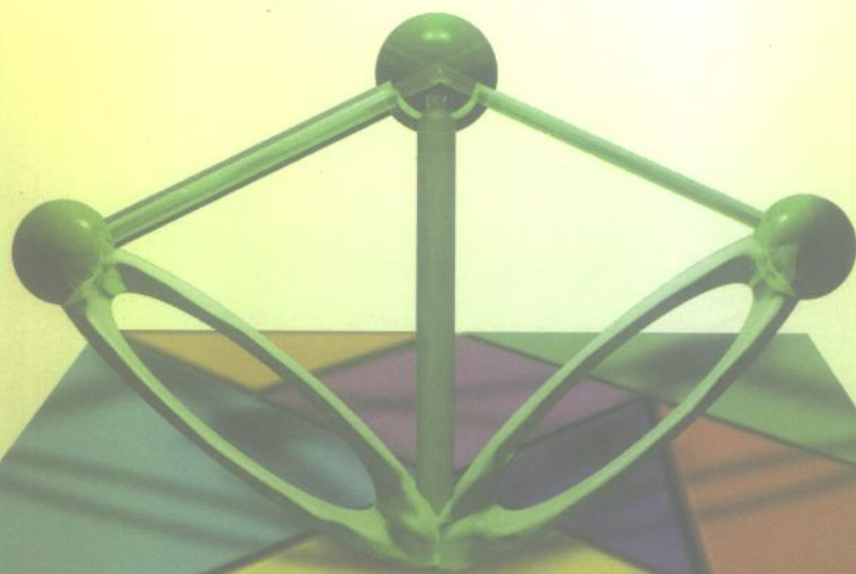


计算机科学组合学丛书

单目标、多目标与整数规划

卢开澄 编著



清华大学出版社 <http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书共 12 章,前 7 章讨论单目标线性规划;第 8 章讨论多目标线性规划;后面 4 章讨论与整数规划相关的问题。

书中对单目标线性规划、多目标线性规划和整数规划等问题的提出、各种解算方法及其灵敏度的分析进行了比较全面的介绍和深入的讨论,并有众多的例题,是本书的特点。

本书可作为数学与经济管理专业运筹学的教材,并可作为这一领域的工作人员的参考书。

版权所有,翻印必究。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

图书在版编目(CIP)数据

单目标、多目标与整数规划/卢开澄编著. —北京:清华大学出版社,1999
(计算机科学组合学丛书)

ISBN 7-302-03330-7

I. 单… II. 卢… III. 线性规划-教材 IV. 0221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 03091 号

出版者:清华大学出版社(北京清华大学校内,邮编 100084)

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

印刷者:北京昌平环球印刷厂

发行者:新华书店总店北京发行所

开 本:787×1092 1/16 印张:26.5 字数:627 千字

版 次:1999 年 7 月第 1 版 1999 年 7 月第 1 次印刷

书 号:ISBN 7-302-03330-7/TP·1793

印 数:0001~4000

定 价:29.80 元

前 言

众所周知,线性规划是由于解决二战期间美军的后勤运输问题而提出来的。半个世纪以来,它的应用范围日益扩大,几乎遍及商业活动、工业生产等一切经济领域,甚至于关系到许多军事行动。单纯形法始终扮演着光彩夺目的角色。线性规划也成为运筹学的主要内容受到普遍的重视,以至于许多高校的数学系、经济管理系以及系统工程等专业都把它列为一门必修课。

线性规划在它发展的历程中有几件事是值得特别提及的。一是受经济理论的影响,经济活动已不完全像“经济人”那样,追求的是“利润极大”、“代价极小”,代以决策时开始考虑“普遍感到满意”。多目标规划便应运而生。单目标规划仅是它的一个特例,它比单目标规划更灵活,应用的领域更广阔。开展它的研究,推广它的应用,在今天有着非常现实的意义。

另一个是 20 世纪 70 年代以来计算机科学蓬勃发展,计算复杂性理论新军突起,成果骄人。其中与线性规划有关而值得一提的有:(a) 单纯形法的时间复杂性被提出来;(b) 大量属于整数线性规划的著名问题被证明属于 NP 类中最困难的一类。算法复杂性理论中

$$P = NP?$$

是问题的关键。线性规划究竟是属于 P 类还是其他?有的权威猜测它属于 NP 困难类问题。70 年代末前苏联的数学家哈奇杨(Хачиян)发表了它的线性规划的椭球算法,并证明了椭球算法的多项式时间复杂性。这一消息在西方引起了轰动。如若线性规划属于 NP 困难类,现在找到多项式算法,似乎使

$$P = NP$$

这结论曙光在望。但椭球算法计算效果十分不理想,仅有理论价值。它只是证明了线性规划是 P 类问题。不久,贝尔实验室的印度人卡玛卡(Karmarkar)发表了它的线性规划问题投影算法,证明了它的复杂性也是多项式,而且优于椭球算法。卡玛卡(Karmarkar)算法的思想异于单纯形法,它企图在可行解域内部找一最快方向奔向极值点。这种想法十分新颖,引起广泛的兴趣,研究的结果也多起来。无论如何,它已打破了单纯形法一枝独秀的局面。

现实中有许多整数规划的问题,它的难度较相应的线性规划大得多。其中不少是 NP 理论中的著名问题。就是这样一类的困难问题,找近优的启发式算法也是十分吸引人的。

作者从事组合优化和算法的教学多年,本书也是这方面工作的总结。第 1 章,第 6 章,第 8 章及第 12 章是由卢华明执笔的。囿于作者的水平,存在错误和不妥将很难避免,敬请读者指正。

目 录

第 1 章 引论	1
1.1 引言	1
1.2 问题的提出	2
1.3 标准形式与矩阵表示法	6
1.4 几何解释	7
习题一	11
第 2 章 单纯形法	13
2.1 凸集.....	13
2.1.1 凸集概念	13
2.1.2 可行解域与极方向概念	14
2.2 凸多面体.....	15
2.3 松弛变量.....	17
2.3.1 松弛变量概念	17
2.3.2 松弛变量的几何意义	18
2.4 单纯形法的理论基础.....	19
2.4.1 极值点的特性	19
2.4.2 矩阵求逆	21
2.4.3 可行解域无界的情况	21
2.4.4 退化型举例	23
2.5 单纯形法基础.....	24
2.5.1 基本公式	24
2.5.2 退出基的确定与进入基的选择	26
2.5.3 例	27
2.6 单纯形法(续).....	29
2.6.1 基本定理	29
2.6.2 退化型概念	30
2.6.3 单纯形法步骤	31
2.6.4 举例	33
2.7 单纯形表格.....	38
习题二	48
第 3 章 改善的单纯形法	50
3.1 数学准备.....	50

3.1.1	改善之一: $C_B(B^{-1}a) = (C_B/B^{-1})a$	50
3.1.2	改善之二: 矩阵求逆	50
3.2	改善的单纯形法	52
3.2.1	改善单纯形法步骤	52
3.2.2	举例	53
3.3	改善的单纯形法表格及其分析	58
3.3.1	改善的单纯形法表格	58
3.3.2	改善单纯形法的复杂性分析	62
3.4	变量有上下界约束的问题	62
3.4.1	下界不为零的情况	62
3.4.2	有上界的情况	63
3.5	分解原理	68
3.5.1	问题的提出	68
3.5.2	分解算法	69
3.5.3	说明举例	71
3.6	无界域问题的分解算法	80
3.6.1	分解原理	80
3.6.2	说明举例	81
	习题三	86
第4章	单纯形法的若干补充与灵敏度分析	89
4.1	二阶段法	89
4.2	大M法	98
4.3	退化情形	103
4.3.1	退化形问题	103
4.3.2	出现循环举例	104
4.4	防止循环	106
4.4.1	退出基不唯一时的选择办法	106
4.4.2	首正向量概念	107
4.4.3	不出现循环的证明	108
4.5	灵敏度分析	109
4.5.1	C有变化	110
4.5.2	右端项改变	112
4.5.3	a_{ij} 改变	112
4.5.4	A的列向量改变	114
4.5.5	A的行向量改变	115
4.5.6	增加新变量	117
4.5.7	增加新约束条件	118
4.5.8	应用举例	120

4.5.9	参数规划	121
	习题四	123
第5章	对偶原理与对偶单纯形法	127
5.1	对偶问题	127
5.1.1	对偶问题定义	127
5.1.2	对偶问题的意义	128
5.1.3	互为对偶	129
5.1.4	$Ax=b$ 的情形	130
5.1.5	其他类型	131
5.2	对偶性质	132
5.2.1	弱对偶性质	132
5.2.2	强对偶定理	133
5.2.3	min 问题的对偶解法	134
5.3	影子价格	139
5.4	对偶单纯形法	140
5.4.1	基本公式	140
5.4.2	对偶单纯形法	142
5.4.3	举例	142
5.5	主偶单纯形法	146
5.5.1	问题的引入	146
5.5.2	主偶单纯形法之一	147
5.5.3	主偶单纯形法之二	148
	习题五	150
第6章	运输问题及其他	152
6.1	运输问题的数学模型	152
6.1.1	问题的提出	152
6.1.2	运输问题的特殊性	153
6.2	矩阵 A 的性质	154
6.3	运输问题的求解过程	155
6.3.1	求初始可行解的西北角法	155
6.3.2	最小元素法	157
6.3.3	图上作业法	158
6.4	$c_i - z_i$ 的计算, 进入基的确定	159
6.5	退出基的确定	160
6.6	举例	162
6.7	任务安排问题	168
6.7.1	任务安排与运输问题	168

6.7.2	求解举例	168
6.8	任务安排的匈牙利算法	171
6.8.1	代价矩阵	171
6.8.2	科涅格(König)定理	172
6.8.3	标志数法	173
6.8.4	匈牙利算法	176
6.8.5	匹配算法	179
6.9	任务安排的分支定界法	180
6.10	一般的任务安排问题	182
6.11	运输网络	185
6.11.1	网络流	185
6.11.2	割切	186
6.11.3	福德-福克逊(Ford-Fulkerson)定理	188
6.11.4	标号法	189
6.11.5	埃德蒙斯-卡普(Edmonds-Karp)修正算法	191
6.11.6	狄尼(Dinic)算法	192
	习题六	194
第7章	哈奇扬(Хачиян)算法与卡玛卡(Karmarkar)算法	196
7.1	克里(Klee)与明特(Minty)举例	196
7.2	哈奇扬算法	198
7.2.1	问题的转化	198
7.2.2	哈奇扬算法步骤	198
7.2.3*	算法的正确性证明的准备	202
7.2.4*	定理的证明	205
7.2.5*	严格不等式组	208
7.2.6*	复杂性分析	210
7.3	卡玛卡算法与卡玛卡典型问题	212
7.3.1	卡玛卡标准型	212
7.3.2	化为标准型的方法之一	212
7.3.3	化为标准型的方法之二	216
7.3.4	T_0 变换	218
7.3.5	卡玛卡算法步骤	219
7.3.6	卡玛卡算法的若干基本概念	226
7.3.7	T_k 变换的若干性质	228
7.3.8	势函数及卡玛卡算法复杂性	233
	习题七	239
第8章	多目标规划	241

8.1	问题的提出	241
8.2	多目标规划的几何解释	244
8.3	多目标规划的单纯形表格	249
8.4	多目标规划的目标序列化方法	253
8.5	多目标规划的灵敏度分析	258
8.6	应用举例	269
	习题八	272
第9章	整数规划问题的 DFS 搜索法与分支定界法	277
9.1	问题的提出	277
9.2	整数规划的几何意义	281
9.3	可用线性规划求解的整数规划问题	283
9.4	0-1 规划和 DFS 搜索法	284
9.4.1	穷举法	284
9.4.2	DFS 搜索法	285
9.5	整数规划的 DFS 搜索法	288
9.5.1	搜索策略	288
9.5.2	举例	291
9.6	替代约束	293
9.6.1	吉阿福里昂(Geoffrion)替代约束	293
9.6.2	举例	295
9.7	分支定界法介绍	301
9.7.1	对称型流动推销员问题	301
9.7.2	非对称型流动推销员问题	302
9.7.3	最佳匹配问题	305
9.8	整数规划问题的分支定界解法	306
9.9	分支定界法在解混合规划上的应用	311
9.10	估界方法	315
	习题九	321
第10章	整数规划的割平面法	323
10.1	割平面	323
10.1.1	郭莫莱(Gomory)割平面方程	323
10.1.2	例	324
10.2	割平面的选择	329
10.3	马丁(Martin)割平面法	331
10.4	全整数割平面法	336
10.4.1	全整数单纯形表格	336
10.4.2	举例	338

10.4.3	确定 λ 的策略	341
10.5	混合规划的割平面法	344
	习题十	346
第 11 章	奔德斯(Benders)分解算法与群的解法	348
11.1	混合规划的奔德斯分解算法	348
11.1.1	分解算法的原理	348
11.1.2	奔德斯分解算法	349
11.1.3	算法举例	350
11.2	群的解法	360
11.2.1	群的解法原理	360
11.2.2	举例	361
11.3	群的解法和最短路径问题	365
11.3.1	图的构造	365
11.3.2	求最短路径的戴克斯特拉(Dijkstra)算法	368
11.4	背包问题	369
11.5	将整数规划归约为背包问题	371
11.6	背包问题的网络解法	373
11.7	背包问题的分支定界解法	374
11.8	流动推销员问题的近似解法	380
11.8.1	最近插入法	380
11.8.2	最小增量法	381
11.8.3	回路改进法	385
	习题十一	387
第 12 章	动态规划算法	388
12.1	最短路径问题	388
12.1.1	穷举法	388
12.1.2	改进的算法	389
12.1.3	复杂性分析	390
12.2	最佳原理	391
12.2.1	最佳原理	391
12.2.2	最佳原理的应用举例	391
12.3	流动推销员问题	394
12.3.1	动态规划解法	394
12.3.2	复杂性分析	397
12.4	任意两点间的最短距离	399
12.4.1	距离矩阵算法	399
12.4.2	动态规划算法	399

12.5	同顺序流水作业的任务安排.....	401
12.6	整数规划的动态规划解法.....	403
12.6.1	多段判决公式.....	403
12.6.2	举例.....	404
12.7	背包问题的动态规划解法.....	408
	习题十二.....	412
	参考文献	413

(或极大)值的可行解。

例 1.1

$$\begin{aligned} \min z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad &2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ &x_1 + x_2 \leq 4 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

可行解域是由 4 条边界线包围起来的域, 4 条边界线为 $2x_1 + 3x_2 = 6, x_1 + x_2 = 4, x_1 = 0, x_2 = 0$ 。由它们包围起来的可行解域如图 1.1 中阴影线所示。箭头 \Rightarrow 标出可行解域在该边界线的一侧。例如其中 $2x_1 + 3x_2 \geq 6$ 如图 1.2 所示。

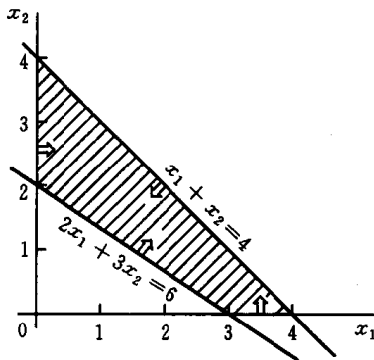


图 1.1

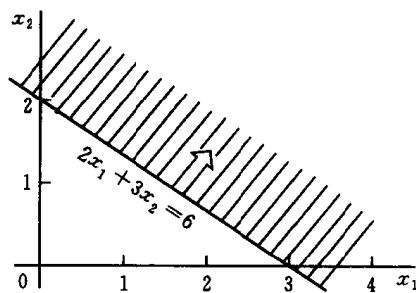


图 1.2

1.2 问题的提出

这一节将提出若干典型的线性规划实际问题, 目的在于说明如何对具体问题的控制变量找出其间存在的具有线性约束条件的数学模型来。

例 1.2 饲料问题

饲养场的饲料由各种食物混合而成, 要求各种营养素达到各自一定的限量。假定有 n 种食物 f_1, f_2, \dots, f_n 可供选择, m 种营养素 v_1, v_2, \dots, v_m , 要求每天所供给的量分别不少于 b_1, b_2, \dots, b_m 单位, 食物 f_i 的单位重量的价格为 c_i, f_i 含 v_j 的百分比为 $a_{ij}, j=1, 2, \dots, m, i=1, 2, \dots, n$ 。

假定每天每份饲料含食物 f_i 的重量为 $x_i, i=1, 2, \dots, n$, 则代价 $z=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$ 。要求在保证营养素 v_i 不少于 b_i 的条件下, $i=1, 2, \dots, m$, 使代价最小, 则问题导致

$$\begin{aligned} \min z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s. t.} \quad &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ &\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ &x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

如若考虑营养素 v_i 不得少于 b_i , 但不得超过 $\bar{b}_i, \bar{b}_i \geq b_i, i=1, 2, \dots, n$, 则问题导致

$$\begin{aligned} \min z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s. t. } \bar{b}_1 &\geq a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ \bar{b}_2 &\geq a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ &\dots \\ \bar{b}_m &\geq a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

如若进一步考虑饲料中食物 f_i 的含量不得超过 d_i 单位, $i=1, 2, \dots, n$, 则问题导致

$$\begin{aligned} \min z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s. t. } \bar{b}_1 &\geq a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ \bar{b}_2 &\geq a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ &\dots \\ \bar{b}_m &\geq a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq b_m \\ 0 &\leq x_1 \leq d_1, 0 \leq x_2 \leq d_2, \dots, 0 \leq x_n \leq d_n \end{aligned}$$

例 1.3 生产计划问题

某工厂生产两种产品 P_1 和 P_2 。产品 P_1 的单位售价 29 元, 产品 P_2 单位售价 23 元; 产品 P_1 每单位原材料费为 12 元, 而产品 P_2 每单位原材料费为 11 元; 产品 P_1 每单位需要机器 m_1 2 小时和机器 m_2 1 小时, 产品 P_2 每单位需要机器 m_1 和机器 m_2 各 1 小时。产品 P_1 每单位机器费用 13 元, 产品 P_2 每单位机器费用 10 元。该工厂机器 m_1 每天有 100 小时可供使用, 机器 m_2 每天有 80 小时可供使用。产品 P_1 销售量不受限制, 而产品 P_2 最多只能卖出 40 个单位。问该厂生产应如何安排使利润达到最大。

假定每日生产产品 P_1 为 x_1 单位, 生产产品 P_2 为 x_2 单位。产品 P_1 每单位的利润为 $29 - 12 - 13 = 4$ 元, 产品 P_2 每单位的利润为 $23 - 11 - 10 = 2$ 元。

总利润

$$z = 4x_1 + 2x_2$$

约束条件

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 100 \\ x_1 + x_2 &\leq 80 \\ x_1 &\geq 0, 0 \leq x_2 \leq 40 \end{aligned}$$

故生产计划问题导致下面的线性规划问题, 即安排生产使总利润达到最大。

$$\begin{aligned} \max z &= 4x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t. } 2x_1 + x_2 &\leq 100 \\ x_1 + x_2 &\leq 80 \\ 0 &\leq x_1, 0 \leq x_2 \leq 40 \end{aligned}$$

例 1.4 下料问题

现有钢筋长为 l , 由它截成长度为 l_i 的钢条 b_i 根, $i=1, 2, \dots, m$ 。假定现有 n 种切割方

案, 每种方案用一列向量表示它, 即

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

其中 a_{ij} 为第 j 种方案截取长度为 l_i 的钢条数, 即

$$a_{1j}l_1 + a_{2j}l_2 + \dots + a_{mj}l_m \leq l$$

假定用第 j 种方案截断的钢筋数为 x_j , $j=1, 2, \dots, n$ 。于是问题导致

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + x_2 + \dots + x_n \\ \text{s. t.} \quad &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq l_1 \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \geq l_2 \\ &\dots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \geq l_m \\ &x_i \geq 0 \text{ 且均为整数, } i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

例 1.5 运输问题

设某产品有 m 个产地 A_1, A_2, \dots, A_m ; n 个销地 B_1, B_2, \dots, B_n 。每单位产品从产地 A_i 运往销地 B_j 的运费为 c_{ij} ($i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$), 如图 1.3 所示。已知产地 A_i 的产量为 a_i , $i=1, 2, \dots, m$, 销地 B_j 的需求量为 b_j , $j=1, 2, \dots, n$ 。试问应如何安排运输, 使保证

供给且运费最省。已知 $\sum_{i=1}^m a_i \geq \sum_{j=1}^n b_j$ 。

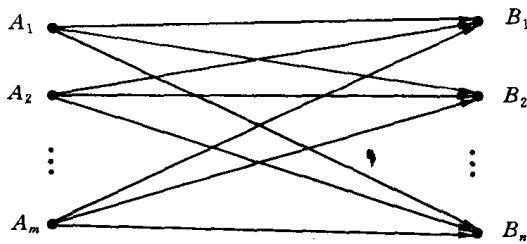


图 1.3

设由 A_i 运往 B_j 的产品为 x_{ij} 单位, 则此问题变成

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s. t.} \quad &\sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ &\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ &x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

例 1.6 投资问题

假定某单位拟在以后 4 年内对某项目依次投资 300 万, 500 万, 900 万, 600 万元, 为了筹措这笔资金, 该单位打算出售长期债券。长期债券的市场年利率四年中依次为 7.5%, 6%, 7.5%, 6.5%, 可连续付 10 年利息后还本。与此同时, 有短期存款年利率分别为 6.5%, 6.5%, 5.5%。问最佳投资策略是什么? 即每年出售多少长期债券和用多少作为短期存款, 使最后付出最小?

设第 i 年开始时卖出的长期债券为 x_i 百万元, $i=1, 2, 3, 4$ 。收到长期债券后立即用于投资, 余下的款作为短期存款以备下一年投资用。又设第 j 年存入的短期存款为 y_j 百万元, $j=1, 2, 3$ 。因此

第 1 年售出长期债券 x_1 万元, y_1 万元用于短期存款, 故有

$$x_1 - y_1 = 3;$$

第 2 年开始时短期存款还本付息数量为 $1.065y_1$, 第 2 年开始时长期债券卖出 x_2, y_2 用于短期存款。故有

$$1.065y_1 + x_2 - y_2 = 5;$$

第 3 年有

$$1.065y_2 + x_3 - y_3 = 9;$$

第 4 年有

$$1.055y_3 + x_4 = 6。$$

应该如何安排使得 10 年里付的总利息最少。问题导致

$$\min z = 10(0.075x_1) + 10(0.06x_2) + 10(0.075x_3) + 10(0.065x_4)$$

$$\text{s. t. } x_1 - y_1 = 3$$

$$1.065y_1 + x_2 - y_2 = 5$$

$$1.065y_2 + x_3 - y_3 = 9$$

$$1.055y_3 + x_4 = 6$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4; y_j \geq 0, j = 1, 2, 3$$

例 1.7 用工安排问题

某邮局从星期一到星期日, 每天需要工作人员数见下表:

星期	一	二	三	四	五	六	日
需要工作人员数	17	13	15	19	14	16	11

邮局规定每位工作人员连续工作 5 天, 休息 2 天。试问该邮局应如何雇用工作人员使所雇总人数最少?

设 x_i 为从星期 i 开始工作的人数, $i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ 。其中 x_7 为星期日雇用工作人员数, 于是依题意有

$$\begin{aligned}
\min z &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
\text{s. t.} \quad & x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 17 \\
& x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 13 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geq 15 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geq 19 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 14 \\
& x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 16 \\
& x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 11 \\
& x_i \geq 0 \text{ 整数, } i = 1, 2, \dots, 7
\end{aligned}$$

将许多实际问题转化为线性规划问题,本身就是一门学问。它的案例丰富多彩,不一而足,这里只是抛砖引玉,介绍几个典型例子,详细讨论超出本书范围。

1.3 标准形式与矩阵表示法

后面讨论的线性规划问题基本上可以归结为两种形式

$$\begin{aligned}
(A) \quad \min z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1, 2, \dots, m \\
& x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \\
(B) \quad \max z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m \\
& x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

其他形式可以转换为这两种形式之一。以后我们将主要讨论形式(B),而形式(A)则可以通过在目标函数中两边同乘-1转化成(B)。至于可能出现的约束 $x_j \geq d > 0$,则可通过 $x'_j = x_j - d \geq 0$ 变换来实现标准化。

为了方便起见,引进矩阵符号

$$\begin{aligned}
C &= (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n), \\
x &= (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T \\
b &= (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m)^T, \\
A &= (a_{ij})_{m \times n}
\end{aligned}$$

于是标准问题可写为

$$\left. \begin{aligned}
\max z &= Cx \\
\text{s. t.} \quad Ax &\leq b \\
x &\geq 0
\end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

通常还可以将 A 写成 $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$, 其中

$$a_i = (a_{1i} \ a_{2i} \ \cdots \ a_{mi})^T, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

即 a_i 为矩阵 A 的第 i 列列向量, 所以标准问题也可表示为

$$\begin{aligned} \max z &= Cx = \sum_{i=1}^n c_i x_i \\ \text{s. t.} \quad &\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq b \\ &x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1.3)$$

读者务必要熟悉这些表示法。

1.4 几何解释

这一节介绍一种求解线性规划问题的几何方法, 尽管它仅适用于维数很低的小问题, 但其中却包含了这类问题的基本原理和它直观的几何意义。

还是先举例说明。

例 1.8 求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max z &= x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad &2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ &3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ &x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

满足 $2x_1 + 3x_2 \leq 6$ 的域如图 1.4 中影线所示, \Rightarrow 表示域在直线 $2x_1 + 3x_2 = 6$ 的一侧。同样理由, $3x_1 + 2x_2 \leq 6$ 所示域如图 1.5 中影线部分。

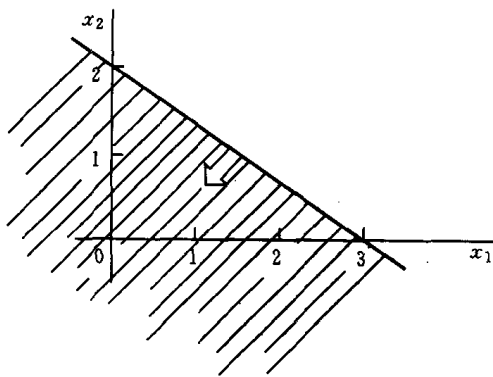


图 1.4

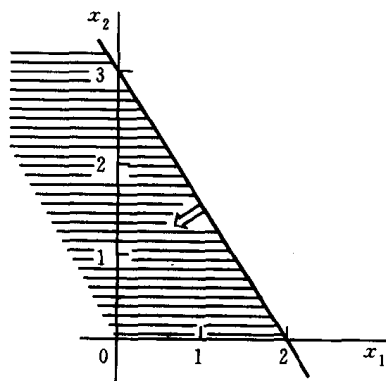


图 1.5

所以例 1.8 的可行解域如图 1.6 所示。

目标函数 $x_1 + x_2 = c$ 在 ox_1x_2 平面上是一直线, \Rightarrow 表示使目标函数值增大的方向, 见图 1.7。不难直观得出目标函数在可行域的顶点 $(\frac{6}{5}, \frac{6}{5})$ 处取得极大值 $\max z = \frac{6}{5} + \frac{6}{5} = \frac{12}{5}$ 。