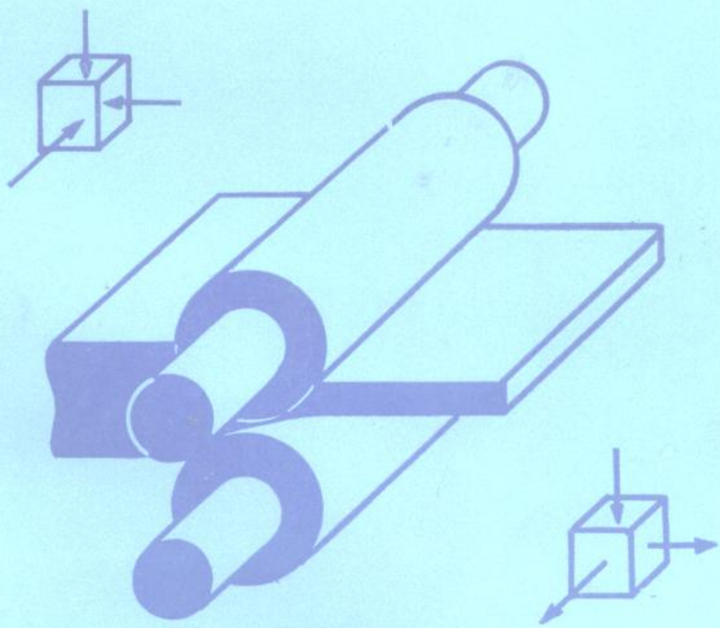
# 轧制理论基础

吕立华 编著

ZHAZHI LILUN JICHU



重庆大学出版社

# 轧制理论基础

吕立华　编著

重 庆 大 学 出 版 社

## 内 容 提 要

本书是根据高等学校轧钢专业教学大纲编写的轧制理论教材，由浅入深地介绍了压力加工过程中金属塑性变形时的力学理论基础（应力，应变理论，屈服条件等），金属在压力加工过程中基本流动规律和摩擦与润滑理论。轧制原理部分详细地阐明了轧制过程中的基本概念，侧重利用工程计算法讨论了轧制过程中力能参数（单位压力，轧制压力，力矩和功率等）的计算。

本书除作轧钢专业本科生轧制理论的教材外，还可作为该专业大专生教学用书，并可供有关工程技术人员参考。

**轧制理论基础**

吕立华　编著

责任编辑　董若璟

重庆大学出版社出版发行

新　华　书　店　经　销

重庆大学出版社印刷厂印刷

开本：787×1092　1/16　印张：11.75　字数：293 千

1991年5月第1版　1991年5月第1次印刷

印数：1—2500

标准书号：ISBN 7-5624-0308-2 / TG·17　定价：3.11元

# 前　　言

《轧制理论基础》是根据金属压力加工专业的教学大纲和作者多年的教学体会，参阅国内外有关资料编写而成的。本书系统地讲述了金属塑性加工力学的基础理论和轧制原理两方面内容。前者主要讨论了应力，应变理论，金属变形的基本规律，金属的塑性和变形抗力，摩擦与润滑等基础理论；后者比较详细地介绍了轧制过程中金属流动规律和利用工程计算法计算轧制过程力能参数。

本书编写力求做到物理概念阐述简单明了，深入浅出，保持理论的系统性，便于课堂讲授和学生自学。

本书除作为大专院校金属压力加工专业轧制理论教材外，也可作为金属压力加工专业大专生塑性力学教材，并可供从事压力加工专业工作的工程技术人员参考。

本书在编写过程中得到重庆大学和重庆大学冶金系的支持，张德一副教授仔细地审阅了全稿，提出了许多有益的建议。在此，谨对同志们的帮助表示深切的谢意。

由于编者业务水平所限和时间仓促，书中难免有不当和缺点，谨请读者批评指正。

编　　者

一九九〇年九月

# 目　　录

# 绪　论

## 一、金属塑性成形技术在国民经济中的作用

金属塑性成形技术是利用金属的塑性，在外力作用下改变其原始形状、尺寸和性质，从而获得人们所需要的成品和半成品的一种加工方法。又称之为金属压力加工。

金属压力加工时，如不计切头、切尾、火耗等损失，加工过程中可以看作加工前、后重量不变，所以又叫无屑加工。金属压力加工与其它加工成形方法（铸造，切削，焊接等）相比具有如下优点：

1.金属材料经过相应的压力加工后，不但其形状，尺寸发生了变化，其内部组织和各种机械-物理性能都获得改善和提高。

2.利用金属压力加工方法得到的产品，由于近年来采用先进的技术和装备，精度日益提高。这些零件可进行少量的切削加工，甚至直接用于机械制造工业之中，这样既节约了金属又节省了能耗。

3.金属压力加工方法具有很高的生产效率适合于大批量生产，成本低。

由于金属压力加工具有这些优点，因而占钢铁总产量90％以上都要采用金属压力加工方法获得成品和半成品。由此可见，金属成形技术在国民经济中起着重要的作用。

## 二、金属塑性成形方法的分类

金属压力加工方法很多，目前分类方法也不统一，本书主要按加工时工件的变形温度特征和工件变形时受力及变形方式来分类。

### （一）按温度特征分类

1.热加工：在充分（完全）再结晶温度以上的温度范围内所完成的加工过程。一般是在其熔点绝对温度0.75～0.95倍的范围内。

2.冷加工：在完全不产生组织的恢复和再结晶的温度下的加工过程。一般是在其熔点绝对温度0.25倍以下，基本上是在室温条件下完成的加工过程。

3.温加工：将金属加热到室温以上至再结晶开始温度以下进行的变形过程，称为温加工。

热加工是为了降低金属变形时的变形抗力和提高金属的塑性，从而获得外观尺寸精确和强度高、组织性能良好的产品。热加工时，为了获得优质产品，近年来常常采用控制加热温度，变形终了温度，变形温度和加工后金属材料冷却速度等新工艺，从而提高金属材料的强度和韧性。

冷加工的实质是：冷加工—退火—冷加工……成品退火等工序，可以得到表面光洁，尺寸精确，形状规整，组织性能良好的产品。

温加工的目的有的是为了降低变形抗力(如奥氏体不锈钢温轧)；也有的是为了在韧性不显著降低时提高钢材的强度。如合金结构钢在低温过冷不稳定奥氏体区进行温轧，然后冷却下来获得微细结构的马氏体，并进行回火，从而得到具有一定韧性的高强度钢。

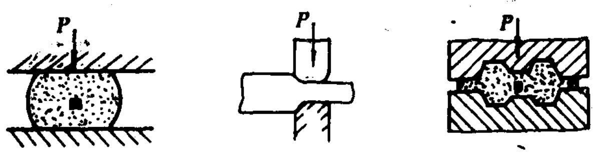
（二）按受力和变形方式分类

由压力的作用使金属产生变形的方式有锻造，轧制和挤压

1.锻造：锻造是借助于锻锤和各种压力机压缩工件，而实现塑性加工变形的一种工艺过程。其特点是锻造工具只做直线运动，并且是间隙、断续地动作。如图（0－1）。

2.轧制：金属坯料通过转动的轧辊受到压缩，使其横断面减小、形状改变、长度增加的过程。轧制又可分为纵轧，横轧和斜轧。

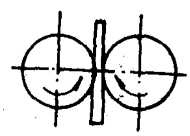
*a*）纵轧：见图（0－2）。工作轧辊旋转方向相反，轧件的运动方向与轧辊轴线相垂直。



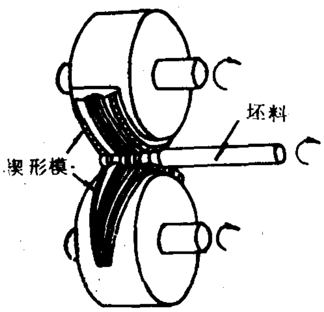

（*a*）　（*b*）　（*c*）

镦粗　延伸　模锻

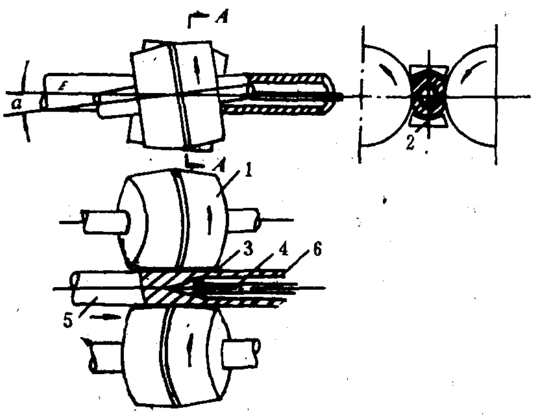
图（0－1）　锻造



图（0－2）　纵轧




图（0－3）　横轧




图（0－4）　斜轧

1—轧辊；2—导板；3—顶头；4—顶杆；5—管坯；6—毛管

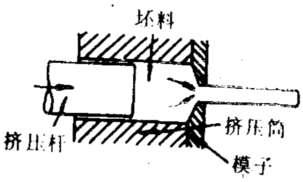
*b*）横轧：见图（0－3）。工作轧辊旋转方向相同，轧件运动方向与轧辊轴线相平行，轧件与轧辊同步旋转。

*c*）斜轧：见图（0－4）。工作轧辊的旋转方向相同，轧件的运动方向与轧辊轴线成一定的倾角。

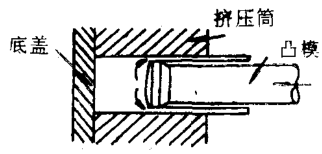
利用轧制方法，可以获得板材，带材，简单断面和异型断面的型材，管材，各种周期断面型材等。

3.挤压：把坯料放在压挤筒中靠水压机的推头（或压挤捍）使金属从一定形状和尺寸的模孔中挤出，获得符合模子（截面形状）的型材和管材。挤压分为正挤压和反挤压。正挤压时，压挤捍的运动方向和从模孔中挤出的金属方向一致；反挤压时压挤捍的运动方向和从模孔中挤出的金属方向相反，如图（0－5）和图（0－6）。

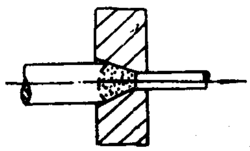
4.拉拔：将大截面坯料通过一定形状和尺寸的模孔中拉出的成形方法，如图（0－7）利



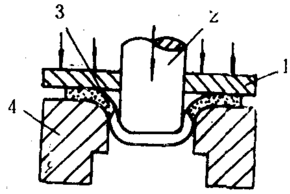

图（0－5） 正挤压




图（0－6） 反挤压



图（0－7） 拉拔




图（0－8） 冲压
1—压边；2—凸模；3—坯料；4—凹模

用拉拔可以产生各种断面的型材，线材和管材。

5.冲压（拉延）：压力机的冲头把板料顶入凹模中进行拉延，加工方法如图（0－8）.可生产各种薄壳零件或成品。

金属塑性成型方法还有弯曲，剪切和组合变形等方法。

### 三、轧制理论基础课程研究的基本内容

塑性成形方法很多，尽管各具有其特点，但是都建立在共同的金属学和加工力学基础上。本书将着重阐述下列内容。

1.在学习有关力学课程和金属学基础上，分析影响金属塑性和变形抗力的各种因素，以便选择最优的加工条件，获得质量优良的产品。

2.研究加工变形中变形物体内部应力及变形分布的基础上，采用工程计算法求解锻造、轧制过程之变形力和变形功，以便正确选择压力加工设备和加工工具的结构及强度。

3.分析塑性变形时金属流动的规律，以寻求原始坯料的形状、尺寸与加工后工件的形状尺寸之间关系。

4.研究塑性成形过程中之摩擦与润滑，以便正确选用塑性成形时的摩擦定律来计算变形力和变形功，采用合理的润滑剂改善塑性加工条件，达到高产低消耗的目的。

# 第一章　应力及变形理论

在材料力学中，为了求得物体内的应力，常将物体沿某截面切开，或从结点拆开，取剩下的部份为隔离体，在一定假设条件下，直接利用内力和外力平衡条件求出切面上的应力分布，这种方法叫做切面法。塑性理论的方法就是假想把物体切成无数个极其微小的体积素——单元微分体。一个单元微分体代表物体的一个质点。根据单元微分体的平衡条件，写出平衡微分方程组。这样，方程就具有微分的形式，问题就归结为解一系列偏微分方程组。

为了以上的目的，本章主要研究以下几个问题：

1）应力，应变概念；

2）物体内各点应力分量和应变分量函数之期的关系，即平衡微分方程和相容方程；

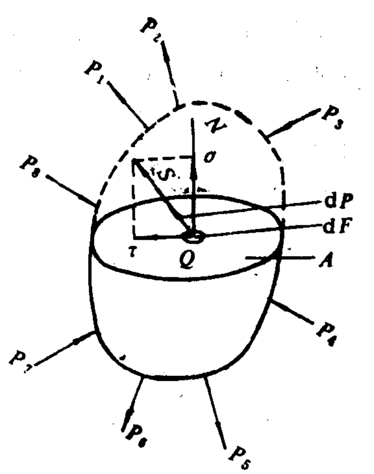
3）物体内的一点，沿各个不同方向应力之间和应变之间的关系，即一点的应力状态，及一点的应变状态的分析；

4）塑性变形时，应力与应变之间的关系，标志进入塑性流动的应力条件即屈服条件或塑性方程等。

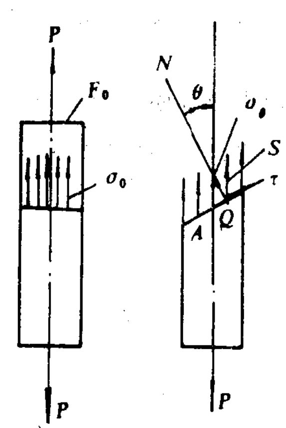
## §1－1　外力和应力

物体所承受的外力可以分成两类，一类是作用在物体表面上的力，叫做面力或接触力，它可以是集中力，但更一般的是分布力。第二类是作用在物体每个质点上的力，例如重力、磁力以及惯性力等等，叫做体力。塑性成形时，除了少数特殊情况之外，体力相对面力而言是很小的，可以忽略不计。一般都假定面力是静力平衡力系。

在外力作用下，物体内各质点之间就会产生相互作用的力，叫做内力。单位面积上的内力叫做应力。现考虑一物体，它在外力系$P_1$，$P_2$，$P_3$……$P_8$作用下处于平衡状态，如图(1-1)所示。设物体内有任意一点$Q$，过$Q$作一法线为$N$的平面$A$，将物体切开而移去上半部。这时




图（1－1）　面力、内力和应力




图（1－2）　单向均匀拉伸时的应力

$A$面即可看成是下半部的外表面，$A$面上作用的内力应该与下半部其余的外力保持平衡。这样，内力的问题就可以当成外力来处理。

在$A$面上围绕$Q$点取一很小的微面积$\Delta F$，设该面积上内力的合力为$\Delta P$，则定义

$$S=\lim_{\Delta F\to 0}\frac{\Delta P}{\Delta F}=\frac{dP}{dF}$$

为$A$面上$Q$点的全应力。全应力$S$可以分解成两个分量，一个垂直于$A$面，叫做正应力，一般用$\sigma$表示；另一个平行于$A$面，叫做剪应力，用$\tau$表示。这时，面积$dF$可叫做$Q$点在$N$方向的微分面，$S$、$\sigma$及$\tau$则分别称为$Q$点在$N$方向微分面上的全应力、正应力及剪应力。

通过$Q$点可以作无限多的切面。在不同方向的切面上，$Q$点的应力显然是不同的。现以单向均匀拉伸为例（图1－2）进行分析。设一断面积为$F_0$的匀截面棒料承受拉力$P$，通过棒料内一点$Q$作一切面$A$，其法线$N$与拉伸轴成$\theta$角，将棒料切开而移去上半部。由于是均匀拉伸，故$A$面上的应力是均匀的。设$Q$点在$A$面上的全应力为$S$，则$S$的方向一定平行于拉伸轴，而大小则为

$$S=\frac{P}{\dfrac{F_0}{\cos\theta}}=\frac{P}{F_0}\cos\theta=\sigma_0\cos\theta \tag{1-1}$$

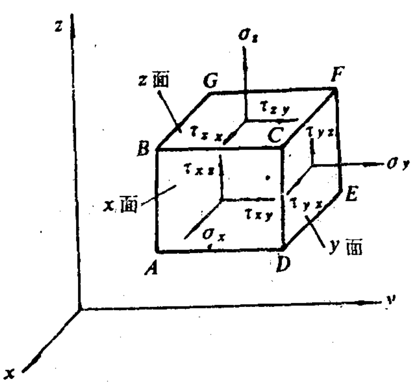
式中$\sigma_0$即为垂直于拉伸的切面上的正应力。全应力$S$的正应力分量及剪应力分量可用下式求得：

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=S\cdot\cos\theta=\sigma_0\cos^2\theta\\ \tau&=S\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\sigma_0\sin 2\theta\end{aligned}\right\} \tag{1-2}$$

在上述这种简单拉伸情况下，只要知道$Q$点任意一个切面上的应力，就可以通过式（1－2）求得其它截面上的应力。但是，仅仅用某一方向切面上的应力并不足以全面地表示出一点所受应力的情况。为了全面地表示一点受力情况，就需引入“点应力状态”的概念。

## §1－2　直角坐标系中一点的应力状态

设直角坐标系中有一承受任意力系的物体，物体内有一任意点$Q$，围绕$Q$切取一矩形六面体作为单元体，其棱边分别平行于三根坐标轴。取六面体中三个相互垂直的表面作为微分面，如果这三个微分面上的应力为已知，则该单元体任意方向上的应力分量都可以定出。这就是说，可以用质点在三个相互垂直的微分面上的应力完整地描述该质点的应力状态。




图（1－3）　单元体上应力分量

三个相互垂直微分面上的应力都可以按坐标轴的方向分成三个分量。由于每个微分面都与一坐标轴垂直而与另两坐标轴平行，故三个应力分量中必有一个是正应力分量，另两个则是剪应力分量。如图（1－3）所示。

为了清楚地表示出各个微分面上的应力分量，三个微分面都可用各自的法向方向命名，例如图（1－3）

中$ABCD$面叫$x$面，$CDEF$面叫$y$面，等。每个应力分量的符号都带有两个下角标。第一个角标表示该应力分量的作用面，第二个角标则表示它的作用方向。由此可见，两个下角标相同的是正应力分量，例如$\sigma_{xx}$即表示$x$面上平行$x$轴的正应力分量。为了简单起见，通常将正应力的第二个角标删掉，于是$\sigma_{xx}$，$\sigma_{yy}$及$\sigma_{zz}$可分别写成$\sigma_x$，$\sigma_y$及$\sigma_z$。同样，两个下角标不同的是剪应力分量，例如$\tau_{xy}$即表示$x$面上平行$y$轴的剪应力分量。为了清楚起见，可将九个分量表示如下：

$\sigma_{xx}$ $\tau_{xy}$ $\tau_{xz}$ —— 作用在$x$面上

$\tau_{yx}$ $\sigma_{yy}$ $\tau_{yz}$ —— 作用在$y$面上

$\tau_{zx}$ $\tau_{zy}$ $\sigma_{zz}$ —— 作用在$z$面上

作用方向为$z$

作用方向为$y$

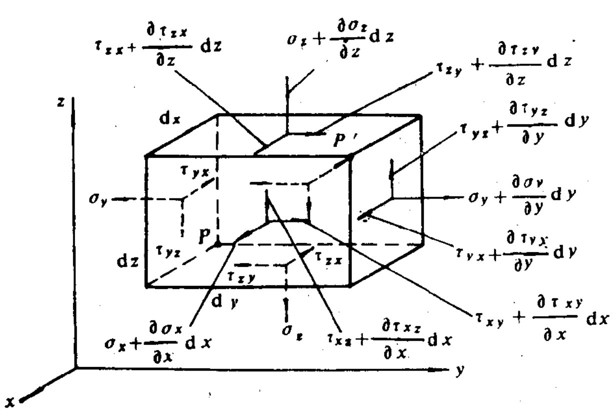
作用方向为$x$

按以上的规则，为表示过一点的单元微分体上的三个相互垂直面上的应力，共需九个应力符号，这些应力分量就是三个正应力$\sigma_x$，$\sigma_y$，$\sigma_z$；六个剪应力：$\tau_{xy}$，$\tau_{xz}$，$\tau_{yx}$，$\tau_{yz}$，$\tau_{zx}$，$\tau_{yz}$。它们统称为一点的应力分量。

对各应力分量的正负号按以下方法确定：在单元体上，外法线的指向与坐标轴的正向一致的微分面（图 1－3 中的前，右及上三个面）叫做正面，反之称为负面。在正面上，应力分量指向坐标轴正向的取正号，指向负向的取负号。负面上的应力分量则相反，指向坐标轴负向的为正，反之为负。按此规定，正应力分量以拉为正，以压为负。图（1－3）中画出的剪应力分量都是正的。

## §1－3　应力平衡微分方程

在外力作用下处于平衡状态的变形物体内，各点的应力分量是不同的，但是必须满足应力平衡方程式。下面讨论平衡微分方程用直角坐标系表示。




图（1－4）　单元体六个面上的应力分量

设物体（连续体）内有一点$P$，其坐标为$x$，$y$及$z$。以$P$点为顶点切取一个边长为$dx, dy, dz$的平行六面体。平面体另一顶点$P'$的坐标为$x+dx$，$y+dy$及$z+dz$。如图（1－4）。

由于坐标的微量变化，各个应力分量也将产生微量的变化。一般情况下，人们认为应力分量都是坐标的连续函数，而且有连续的一阶偏导数。设$P$点在$x$面上的正应力分量为$\sigma_x$，那么在$P'$点的$x$面上，由于坐标变化了$dx$，故正应力分量表示为$\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx$。同理，如果以$\tau_{yx}$代表$P$点作用在$y$面上的$x$方向剪应力分量，则过$P'$点$y$面上的$x$

方向剪应力分量应表示为 $\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy$，因为这两个面在 $y$ 坐标上相差了 $dy$。据此，也可以写出其余的应力分量。如图（1－4）所示。如果忽略体积力，则变形体内任意个体素必须满足以下六个静力平衡方程式：

$\Sigma x=0 \quad \Sigma y=0 \quad \Sigma z=0$

$\Sigma M_x=0 \quad \Sigma M_y=0 \quad \Sigma M_z=0$

式中　$\Sigma x$，$\Sigma y$，$\Sigma z$—分别为 $x$，$y$ 及 $z$ 方向的合力．

$\Sigma M_x$，$\Sigma M_y$，$\Sigma M_z$—分别为绕 $x$，$y$ 及 $z$ 轴的合力矩。

由平衡条件 $\Sigma x=0$，有

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dzdx$$

$$+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)dxdy-\sigma_x dydz-\tau_{yx}dzdx-\tau_{zx}dxdy=0$$

经整理则得：

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=0$$

同理，$\Sigma y=0$，$\Sigma z=0$，分别得

$$\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=0$$

$$\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0$$

把以上三式联写在一起，则得出质点的三个平衡微分方程式；

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=0\\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0\end{aligned}\right\} \qquad (1-3)$$

这个方程实际上是应力分量函数（它们代表了物体内各点的应力分量）间的一组微分关系。凡处于平衡状态的物体，其应力分量函数都应满足这个方程。

下面考虑力矩平衡。以过单元体中心且平行于 $x$ 轴的直线为轴线取力矩，由于 $\Sigma M_x=0$，则

$$\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}dy\right)dxdz\frac{dy}{2}+\tau_{yz}dxdz\frac{dy}{2}-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}dz\right)dxdy\frac{dz}{2}$$

$$-\tau_{zy}dxdy\frac{dz}{2}=0$$

忽略微量后可得：

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}$$

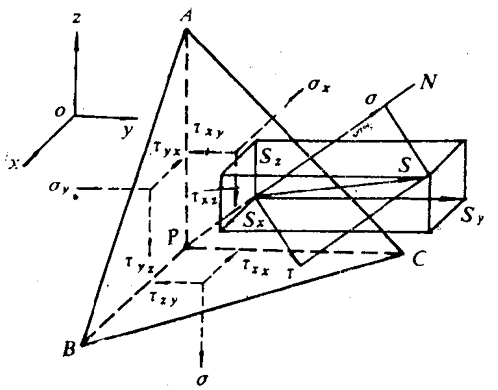
同理可得

$$\tau_{zx}=\tau_{xz};\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}$$

将上面三式联写在一起，得到任意一点处应力分量的另一组关系式：

$$\tau_{xy}=\tau_{yx},\quad \tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz}$$

这个结果表明：任意一点处的六个剪应力分量成对相等，称为剪应力互等定律。由此可得，前节所说一点的九个应力分量中，独立的只有六个应力分量。为了便于表示，把它们写成一个列矩阵，用 $\{\sigma\}$ 代表，即




图（1－5） 斜切微分面上的应力

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}\qquad (1-4)$$

上式称为应力列矩阵。

## §1－4 斜面上的应力

现假定，已知物体内任意一点的六个应力分量 $\sigma_x$，$\sigma_y,\sigma_z,\tau_{xy}=\tau_{yx}$，$\tau_{yz}=\tau_{zy}$，$\tau_{xz}=\tau_{zx}$。可以证明，过此点所作的任意斜切面上的应力，皆可通过这六个应力分量求出。也就是说，当已知一点上述六个应力分量时，该点的应力状态即可完全确定。

取质点 $P$（单元体）与坐标系 $x\ y\ z$ 中的原点 $o$ 重合。单元体的六个应力分量已知。现有一任意方向的斜切微分面 $ABC$ 把单元体切成一个微小的四面体 $PABC$（图1－5），该微分面上的应力就是质点在任意切面上的应力，它们可以通过四面体 $PABC$ 的静力平衡求得。设以 $dF$ 表示微分面 $ABC$ 的面积，则四面体上其余三个微分面 $PAC$，$PBC$，$PAB$ 将分别为 $dF$ 面在三个坐标面上的投影。即表示为 $dF_x$，$dF_y$，$dF_z$。以 $N$ 表示 $ABC$ 微分面的外法线，$N$ 的方向余弦为 $l$，$m$，$n$。令 $l=\cos(x,N)$；$m=\cos(y,N)$；$n=\cos(z,N)$。则三个微分面的面积分别是

$$dF_x=l dF,\quad dF_y=m dF,\quad dF_z=n dF$$

设 $S$ 为微分面 $ABC$ 上的全应力，它的三个坐标方向的应力分量为 $S_x$，$S_y$ 及 $S_z$。由静力平衡方程式 $\Sigma x=0$，$\Sigma y=0$，$\Sigma z=0$，将有：

$$\left.\begin{aligned}
&\text{在 } x \text{ 方向}\quad S_x dF-\sigma_x l dF-\tau_{yx} m dF-\tau_{zx} n dF=0\\
&\text{在 } y \text{ 方向}\quad S_y dF-\tau_{xy} l dF-\sigma_y m dF-\tau_{zy} n dF=0\\
&\text{在 } z \text{ 方向}\quad S_z dF-\tau_{xz} l dF-\tau_{yz} m dF-\sigma_z n dF=0
\end{aligned}\right\}\qquad (1-5)$$

整理后得

$$\left.\begin{aligned}
S_x&=\sigma_x l+\tau_{yx} m+\tau_{zx} n\\
S_y&=\tau_{xy} l+\sigma_y m+\tau_{zy} n\\
S_z&=\tau_{xz} l+\tau_{yz} m+\sigma_z n
\end{aligned}\right\}\qquad (1-6)$$

作用在斜面上的合力为

$$S^2=S_x^2+S_y^2+S_z^2 \qquad (1-7)$$

设斜面$ABC$的面积为1，故$S$就是此斜切面上的全应力。

全应力$S$向斜面$ABC$法线$N$上投影，就是该面上的正应力$\sigma$。也等于全应力$S$的各分量$S_x$、$S_y$、$S_z$分别向$N$方向的投影合：

$$\sigma=S_x l+S_y m+S_z n$$

把（1－6）式代入上式，整理后得

$$\sigma=\sigma_x l^2+\sigma_y m^2+\sigma_z n^2+2(\tau_{xy}lm+\tau_{yz}dn+\tau_{zx}nl) \qquad (1-8)$$

斜面上的剪应力$\tau$为

$$S^2=\sigma^2+\tau^2 \qquad \tau=\sqrt{S^2-\sigma^2} \qquad (1-9)$$

由此可见，如果变形体内任意质点在三个相互垂直切面上的各应力分量已知，便可以确定过该点任意方向切面上的应力。

如果质点处在物体的边界上，斜切面恰为物体的外表面，那么该面上作用的就是外力$P$，它们在各坐标轴上的分量分别为$P_x$、$P_y$、$P_z$。这时式（1－6）所表示的平衡关系仍应满足，则

$$\begin{aligned} P_x&=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n \\ P_y&=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{zy}n \\ P_z&=\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n \end{aligned} \qquad (1-10)$$

式中$l$，$m$，$n$分别表示过外表面上任意质点切面的法线与坐标轴夹角的余弦。

## §1－5　主应力和应力不变量

由式（1－8）和（1－9）可知，如果一点的六个应力分量已知，那么过该点任意斜切面的正应力和切应力都是该切面外法线方向余弦的函数。可以证明，过一点的所有切面中，都存在着这样三个互相垂直的特殊微分面，在这些微分面上剪应力为零。这些没有剪应力的微分面称为过该点的主平面，面上作用的正应力称为主应力，主平面的法线方向称为该点应力主方向或应力主轴。对应于任意一点的应力状态，一定存在相互垂直的三个主方向、三个主平面和三个主应力。若选三个相互垂直的主方向作为坐标轴，那么可以使问题大为简化。

三个主应力和三个相互垂直的主方向都可以由任意坐标系的应力分量求得。设某点的六个应力分量已知，并假定图（1－5）中的斜切面$ABC$正好是主平面，该斜切面的法向方向余弦为$l$、$m$、$n$，面上的剪应力为零，正应力$\sigma$为主应力。由式（1－9）可知$\sigma=S$，于是主应力$\sigma$在三个坐标轴方向上的投影就是$S_x$、$S_y$和$S_z$，即

$$S_x=\sigma l,\ S_y=\sigma m,\ S_z=\sigma n$$

代入式（1－6）中得

$$\begin{aligned} \sigma l&=\sigma_x l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n \\ \sigma m&=\tau_{xy}l+\sigma_y m+\tau_{yz}n \\ \sigma n&=\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+\sigma_z n \end{aligned}$$

整理后得

$$
\left.\begin{aligned}
(\sigma_x-\sigma)l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n&=0\\
\tau_{xy}l+(\sigma_y-\sigma)m+\tau_{zy}n&=0\\
\tau_{xz}l+\tau_{yz}m+(\sigma_z-\sigma)n&=0
\end{aligned}\right\}\tag{1-11}
$$

上式是一个求 $l$，$m$，$n$ 的齐次线性方程组，常数项为零。由解析几何可知，三个方向余弦之间必有以下的关系：

$$l^2+m^2+n^2=1 \tag{1-12}$$

所以 $l$，$m$，$n$ 不会同时等于零，即存在非零解。该方程组存在非零解的条件是方程组的系数所组成的行列式等于零，即

$$
\begin{vmatrix}
(\sigma_x-\sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\
\tau_{xy} & (\sigma_y-\sigma) & \tau_{zy}\\
\tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z-\sigma)
\end{vmatrix}=0
$$

展开行列式，得到以$\sigma$为未知数的三次方程：

$$\sigma^3-(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\sigma^2+[\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)]\sigma$$

$$-[\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-(\sigma_x\tau_{yz}^2+\sigma_y\tau_{zx}^2+\sigma_z\tau_{xy}^2)]=0$$

设

$$
\left.\begin{aligned}
J_1&=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\\
J_2&=-(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x)+\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\\
J_3&=\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-(\sigma_x\tau_{yz}^2+\sigma_y\tau_{zx}^2+\sigma_z\tau_{xy}^2)
\end{aligned}\right\}\tag{1-13}
$$

则上式可以写成

$$\sigma^3-J_1\sigma^2+J_2\sigma-J_3=0 \tag{1-14}$$

此方程式的三个根就是三个主应力，且都为实根。一般三个主应力用$\sigma_1$，$\sigma_2$，$\sigma_3$表示。求得的三个主应力值分别代入（1-11）式并与（1-12）式联解，就可以得到三个相互垂直的主方向，即主应力的方向余弦值。

只要一点的应力状态确定，三个主应力的值和方向就是一定的，它与过该点坐标变化无关。所以用$J_1$、$J_2$、$J_3$表示的各应力分量组合系数也不随坐标而变化。因此，常将$J_1$、$J_2$和$J$分别称为应力的第一不变量、第二和第三不变量。

若取三个主方向为三个参考坐标轴的方向，这时三个主平面上的三个主应力就可以完全确定一点的应力状态。

一般情况常设$\sigma_1=\sigma_x$，$\sigma_2=\sigma_y$，$\sigma_3=\sigma_z$。而各剪应力分量均为零时，根据公式（1-8）和（1-9）即可以确定主轴坐标系中任一斜面上的正应力和剪应力：

$$\sigma=\sigma_1l^2+\sigma_2m^2+\sigma_3n^2 \tag{1-8a}$$

$$\tau^2=S^2-\sigma^2=\sigma_1^2l^2+\sigma_2^2m^2+\sigma_3^2n^2-(\sigma_1l^2+\sigma_2m^2+\sigma_3n^2) \tag{1-9a}$$

这时三个应力不变量为

$$
\left.\begin{aligned}
J_1&=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\\
J_2&=-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)\\
J_3&=\sigma_1\sigma_2\sigma_3
\end{aligned}\right\}\tag{1-13a}
$$

因为主平面上没有剪应力，用主应力表示一点的应力状态就更为简明，而且可以用简单

的几何图形表示一点的应力状态。将主坐标系的应力分量代入式（1－6）中，可求得任意斜切面上的全应力的三个分量$S_1$、$S_2$、$S_3$：

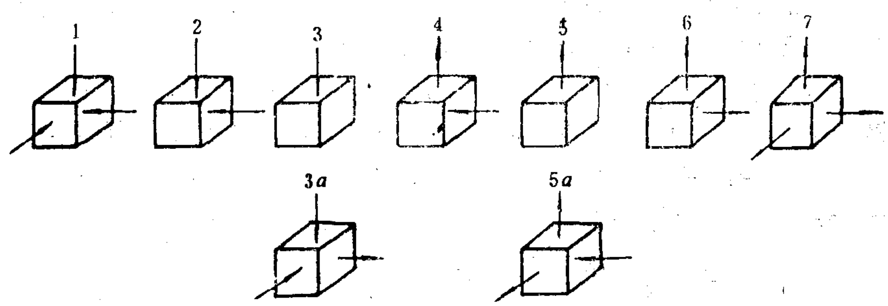
$$S_1=\sigma_1 l \quad S_2=\sigma_2 m \quad S_3=\sigma_3 n$$

将式中$l$、$m$、$n$求出，并代入到$l^2+m^2+n^2=1$式中去，得

$$\frac{S_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{S_2^2}{\sigma_2^2}+\frac{S_3^2}{\sigma_3^2}=1 \qquad (1-15)$$

对于给定的一点应力状态，$\sigma_1$、$\sigma_2$、$\sigma_3$是定值，因此上式表示的是一个关于主轴的应力椭球面。它表明了点应力状态任意斜切面全应力矢量端点的轨迹，三个主半轴长度分别等于该点三个主应力即$\sigma_1$、$\sigma_2$和$\sigma_3$的大小。其中三个主应力最大者和最小者就是点应力中的最大主应力和最小主应力。

表示一点的主应力大小和方向的应力状态图示称为主应力图示。主应力图共有九种：四个为三向主应力图，三个为平面主应力图，二个单向主应力图示，见图（1－6）。




图（1－6） 九种主应力图示

金属塑性加工中，最常见的是不等的三向压应力图示和两个压应力和一个拉应力的主应力图示，在轧制、锻造、挤压等工艺中，大多数是这种情况。生产实际中，很少遇到三向拉伸应力图示，仅在拉伸试验中，当产生缩颈时，在缩颈处的应力线可分解成三个方向，这便是三向拉伸的主应力图示。平面主应力图示只有板料成形工序中可以遇到。

如果三个主应力绝对值及符号相同，则应力椭球面变成了球面，故称之为球应力状态。理论上这种球应力状态不可能产生引起塑性变形的作用。在这种情况下只有弹性变形的产生。

## §1－6 主剪应力和最大剪应力

剪应力有极值的切面叫做主剪应力平面，该面上作用的剪应力叫做主剪应力。

通过变形体任一点可作许多微分面，这些微分面上作用着正应力和切应力。现利用公式$\tau^2=S^2-\sigma^2$来研究在微分平面何方向上的切应力有极值。

取主轴为坐标轴，任意斜面上的剪应力可由公式（1－8）和（1－9）求得：

$$\tau^2=\sigma_1^2 l^2+\sigma_2^2 m^2+\sigma_3^2 n^2-(\sigma_1 l^2+\sigma_2 m^2+\sigma_3 n^2)^2$$