非线性因素的多少和非线性特性的差异，系统输入和输出个数的多少，系统参数是集总的或分布的，系统参数的数值是不变的还是随时间而变的，等等。这些情况在航天、航空、航海、武器系统的制导、导航和控制，工程过程控制，及经济系统、生物系统、管理科学中都可能存在。这些新问题是古典控制理论难以解决的。由于新课题的提出和数字计算机科学的迅速发展，五十年代末，出现了以状态变量为标志的现代控制理论，经过二十多年的发展，现代控制理论已形成了有许多分支的学科。

线性多变量控制系统理论是现代控制理论的重要分支之一，是最基础最成熟且在工程设计上应用得较有成效的分支之一。线性系统理论之所以得到迅速发展，并且仍将是继续深入研究的课题，决不是偶然的。我们知道，控制理论所研究的模型必须具有普遍性，亦即它能够充当大量而又重要的物理系统的模型，而且它本身的数学结构又与数学的发展相协调，才有可能据以发展丰富而有用的理论，解决实际问题。线性系统（模型）具有这样的特点，如许多物理系统实际上可以相当精确地用线性模型来描述，线性模型的研究已有丰富的成果，有强有力的数学理论可资应用（尽管现在仍在不断地发展）等。非线性系统的研究则要困难得多。除少数问题有统一处理方法以外，大量问题只能根据具体情况分别处理。

线性多变量控制系统理论研究的内容是线性多变量系统的分析与设计。如所周知，对于物理系统的研究通常包括四个步骤：（a）建立模型和它的数学描述，统称为建立数学模型；（b）理论分析，主要是研究具有普遍意义的系统的固有特性；（c）设计方法；（d）物理实现。现分别简介于下。

建立模型是分析和设计系统首先要解决的问题。简单物理系统中进行的物理过程虽

已为人们所熟知，但在分析系统时，如将这些过程不分主次地一一予以考虑，势必加大分析过程的工作量，而又得不到明显的效果。若根据系统的工作情况和需要解决的问题，分析影响系统运动的主要和次要因素，然后略去次要因素，建立一个等效的简化系统，则处理就方便得多。这个既具有原物理系统的主要特征，又有便于处理优点的简化系统称为物理系统的模型。晶体管放大器的等效电路就是它的模型。根据所要解决的问题和运行范围的不同，一个物理系统可以有不同的模型，例如工作于不同频率的晶体管放大器的模型（等效电路）就不一样。模型确定以后，引用相应的物理定律，建立描述模型的动态行为的数学方程，称为数学模型。一个模型的数学描述，由于研究的问题不同，也可有不同的形式。例如可以用电容器作为莱顿（Leyden）瓶的模型。如果要得出电容器上存贮的电量 $q(t)$，可用下式描述模型

$$q(t)=Cu(t) \tag{1.1}$$

其中 $u(t)$ 是电容器（模型）的端电压，C 是它的电容量。只要测出 $u(t)$ 的值，就可由式（1.1）算出电荷 $q(t)$。如果要得出的是充电电流，则用下式更为方便：

$$i(t)=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{1.2}$$

式（1.1）和（1.2）是模型的两种数学描述。当然，如果物理系统的模型选择不当，再好的数学描述也是没有意义的。

一些复杂的系统，例如化工系统，生物系统，经济系统等，它们的内部结构尚未完全被人们所掌握，用已知的科学定律建立它们的模型是不可能的，唯一可行的办法是根据测得的大量数据，用统计的方法建立数学模型并估计其参数，这就是系统辨识的内容。

由于不同物理系统的数学模型可以是相同的，例如简单质量、弹簧和阻尼器串联组成的机械系统，其自由运动方程是

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+f\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx=0 \tag{1.3}$$

由电阻、电感和电容相串联所构成的电路的自由运动方程是

$$L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{C}q=0 \tag{1.4}$$

尽管这两个系统的物理性质完全不同，但描写它们自由运动的方程的结构则完全一样。

我们将数学模型结构相同的物理系统归纳为一类，予以统一的研究。本书称数学模型为系统，而不管它们的物理性质如何。由于系统辨识是现代控制理论的另一分支，本书不予介绍。只用简单的物理系统阐述模型的建立。

系统（即模型）的分析和设计的任务是揭示系统的内部和外部特性，并在此基础上提出设计系统的有效方法。这是本书的重点。至于系统的物理实现，不包括在本书范围之内。

本书介绍有限维线性系统的理论，讨论这类系统的结构性质和控制问题。在未介绍这些问题以前，下节先对系统的固有性质作一简单的回顾。

1.2 系统的一些共同性质和系统的分类

一个系统可用“黑箱”来表示，它有 p 个输入端和 q 个输出端。在输入端可以引入

以某种方式变化的输入信号(或称输入变量)，在输出端可以观测到受初始状态和输入信号影响的输出信号(输出变量)，如图(1.1)所示。输入变量可以是电流、电压、力、热量、原料或资本，输出变量可以是电压、电流、位置、速度、产品或利润。

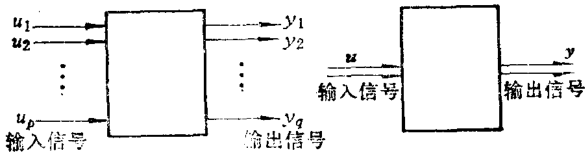

图1.1　具有 p 个输入和 q 个输出的系统

我们用输入变量为元素构成一个向量称为输入向量 $\boldsymbol{u}$，用同样方法构成输出向量 $\boldsymbol{y}$。输入向量和输出向量都以整体形式出现。作为符号，$\boldsymbol{u}(\cdot)$或$\boldsymbol{u}$表示它的元素是某个自变量的函数，本书中，总以时间为自变量，$\boldsymbol{u}(t)$则表示$\boldsymbol{u}(\cdot)$在时刻 t 的值。所有可能输入向量的总体，称为输入集合，所有可能输出向量的总体称为输出集合。它们分别构成输入空间$\mathscr{U}$和输出空间$\mathscr{Y}$，且都是实线性空间，记为$\mathscr{U}=\mathrm{R}^p$和$\mathscr{Y}=\mathrm{R}^q$。在实际物理系统中，由于运行条件的限制，或为了方程能够求解，输入变量往往受到某些约束，例如只能在某一范围内取值，或只能取某种时间函数的形式，如分段连续、连续可微等，这类受约束的输入称为容许输入。

从数学角度看，系统相当于一个算子或者函数，它将容许输入空间$\mathscr{U}$映射到适当的输出空间$\mathscr{Y}$。可用符号表示为

$$T:\mathscr{U}\to\mathscr{Y} \tag{1.5}$$

若在未加入输入信号以前系统是松弛的，即系统的输出依赖于且仅依赖于输入，系统输入-输出关系可表示为

$$\boldsymbol{y}(\cdot)=T\boldsymbol{u}(\cdot) \tag{1.6}$$

（1）因果系统　任何物理系统的输入和输出之间有确定的因果关系。输入（包括初始条件）是因，输出是果；输入出现于前，输出继之于后；过去可以影响未来，未来却不能影响过去。简言之，系统在时刻 t 的输出只取决于时刻 t 和 t 以前的输入，而与时刻 t 以后的输入无关，或者说，现在的输出与未来的输入无关。这一性质称为因果性。具有这个性质的系统称为因果系统。正是由于因果性存在于一切实际系统之中，才使我们用输入-输出关系表征系统的固有特性成为可能。

（2）可实现系统　具有因果性，且对于所有实函数输入 u，其输出都是同一自变量的实函数 y 的系统，称之为可实现系统。

（3）确定型系统和随机型系统　对于每一对输入和初始条件只有唯一输出的系统称为确定型系统。非确定型或称随机型系统对于一对给定输入和初始条件可以有许多可能输出，每个输出以某一概率出现。实际上系统中的信号总是伴有随机干扰的，若随机干扰的作用对于系统工作的影响可忽略不计，这类系统仍认为是确定型的。本书只讨论确定型系统。

（4）静态系统和动态系统　静态系统亦称无记忆系统，它在任何时刻t_1的响应只取决于时刻t_1的输入，而与时刻t_1以前的输入无关。若系统在 t_1的响应除与该时刻的输入有关外，还受t_1 以前输入的影响，这类系统称为动态系统。

（5）集总参数系统和分布参数系统　可用有限个标量变量描述的系统称为集总参数系统。反之称为分布参数系统。集总参数系统的特性用常微分方程描述，分布参数系统则用偏微分方程描述。本书只讨论集总参数系统。

（6）连续时间系统和离散时间系统　简称连续系统和离散系统。连续系统的变量如输入和输出都是连续时间 t 的函数。在某一时间区间内，系统的变量对该区间中的任何 t 都必须有唯一定义。用以描述连续系统的是微分方程。若系统的变量只在时间 t 的离散值序列上有定义则称这类系统为离散系统。在常见的离散系统中，定义变量的时刻是等距离的，并定义为 $t=t_0+kT$。在这里，T 为两个采样时刻间的距离，称为采样周期；k 是函数的自变量，取为整数。离散系统用差分方程描述。

（7）单变量系统和多变量系统

定义1.1　只有一个输入端和一个输出端的系统称单输入-单输出系统，或称单变量系统。输入端或（和）输出端多于一个的系统称为多变量系统。

多变量系统有 p 个输入和 q 个输出，其中 p 或（和）q 大于1。一般每个输出受 p 个输入的影响，称为互相耦合。这是多变量系统的特有性质，使现代控制理论不同于古典控制理论。多变量控制系统的实例很多，例如化工过程控制，就是需要同时控制压力、温度、浓度等；飞机和宇宙飞船的运动是由三个输入来控制；发电站、核反应堆、喷气发动机、机器人等，都有许多输入和输出互相耦合。

（8）定常系统和时变系统　定常系统又称时不变系统。若系统的特性不随时间而改变，或者说，系统的输入和输出之间的关系与时间无关的系统，称为定常系统。它的运动方程的系数是常数。为了给出数学上的确切定义，我们引用位移算子这一概念。令 T_α 表示位移算子，它作用于某一函数 $f(t)$ 的结果是将 $f(t)$ 在时间上延迟 α 个时间单位，即对于任何 t 和 α，有

$$(T_\alpha f)(t)=f(t-\alpha)$$

定义1.2　令 $T:\mathscr{U}\to\mathscr{Y}$ 是一个系统。若对于任何输入 $\boldsymbol{u}(t)\in\mathscr{U}$，和任何实数 α 有

$$T(T_\alpha\boldsymbol{u})(t)=T_\alpha(T\boldsymbol{u})(t) \tag{1.7a}$$

或

$$\boldsymbol{y}(t-\alpha)=\boldsymbol{u}(t-\alpha) \tag{1.7b}$$

亦即若算子 T 和 T_α 可交换，则系统是定常的。其物理含义是，若输入信号推迟 α 秒施加于系统，输出信号也延迟 α 秒，波形保持不变。换句话说，不管输入在什么时间施加于系统，其输入与输出的关系不变。图1.2表示系统的定常性 $\boldsymbol{y}(t-\alpha)=T\boldsymbol{u}(t-\alpha)$。

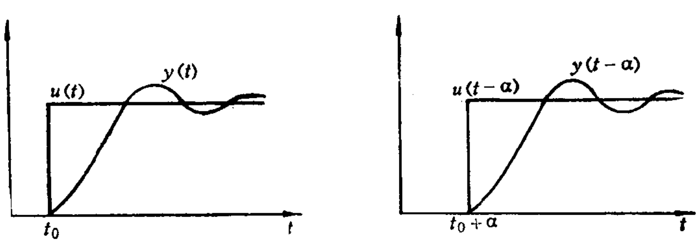

图1.2　单变量定常系统的输入和输出

（9）线性系统和非线性系统

定义1.3　设 $\boldsymbol{u}_1$ 和 $\boldsymbol{u}_2$ 是系统的输入空间 $\mathscr{U}$ 中两个任意向量，α 为任意实数。对于初

始条件为零的系统，若在同一域上的输入空间和输出空间之间的变换 $T:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ 是线性的，则称这类系统是线性系统，否则称为非线性系统。

线性变换的数学表示式为

$$T(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2)=T\boldsymbol{u}_1+T\boldsymbol{u}_2 \tag{1.8}$$

$$T(\alpha\boldsymbol{u})=\alpha T\boldsymbol{u} \tag{1.9}$$

$$T\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{u}_i\right)=\lim_{N\to\infty}T\left(\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{u}_i\right) \tag{1.10}$$

式（1.8）所表示的关系称为叠加性，式（1.9）所表示的关系称为齐次性，式(1.10)所表示的关系称为平滑性。迭加性、齐次性和平滑性的含意是不相同的，只有三者均被满足的系统才是线性系统。现举例说明式(1.8)，(1.9)和(1.10)的不一致性。

例1.1 定义变换 f

$$f(x)=\left[\int_a^b x^3(t)\mathrm{d}t\right]^{1/3}$$

试证 f 是齐次的但不是迭加的。

解 $$f(kx)=\left[\int_a^b (kx(t))^3\mathrm{d}t\right]^{1/3}=k\left[\int_a^b x^3(t)\mathrm{d}t\right]^{1/3}=kf(t)$$

满足齐次性。

$$\begin{aligned}f(x_1+x_2)&=\left[\int_a^b (x_1(t)+x_2(t))^3\mathrm{d}t\right]^{1/3}\\&=\left[\int_a^b (x_1^3(t)+3x_1^2(t)x_2(t)+3x_1(t)x_2^2(t)+x_2^3(t))\mathrm{d}t\right]^{1/3}\\&\neq\left[\int_a^b x_1^3(t)\mathrm{d}t\right]^{1/3}+\left[\int_a^b x_2^3(t)\mathrm{d}t\right]^{1/3}\end{aligned}$$

不满足迭加性。

例1.2 设一单变量系统的输入 u 为分段连续函数，在（$-\infty$，∞）上具有有限个有限跳跃（即第一类间断点）而其输出 $y=L(u)$ 为 u 从 $-\infty$ 到观测时刻 t 之间各间断点跳跃值的代数和。

令

$$\begin{aligned}u&=\theta(t)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{j\omega}e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\sin\omega t\mathrm{d}\omega\\&=\lim_{\substack{N\to\infty\\(\Delta\omega\to 0)}}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{\pi k}\sin(k\Delta\omega t)\end{aligned}$$

其中 $\theta(t)$ 表示单位阶跃函数，则

$$y=f(u)=f\left(\lim_{\substack{N\to\infty\\(\Delta\omega\to 0)}}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{\pi k}\sin(k\Delta\omega t)\right)=\theta(t)$$

而

$$f\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{\pi k}\sin(k\Delta\omega t)\right)=0$$