

複变数理论与变换运标

N.W. 麥克拉西兰著

科学出版社

複变数理论与变换运标

及其在技术上的应用

麥克拉西兰 著

魏 伯 玉 譯

科 学 出 版 社

1959

001120

2770/04

McLACHLAN
COMPLEX VARIABLE THEORY
AND
TRANSFORM CALCULUS
WITH TECHNICAL APPLICATIONS
Cambridge
At The University Press
SECOND EDITION
1955

內 容 簡 介

本書闡明複變函數論在工程技术上的应用,而重点放在应用方面,并附有大量例题,供讀者参考及練習。書內所介紹的必要的複變函數的基础知識不比一般工程数学書中介绍的为少;至于应用方面和有关积分方面的一些資料則相当丰富,是同类書籍中所少見的。本書可供高等工业学校的学生,教师和工程师参考之用。

複变数理論与变换运轉

N. W. McLachlan 著
魏 伯 玉 譯

科学出版社出版 (北京朝陽門大街117号)
北京市書刊出版業營業許可証出字第001号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

1959年8月第一版 書号:1815 字数:301,000
1959年8月第一次印刷 开本:850×1168 1/32
(京)0001-5,700 印张:11 1/2

定价:1.90元

第 二 版 序

在 1936—7 年准备初版的底稿时,其严格程度似乎是恰当的了,但某些閱过此書的純粹数学家(和物理学家!)却不同意。在其后的一段时期科技数学的标准有了改进,于是現在可以比以前更严格了。因此关于复变数理論的几章已經重写过,扩增了且使严格到对一切人都足够了,純粹数学家除外,他們不是本書的对象。書中使用小字体各节講到較艰澀的題材可在第一次閱讀时省略,到需要时再参看。書中其余部份也都全校訂过而使之近代化。某些旧节已經被取消代之以更重要的題材,例如重复脉冲、富氏变换及頻率譜已加进了第十章。解常微分方程利用 p -乘拉氏变换的表或梅林变换定理,由考虑的問題而定。有关偏微分方程各节已改过。通过拉氏变换的处理,使初始条件易于結合。梅林定理用来作逆換¹⁾。有載荷与无載荷的海底电报纜的实际資料都已給出。由計算所得的及收得訊号的实际形状以及在电纜两端所用电路的圖都在第十三章內再次刊出。有載荷电纜的資料由 A. L. Meyers 先生供給而关于无載荷电纜的是由作者补充。关于电滤波器还增加了节数,借助于一新定理²⁾,对散能滤波器的解答已經被簡便地表成一定积分形式。为讀者准备的例題的数目和类别已增加了,而参考文献目录也增添了。关于書內用到的許多級数的收敛性,給了一个附录,这該是有用的。 p -乘拉氏变换的新表只包括本書所需的內容,因較詳尽的表可在別处找到^[235a, b]。

本書和那本名称为“近代运算微积”的書^[236]有相輔作用,且可一塊兒使用,后者采用实变数和拉氏变换方法,这样就把这題材进行处理到一个阶段,由那里接下去改用复变数方法会更有利,如这書內所示。在許多牽涉偏微分方程的科技問題的解答和漸近公式的推导中就需复变数积分法。

1) 疊施拉氏变换以解偏微分方程在[266]內有范例。

2) N. W. McLachlan, Math. Gaz. 30, 85, 1946.

T. J. Higgen 教授和 E. J. Scott 教授校閱了証明而 A. J. Macintyre 博士和 C. Strachen 校閱了部分的底稿,我十分感謝这几位先生,他們的批評和指教是很寶貴的。最后,借这机会我对 Pierre Humbert 表示深切的謝忱,由于他的指正使 [235a] 內的表不致遺漏。

N. W. 麦克拉西兰

1952 年 5 月

初 版 序

本書的意圖是對所謂“運算法”作新的處理，並闡明它在技術科學的不同部門中的應用。雖然作者原意主要是為了數學的技術科學工作者¹⁾，本書的某些部分也許對別的人也有用處。

讀者會詫異，何以在§8.11中拉氏積分(1)的外面要用上一個 p ，理由如下：(i)由於有 p ，各種函數的運算形式²⁾就等同於由赫維賽法所獲得的。這種形式已有久遠而廣泛的使用，因而不宜有所改變³⁾。(ii) t^n 的運算形式為 $n!/p^n$ 。於是若把 t 和 p 看作各具有量綱 d 和 d^{-1} ，且若 $f(t)$ 和它的運算形式可展成絕對收斂的級數，則對應的項，對量綱來說，就等同了。從核對的意圖來說，這是有用的，如在參考文獻[205]的§10內所示。

本書分成四部分，(I)復變數，(II)運算微積，(III)技術應用和讀者可作的例題，(IV)附錄和參考文獻目錄。頭三部分的每部分前都有導論⁴⁾，需要在開始學習那部分時先仔細閱讀。第一部分必須完全理解。讀完每一章後，在第三部分末尾有關的例題應做出…。當讀者消化了第一部分，對八至十各章前一部分的知識掌握了之後，就可轉到第三部分。為了避免在中途插進有關論點的注解，在第四部分給出許多附錄。在全書中它們是常常要用作參考的…。

技術工作者既不適於，也沒有時間，去追求嚴格到最後的“ ϵ ”。正如數學工作者要駕駛汽車不必熟悉熱力學和內燃機設計那樣，技術科學工作者不必知道如何去證明他所用到的一切定理。但就像數學家司機一樣，他必須熟悉公路規章。換言之，適當的嚴格是需要的，而我希望這書之內已經在數學的要求與實用的需要兩者之間取

1) 指使用數學去解決各種技術問題(例如聲學的，航空學的，化學的，電學的，力學的，熱學的問題)的人等等。這名詞也適用於從事工業和應用的研究工作的數學家。

2) 在二版中表為 p -乘拉氏變換。

3) 這理由現已不適用(1952)。

4) 在第二版中已略去了。

得了愉快的協調。

某些人也許會認為，整個的說，這書是難念的，因為其中復變數積分居于重要地位。回顧半世紀前，我們發覺工程師把微分積分學看成他們大多數所不能接觸到的神秘的东西。而今天工程方面的學者已經跨越了微積分（至少微積分對他們來說只是小量而不很够的一部分）。因此若這書能把復變積分介紹給諳英語的數學技術科學工作者，單在這方面，它就起了作用。還有，此後培養未來科技工作者的教師不再為這樣一個課程緊張而煩惱，這課程在大陸（歐洲）的工業技術專科學校中的課程表上若干年來一直是很重要的。

符號。我們引用一個新符號 $\supset$ 來表示“運算式”，理由見[131]。圓的一端對着運算式，而開的一端對着與它對應的 t 的函數，例如 $f(t) \supset \phi(p)$ 。 m, n, r 用來表整數，而 μ, ν 表無限制的數， $R(\nu)$ 表“ ν 的實數部分”。黑體字的符號表每單位長度或面積，視情形而定……

N. W. 麥克拉西蘭

倫敦 1939 年 3 月

目 录

第二版序	iii
初版序	v

第一部 复变数理論

第一章 复变数函数	1
第二章 积分、勾犀定理、泰勒定理和罗朗定理	24
第三章 殘数計算	46
第四章 白朗姆維齐路綫、等效路綫、积分計算	60
第五章 伽馬 (gamma), 誤差及貝塞尔函数	83
第六章 当 $\phi(z)$ 有支点时, $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{e^{zt}\phi(z)dz}{z}$ 的計算	102
第七章 积分号下微分和积分	114

第二部 变换运算理論

第八章 梅林反变换定理、变换理論	124
第九章 常系数的綫性常微分方程的解法	142
第十章 不連續函数、脉冲、頻率譜	150

第三部 第一部和第二部的科技应用

第十一章 电路、振荡体系、飞机动力学、梁的弯曲	178
第十二章 无綫电和电视接收机	194
第十三章 綫性偏微分方程、傳电綫、滤波器	209
第十四章 有金屬心的螺管綫圈、电容諧筒、扩音器	256
第十五章 热的扩散、潮气的吸收	275
讀者可作的例题	291

第四部 附录及参考文献目录

附录 1. 定积分的模不能超过极大模 M 和路程 l 长度之乘积	307
2. 当 $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2} \pi$ 时, $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$ 的证明	307
3. 渐近级数	308
4. 梅林反变换定理	311
5. 路线的变换	315
6. 在 Br_2 上 p^n 的反变换, $n \geq 1$	320
7. 在 Br_1 上, 当 $R(\nu) \geq 1$ 时 p^ν 的反变换	321
8. 乘积定理	323
9. 无穷级数的收敛性	326
10. p -乘拉氏变换式简表	329
参考文献 A. 科学论文	333
B. 书籍	342
C. 增添的文献	344
索引	346

第一部 复变数理論

第一章 复变数函数

1.1. 定义及圖形表示 如果一个复数 $w=u+iv$ 和另一个复数 $z=x+iy$ 之間有一种联系使 w 的值由 z 的值唯一地决定时, 則 w 称为 z 的一个函数. 变数 u, v, x, y 为实数, u 与 v 为 x, y 的实函数.

圖 1 表明大家知道的阿根 (Argand) 或向量圖, 其中 P 为复变数 $x+iy$ 的代表点, 它在被我們看作 z -平面的平面內. 在圖 1 內, 虽然 $\theta < \frac{1}{2}\pi$, 但 PON 的一般值为 $(\theta + 2n\pi)$, n 表任意的非零整数. 設向量 OP 繞中心 O 以反时針方向旋轉 (这旋轉方向被取作正向). 当 OP 每一次經過圖上所示位置时, 就得出对应的 z 的值. 因 $x=r \cos \theta$, $y=r \sin \theta$, z 的一般值为

$$z = r \{ \cos(\theta + 2n\pi) + i \sin(\theta + 2n\pi) \} = r e^{i(\theta + 2n\pi)} = r e^{i\theta}, \quad (1)$$

其中

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ 而 } e^{2n\pi i} = 1, n \text{ 取正值.}$$

考虑函数

$$w = z^2 \quad (2)$$

若以 (1) 中的一般值代 z , 則有

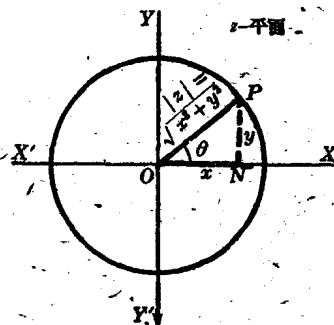


圖 1. $\theta = z$ 的相.

$$w = r^2 e^{i(2\theta + 4n\pi)} \quad (3)$$

因 $e^{i(2\theta + 4n\pi)} = e^{2i\theta}$, 故若 r 与 θ 均为定值, 则 w 对一切的 n 值恒等. 所以对应于每一个 z 的值只有 w 的一个值, 因此 w 名为 z 的一个單值函数. 还有, 对 z 的一切有限值, w 被唯一地决定.

在实变数的情形下, 关系 $y^2 = x$ 意味着 $y = \pm \sqrt{x}$, 可見对应于每一个正的 x 值, 有两个绝对值相等而符号相反的 y 值. 所以 y 不是被任何的正 x 值, 零除外, 唯一地决定. 考虑复变数的函数时, 我們將避免这种含混性. 为此, 变数 z 将被限制, 在一个規定好的角度范围内, 使所考虑的函数能被唯一地决定. 这种情形, 将来就要論及.

若 w 与 z 均为实变数, 它們之間的关系, 可以用大家知道的几何方法来表成一平面曲綫, 这复数时就不可能了, 因为有了四个变数. 例如, 若 $z = x + iy$, 由 (2) 得

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy, \quad (4)$$

于是,

$$u(x, y) = (x^2 - y^2) \text{ 而 } v(x, y) = 2xy \quad (5)$$

还有, u 与 v 都是 x 与 y 两者的函数. (5) 內每一关系都表示一曲面, 采用圖形射影的某种形式, 这两曲面是可以表示出来的. 但, 一种比較令人滿意的办法是“計算对应于各 x 及 y 的值的 w 的模”; 于是, 利用等距 (isometric) 圖紙, 模曲面是可以描画出来的. 描画模曲面的观点归功于赫孚特 (Heffter)¹⁾. 圖 2 表明 $w = z^2$ 的情形, 在那里

$$|w| = \sqrt{u^2 + v^2} = x^2 + y^2. \quad (6)$$

复变数 z 可以用通过軸 ox 及 oy 的 z -平面中任一点来表示. 因此在圖 2 中, z 的范围是毫无限制的, 模曲面及函数 $w = z^2$ 均为連續, 而在 z 为有限的条件下, $|w|$ 为有限. 除无穷远点外, 每一点的曲面坡度为有限且連續.

1.2. 連續性 若对应于一給出的正量 ε , 无論怎样小, 总可找到一有限正量 η 使

$$\text{当 } |z - a| < \eta, \text{ 有 } |f(z) - f(a)| < \varepsilon. \quad (1)$$

1) Z. Math. Phys. 44, 235, 1899.

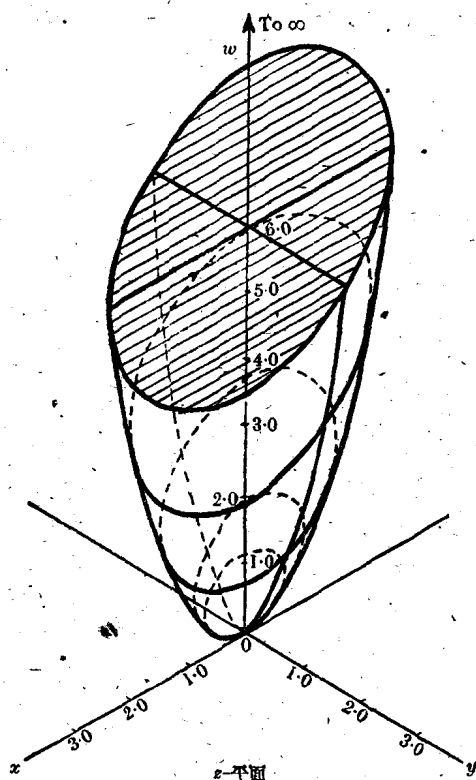


圖 2. 函数 $w=z^2$ 的模曲面(旋轉拋物面); 等距描圖.

則函数 $w=f(z)$ 称为連續于点 $z=a$. 这也可以說作:“若 $f(a)$ 有确定的值且 $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$, 則 $f(z)$ 在 $z=a$ 处是連續的.”圖 3(a) 內, P 表点 a , 而 z 为以 P 为心的小圓上的任一点. 上面所說 $f(z)$ 在 a 連續的情况是与 z 趋近 a 的方向无关的. 例如, 可以沿 NP , MP , 或任何曲綫, 像 RP . 作为一个例子, 考虑函数 $w=(z-a)^2$, 它和 §1.1 的 (2) 是一样的, 只不过是原点移到了点 $z=a$ 而已. 取圖 3(b) 內的 P 作为輔助原点,

$$PN=r=|z-a| \text{ 而 } (z-a)=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

于是, 当 N 从小圓上任一点, 沿任何路綫趋近 P , $r \rightarrow 0$, 且 $z \rightarrow a$, 故

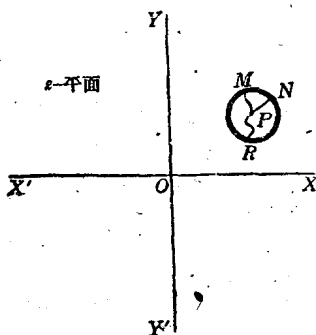
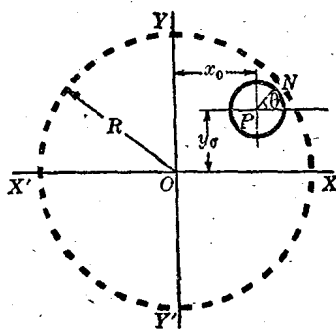


圖 3(a).

圖 3(b). $OP=a=x_0+iy_0$. z 是小圓上任一點, 如 $R>|z|$ 及 $|a|$, 則 $2R>|z+a|$.

在極限情形下 $r=0$ 与 $z=a$. 現在, 若 z 和 a 均在以 O 为圓心, 以 R 为半徑的圓內, 即圖 3(b) 中虛綫圓內, 則有

$$|f(z)-f(a)| = |(z-a)^2| \leq |(z-a)(z+a)| < 2R|z-a|. \quad (2)$$

故若 $|z-a| < \frac{\varepsilon}{2R}$, 則

$$|f(z)-f(a)| < \varepsilon, \quad (3)$$

因而函数 $w=(z-a)^2$ 在点 $z=a$ 处是連續的. 在这例子里, η 的一个适当值是 $\frac{\varepsilon}{2R}$.

为了說明間断性, 考虑函数

$$w = \frac{1}{z-a}.$$

当 z 从任何方向趋近点 a (參看圖 3(b)), $\frac{1}{z-a}$ 无限地增大, 即 $f(z) \rightarrow \infty$ 当 $z \rightarrow a$. 因而函数在 $z=a$ 无确定值, 故为間断, 它的一阶导数亦然.

若一函 $f(z)$ 在一个給出的区域内各点上都連續, 就称它在这区域内是連續的. 例如, $w=z^2$ 对 z 的一切值, 无限大除外为連續, 而 $w=\frac{1}{z}$ 在一切点連續, 原点除外, n 次的任一多項式

$$w = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n,$$

为單值的,且在 z -平面的有限部分連續.

z 的連續函数也就是两实变数 x, y 的連續函数,在 $w = z^2$ 的情况,取 $a = x_0 + iy_0$, 就有(参看圖 3(b))

$$z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy = u(x, y) + iv(x, y), \quad (4)$$

$$a^2 = x_0^2 - y_0^2 + 2ix_0y_0 = u_0(x, y) + iv_0(x, y). \quad (5)$$

故

$$z^2 - a^2 = (u - u_0) + i(v - v_0), \quad (6)$$

且

$$|u - u_0| \leq |z^2 - a^2| < \varepsilon, \quad (7)$$

只要 $|z - a| < \eta$, 等号当 $v = v_0$ 时成立.

現在

$$|z - a| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (8)$$

若 $(x - x_0)$ 与 $(y - y_0)$ 均 $< \frac{\eta}{\sqrt{2}}$ (此条件是可以滿足的), 則 $|z - a|$ 就小于 η , 于是有

$$|u - u_0| < \varepsilon, \quad (9)$$

故 u 是 x 与 y 的連續函数而表一連續曲面. 函数 v 可以同样处理. 因 u 与 v 均为 x 与 y 的連續函数, 于是 $w = z^2$ 亦为这两变数的連續函数.

1.31. 导数的定义 設 z 为圖 3(b) 內, 以 a 为中心的小圓上的任一点. 假設在选定一无论怎样小的实正数 ε 之后, 总可找到一实数 η 使: 当小圓半径, 即 $|z - a|$, $< \eta$ 时, 有

$$\left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} - f'(a) \right| < \varepsilon. \quad (1)$$

于是(1)可写成

$$f(z) = f(a) + (z - a)f'(a) + \lambda(z - a), \quad (2)$$

其中, $|\lambda| < \varepsilon$. 在極限时当 $z \rightarrow a$ 及 $|\lambda| \rightarrow 0$, (2)可以写为:

$$f'(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}. \quad (3)$$

如果我們把 z 作为小圓的圓心且把 $|h|$ 作为它的半径, 則 $(z + h)$ 为圓周上任一点. 于是在(3)內, 把 a 写成 z , 把 z 写成 $(z + h)$, 之后, 就得

$$f'(z) = \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (4)$$

公式(4)看起来是与实变数时的公式相同,但在解释方面有点差别,这就要在 § 1.32 里加以说明。

1.32. 例 考虑指数函数 e^z . 它在 z -面的任何有限区域内是有限的且是單值的. 設 z 为圖 3(a) 中, 以 $|h|$ 为半径的小圓圓心 P , 而 $(z+h)$ 为圓周上任一点. 于是由 § 1.31 的 (4), 有

$$f'(z) = \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{e^{z+h} - e^z}{(z+h) - z} = \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{e^z(e^h - 1)}{h} = \quad (1)$$

$$= \lim_{|h| \rightarrow 0} e^z \left(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \dots \right), \quad (2)$$

于是

$$\frac{d(e^z)}{dz} = e^z. \quad (3)$$

以圖 3(a) 中的 P 为輔助原点,

$$h = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta},$$

表小圓 MNR 上任一点, 这圓的半径为

$$r = PN = |h|.$$

将(2)中的 h , 施以代換, 得

$$\frac{e^{z+h} - e^z}{(z+h) - z} = e^z \left(1 + \frac{re^{i\theta}}{2!} + \frac{r^2 e^{2i\theta}}{3!} + \dots \right), \quad (4)$$

而此式, 当 $r = |h| \rightarrow 0$, 趋于 e^z , 与 θ 无关. 即是說, 極限值与小圓上的 h 趋近点 P 的方向无关. 在实变数的情形, h 沿平行于 x -軸的方向趋于零, 这就是两种極限的差別. z 的任何解析函数的导数, 对实变数和对复变数講, 是一样的.

1.33. 解析, 正則, 或全純函数的定义 如果复变数 $x+iy$ 的函数 $f(z)$ 在包含 z_0 的区域内是單值的, 而且

(i) $f(z_0)$ 有唯一的有限值,

(ii) 在 $z=z_0$ 处, $f(z)$ 有唯一而有限的导数值 $f'(z_0)$, 使

$$\left[\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \right] - f'(z_0) \rightarrow 0, \text{ 当 } |h| \rightarrow 0.$$

則函数 $f(z)$ 称为“在 z -平面内一点 z_0 是解析的, 正则的, 或全純的”. 若在 z -平面一区域内的一切点, 函数是解析的, 因而也是連續的, 則称为“在区域内是解析的”.

例 因 e^z 和它的一阶导数, 在 z -平面的任何有界限的区域内, 都是唯一而有限, 故在那里, 指数函数是解析的. 在 § 1.53 就要指出, 它在无穷远不是解析的.

1.34. 解析函数的勾犀-黎曼条件 复变数的連續函数可表成形式

$$w(z) = u(x, y) + iv(x, y); \quad (1)$$

其中 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 均为 x, y 的連續函数, 例如 § 1.1 內的 (4), (5), 于是

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u + i\partial v}{\partial x + i\partial y}, \quad (2)$$

現在我們要得出, 当 $\delta z \rightarrow 0$, 这比值趋近一确定極限的条件. 由 § 1.32, 导数是与 $\delta z \rightarrow 0$ 的路綫无关的, 所以我們可以令 δx 与 δy 相繼地趋于零.

在 (1) 內, 設 y 不变而令 x 增加一小量 δx , 就有

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{u(x + \delta x, y) - u(x, y)}{\delta x} + i \frac{v(x + \delta x, y) - v(x, y)}{\delta x}. \quad (3)$$

当 $\delta x \rightarrow 0$ 时, (3) 要能趋于一極限, u, v 必須有对 x 的偏导数, 故有

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (4)$$

令 x 不变而 y 变, 有

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (5)$$

要 (3), (4) 中的 $\lim \frac{\partial w}{\partial z}$ 相等, 必然有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ 和 } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (6)$$

$\frac{\partial w}{\partial z}$ 要有唯一的極限, 在 (6) 的各项均为連續的条件下, 这些勾犀-黎曼条件是必要的. 現在假设这些条件在一点 z 滿足, 我們要証明它們是充分的. 于是 u, v 和它們的一阶偏导数在 z 的邻域內均为連續, 故有^[250]

$$\delta u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \delta y + \lambda_1 \delta x + \lambda_2 \delta y, \quad (7)$$

及

$$\delta v = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta y + \lambda_3 \delta x + \lambda_4 \delta y, \quad (8)$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \rightarrow 0$ (当 δx 和 $\delta y \rightarrow 0$), 将 (6) 中的第二个关系代入 (7) 和 (8), 得

$$\begin{aligned} \delta w &= \delta u + i\delta v = \\ &= \frac{\partial v}{\partial y} (\delta x + i\delta y) - i \frac{\partial u}{\partial y} (\delta x + i\delta y) + (\lambda_1 + i\lambda_3)\delta x + (\lambda_2 + i\lambda_4)\delta y. \end{aligned} \quad (9)$$

于是由 (2), (9) 有

$$\frac{\delta w}{\delta z} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} + (\lambda_1 + i\lambda_3) \frac{\delta x}{\delta z} + (\lambda_2 + i\lambda_4) \frac{\delta y}{\delta z}. \quad (10)$$

現因 $\left| \frac{\delta x}{\delta z} \right|$ 和 $\left| \frac{\delta y}{\delta z} \right| \leq 1$, 故当 $\delta z \rightarrow 0$, (10) 中的最后两项亦趋于零, 于是我們得到 (5). (4) 的结果可同样导出, 故我們已經証明了, 若勾犀-黎曼条件滿足, 則 $w'(z)$ 存在, 因而 $w(z)$ 在点 z 处是解析的. 所以对解析性來說这些条件是必要而充分的.

可以証明

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (11)$$

故 $\frac{dw}{dz}$ 可写成四种不同的形式. 由于关系 (4), (5), u 和 v 有时称作共轭¹⁾ 函数. 因 $w(z)$ 在点 z 处为解析的, 由 § 2.41 立得: u 和 v 对 x 和 y 有連續的二阶导数. 于是由 (6) 有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \text{ 和 } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad (12)$$

相加后, 有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (13)$$

同样, 有

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (14)$$

故 u, v 都滿足两自变数 x, y 的拉普拉斯方程.

勾犀-黎曼条件的極坐标形 对应于 (6), 我們有

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \text{ 和 } \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (15)$$

这些公式的推导留給讀者作为練習.

1.35. 例

1° § 1.1 的 (4) 是解析函数; 因

1) 这里的“共轭”并不表示 $u \pm iv$ 为共轭的意义.