计算机科学组合学丛书

单目标、多目标与整数规划

卢开澄　编著

清华大学出版社　http://www.tup.tsinghua.edu.cn

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书共 12 章，前 7 章讨论单目标线性规划；第 8 章讨论多目标线性规划；后面 4 章讨论与整数规划相关的问题。

书中对单目标线性规划、多目标线性规划和整数规划等问题的提出、各种解算方法及其灵敏度的分析进行了比较全面的介绍和深入的讨论，并有众多的例题，是本书的特点。

本书可作为数学与经济管理专业运筹学的教材，并可作为这一领域的工作人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

单目标、多目标与整数规划/卢开澄编著. —北京：清华大学出版社，1999
(计算机科学组合学丛书)
ISBN 7-302-03330-7

Ⅰ.单… Ⅱ.卢… Ⅲ.线性规划-教材 Ⅳ.0221.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 03091 号

出版者：清华大学出版社(北京清华大学校内，邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
印刷者：北京昌平环球印刷厂
发行者：新华书店总店北京发行所
开　本：787×1092 1/16　印张：26.5　字数：627 千字
版　次：1999 年 7 月第 1 版　1999 年 7 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-03330-7/TP・1793
印　数：0001～4000
定　价：29.80 元

前　言

众所周知，线性规划是由于解决二战期间美军的后勤运输问题而提出来的。半个世纪以来，它的应用范围日益扩大，几乎遍及商业活动、工业生产等一切经济领域，甚至于关系到许多军事行动。单纯形法始终扮演着光彩夺目的角色。线性规划也成为运筹学的主要内容受到普遍的重视，以至于许多高校的数学系、经济管理系以及系统工程等专业都把它列为一门必修课。

线性规划在它发展的历程中有几件事是值得特别提及的。一是受经济理论的影响，经济活动已不完全像“经济人”那样，追求的是“利润极大”、“代价极小”，代以决策时开始考虑“普遍感到满意”。多目标规划便应运而生。单目标规划仅是它的一个特例，它比单目标规划更灵活，应用的领域更广阔。开展它的研究，推广它的应用，在今天有着非常现实的意义。

另一个是 20 世纪 70 年代以来计算机科学蓬勃发展，计算复杂性理论新军突起，成果骄人。其中与线性规划有关而值得一提的有：(a) 单纯形法的时间复杂性被提出来；(b) 大量属于整数线性规划的著名问题被证明属于 NP 类中最困难的一类。算法复杂性理论中

$$P = NP?$$

是问题的关键。线性规划究竟是属于 P 类还是其他？有的权威猜测它属于 NP 困难类问题。70 年代末前苏联的数学家哈奇杨(Хачиян)发表了他的线性规划的椭球算法，并证明了椭球算法的多项式时间复杂性。这一消息在西方引起了轰动。如若线性规划属于 NP 困难类，现在找到多项式算法，似乎使

$$P = NP$$

这结论曙光在望。但椭球算法计算效果十分不理想，仅有理论价值。它只是证明了线性规划是 P 类问题。不久，贝尔实验室的印度人卡玛卡(Karmarkar)发表了他的线性规划问题投影算法，证明了它的复杂性也是多项式，而且优于椭球算法。卡玛卡(Karmarkar)算法的思想异于单纯形法，它企图在可行解域内部找一最快方向奔向极值点。这种想法十分新颖，引起广泛的兴趣，研究的结果也多起来。无论如何，它已打破了单纯形法一枝独秀的局面。

现实中有许多整数规划的问题，它的难度较相应的线性规划大得多。其中不少是 NP 理论中的著名问题。就是这样一类的困难问题，找近优的启发式算法也是十分吸引人的。

作者从事组合优化和算法的教学多年，本书也是这方面工作的总结。第 1 章，第 6 章，第 8 章及第 12 章是由卢华明执笔的。囿于作者的水平，存在错误和不妥将很难避免，敬请读者指正。

目　　录

第1章 引　论

1.1 引　言

自从丹捷(George B. Dantzig)于1947年公开发表他的单纯形法以来(实际上他提出单纯形法远在第二次世界大战期间),有许多作者在线性规划这个领域作出了贡献,这里包括理论研究、算法以及它的应用。至今单纯形法依然在线性规划领域中占据了重要的位置,其原因在于许多复杂的经济问题大都能在合理的时间里获得解决。尽管近年来提出了若干理论分析方面占有便宜的算法,但单纯形法依然光彩耀人。正是由于这个原因,本书将着重讨论它,后面还将对其中若干有希望的算法做简单介绍。

所谓线性规划问题指的是在一组线性不等式约束下求线性目标函数的极大或极小值问题。例如:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\
& \cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \\
& x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

这里s.t.是subject to的缩写,即"满足于"的意思。其中,线性函数 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 称为目标函数;$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 称为判决变量。第 i 个约束条件可以写成:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i,\ i = 1,2,\cdots,m$$

由系数 a_{ij} 构成的矩阵称为约束矩阵,即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$$

由右端 b_i 构成的向量

$$\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为右端项。

一组满足(1.1)约束条件的变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的值称为一组可行解,可行解的集合称为可行解域,或可行解空间。线性规划问题也就是在可行解域上寻找使目标函数取得极小

(或极大)值的可行解。

例 1.1

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6 \\
& x_1 + x_2 \leqslant 4 \\
& x_1, x_2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

可行解域是由 4 条边界线包围起来的域,4 条边界线为 $2x_1+3x_2=6$,$x_1+x_2=4$,$x_1=0$,$x_2=0$。由它们包围起来的可行解域如图 1.1 中阴影线所示。箭头⇒标出可行解域在该边界线的一侧。例如其中 $2x_1+3x_2\geqslant 6$ 如图 1.2 所示。

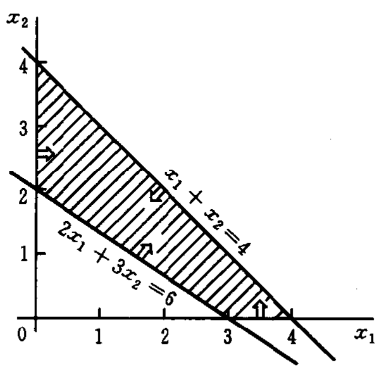

图 1.1

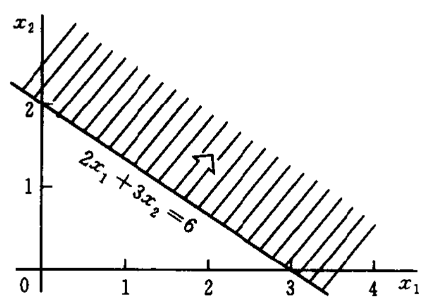

图 1.2

1.2 问题的提出

这一节将提出若干典型的线性规划实际问题,目的在于说明如何对具体问题的控制变量找出其间存在的具有线性约束条件的数学模型来。

例 1.2 饲料问题

饲养场的饲料由各种食物混合而成,要求各种营养素达到各自一定的限量。假定有 n 种食物 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 可供选择,m 种营养素 $v_1,v_2,\cdots,v_m$,要求每天所供给的量分别不少于 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 单位,食物 f_i 的单位重量的价格为 c_i,f_i 含 v_j 的百分比为 a_{ji},$j=1,2,\cdots,m$,$i=1,2,\cdots,n$。

假定每天每份饲料含食物 f_i 的重量为 x_i,$i=1,2,\cdots,n$,则代价 $z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$。要求在保证营养素 v_i 不少于 b_i 的条件下,$i=1,2,\cdots,m$,使代价最小,则问题导致

$$\begin{aligned}
\min \quad & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant b_2 \\
& \cdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant b_m \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0
\end{aligned}$$

如若考虑营养素 v_i 不得少于 b_i，但不得超过$\overline{b_i}$，$\overline{b_i}\geqslant b_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则问题导致

$$\begin{aligned}\min\ z=&c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\ \text{s.t.}\ \overline{b_1}\geqslant& a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\geqslant b_1\\ \overline{b_2}\geqslant& a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\geqslant b_2\\ &\cdots\\ \overline{b_m}\geqslant& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\geqslant b_m\\ &x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0\end{aligned}$$

如若进一步考虑饲料中食物 f_i 的含量不得超过 d_i 单位，$i=1,2,\cdots,n$，则问题导致

$$\begin{aligned}\min\ z=&c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\ \text{s.t.}\ \overline{b_1}\geqslant& a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\geqslant b_1\\ \overline{b_2}\geqslant& a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\geqslant b_2\\ &\cdots\\ \overline{b_m}\geqslant& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\geqslant b_m\\ &0\leqslant x_1\leqslant d_1,0\leqslant x_2\leqslant d_2,\cdots,0\leqslant x_n\leqslant d_n\end{aligned}$$

例 1.3 生产计划问题

某工厂生产两种产品 P_1 和 P_2。产品 P_1 的单位售价 29 元，产品 P_2 单位售价 23 元；产品 P_1 每单位原材料费为 12 元，而产品 P_2 每单位原材料费为 11 元；产品 P_1 每单位需要机器 $m_1$2 小时和机器 $m_2$1 小时，产品 P_2 每单位需要机器 m_1 和机器 m_2 各 1 小时。产品 P_1 每单位机器费用 13 元，产品 P_2 每单位机器费用 10 元。该工厂机器 m_1 每天有 100 小时可供使用，机器 m_2 每天有 80 小时可供使用。产品 P_1 销售量不受限制，而产品 P_2 最多只能卖出 40 个单位。问该厂生产应如何安排使利润达到最大。

假定每日生产产品 P_1 为 x_1 单位，生产产品 P_2 为 x_2 单位。产品 P_1 每单位的利润为 29－12－13＝4 元，产品 P_2 每单位的利润为 23－11－10＝2 元。

总利润

$$z=4x_1+2x_2$$

约束条件

$$\begin{aligned}2x_1+x_2&\leqslant 100\\ x_1+x_2&\leqslant 80\\ x_1\geqslant 0,\ 0\leqslant x_2&\leqslant 40\end{aligned}$$

故生产计划问题导致下面的线性规划问题，即安排生产使总利润达到最大。

$$\begin{aligned}\max\ z=&4x_1+2x_2\\ \text{s.t.}\ &2x_1+x_2\leqslant 100\\ &x_1+x_2\leqslant 80\\ &0\leqslant x_1,\ 0\leqslant x_2\leqslant 40\end{aligned}$$

例 1.4 下料问题

现有钢筋长为 l，由它截成长度为 l_i 的钢条 b_i 根，$i=1,2,\cdots,m$。假定现有 n 种切割方

案，每种方案用一列向量表示它，即

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

其中 a_{ij}为第 j 种方案截取长度为 l_i 的钢条数，即

$$a_{1j}l_1 + a_{2j}l_2 + \cdots + a_{mj}l_m \leqslant l$$

假定用第 j 种方案截断的钢筋数为 x_j，$j=1,2,\cdots,n$。于是问题导致

$$\begin{aligned} \min z = \ & x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \text{s.t.} \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant l_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant l_2 \\ & \cdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant l_m \\ & x_i \geqslant 0 \text{ 且均为整数}, i = 1,2,\cdots,n \end{aligned}$$

例 1.5 运输问题

设某产品有 m 个产地 $A_1,A_2,\cdots,A_m$；n 个销地 $B_1,B_2,\cdots,B_n$。每单位产品从产地 A_i 运往销地 B_j 的运费为 $c_{ij}(i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$，如图 1.3 所示。已知产地 A_i 的产量为 a_i，$i=1,2,\cdots,m$，销地 B_j 的需求量为 b_j，$j=1,2,\cdots,n$。试问应如何安排运输，使保证供给且运费最省。已知 $\sum_{i=1}^{m}a_i \geqslant \sum_{j=1}^{n}b_i$。

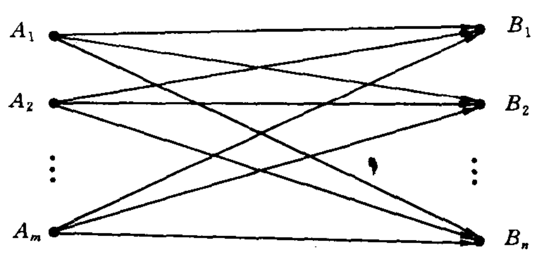

图 1.3

设由 A_i 运往 B_j 的产品为 x_{ij}单位，则此问题变成

$$\begin{aligned} \min z = \ & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j \quad j = 1,2,\cdots,n \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \quad i = 1,2,\cdots,m \\ & x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n \end{aligned}$$

例 1.6 投资问题

假定某单位拟在以后 4 年内对某项目依次投资 300 万，500 万，900 万，600 万元，为了筹措这笔资金，该单位打算出售长期债券。长期债券的市场年利率四年中依次为 7.5%，6%，7.5%，6.5%，可连续付 10 年利息后还本。与此同时，有短期存款年利率分别为 6.5%，6.5%，5.5%。问最佳投资策略是什么？即每年出售多少长期债券和用多少作为短期存款，使最后付出最小？

设第 i 年开始时卖出的长期债券为 x_i 百万元，$i=1,2,3,4$。收到长期债券后立即用于投资，余下的款作为短期存款以备下一年投资用。又设第 j 年存入的短期存款为 y_j 百万元，$j=1,2,3$。因此

第 1 年售出长期债券 x_1 万元，y_1 万元用于短期存款，故有

$$x_1 - y_1 = 3;$$

第 2 年开始时短期存款还本付息数量为 $1.065y_1$，第 2 年开始时长期债券卖出 x_2，y_2 用于短期存款。故有

$$1.065y_1 + x_2 - y_2 = 5;$$

第 3 年有

$$1.065y_2 + x_3 - y_3 = 9;$$

第 4 年有

$$1.055y_3 + x_4 = 6。$$

应该如何安排使得 10 年里付的总利息最少。问题导致

$$\min z = 10(0.075x_1) + 10(0.06x_2) + 10(0.075x_3) + 10(0.065x_4)$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & x_1 - y_1 = 3 \\
& 1.065y_1 + x_2 - y_2 = 5 \\
& 1.065y_2 + x_3 - y_3 = 9 \\
& 1.055y_3 + x_4 = 6 \\
& x_i \geqslant 0,\ i = 1,2,3,4;\ y_j \geqslant 0,\ j = 1,2,3
\end{aligned}$$

例 1.7 用工安排问题

某邮局从星期一到星期日，每天需要工作人员数见下表：

星期	一	二	三	四	五	六	日
需要工作人员数	17	13	15	19	14	16	11

邮局规定每位工作人员连续工作 5 天，休息 2 天。试问该邮局应如何雇用工作人员使所雇总人数最少？

设 x_i 为从星期 i 开始工作的人数，$i=1,2,3,4,5,6,7$。其中 x_7 为星期日雇用工作人员数，于是依题意有

$$
\begin{aligned}
\min\ z = {} & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 17 \\
& x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 13 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \geqslant 15 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \geqslant 19 \\
& x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geqslant 14 \\
& x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geqslant 16 \\
& x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geqslant 11 \\
& x_i \geqslant 0\ \text{整数},\ i = 1,2,\cdots,7
\end{aligned}
$$

将许多实际问题转化为线性规划问题,本身就是一门学问。它的案例丰富多彩,不一而足,这里只是抛砖引玉,介绍以上几个典型例子,详细讨论超出本书范围。

1.3 标准形式与矩阵表示法

后面讨论的线性规划问题基本上可以归结为两种形式

$$
(A)\quad \begin{aligned}
\min\ z = {} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i, i = 1,2,\cdots,m \\
& x_j \geqslant 0,\ j = 1,2,\cdots,n
\end{aligned}
$$

$$
(B)\quad \begin{aligned}
\max\ z = {} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, i = 1,2,\cdots,m \\
& x_j \geqslant 0,\ j = 1,2,\cdots,n
\end{aligned}
$$

其他形式可以转换为这两种形式之一。以后我们将主要讨论形式(B),而形式(A)则可以通过在目标函数中两边同乘-1转化成(B)。至于可能出现的约束$x_j \geqslant d > 0$,则可通过$x_j' = x_j - d \geqslant 0$变换来实现标准化。

为了方便起见,引进矩阵符号

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C} &= (c_1\ c_2 \cdots c_n), \\
\boldsymbol{x} &= (x_1\ x_2 \cdots x_n)^{\mathrm{T}} \\
\boldsymbol{b} &= (b_1\ b_2 \cdots b_m)^{\mathrm{T}}, \\
\boldsymbol{A} &= (a_{ij})_{m \times n}
\end{aligned}
$$

于是标准问题可写为

$$
\left.\begin{aligned}
\max\ z &= \boldsymbol{Cx} \\
\text{s.t.}\quad \boldsymbol{Ax} &\leqslant \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{x} &\geqslant \boldsymbol{0}
\end{aligned}\right\} \tag{1.2}
$$

通常还可以将$\boldsymbol{A}$写成$(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_n)$,其中

$$\boldsymbol{a}_i = (a_{1i}\, a_{2i} \cdots a_{mi})^{\mathrm{T}},\ i = 1,2,\cdots,n$$

即 $\boldsymbol{a}_i$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列列向量，所以标准问题也可表示为

$$\begin{aligned} \max\ z = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\ \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_i x_i \leqslant \boldsymbol{b} \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{1.3}$$

读者务必要熟悉这些表示法。

1.4 几何解释

这一节介绍一种求解线性规划问题的几何方法，尽管它仅适用于维数很低的小问题，但其中却包含了这类问题的基本原理和它直观的几何意义。

还是先举例说明。

例 1.8 求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \max\ z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

满足 $2x_1+3x_2\leqslant 6$ 的域如图 1.4 中影线所示，⇒表示域在直线 $2x_1+3x_2=6$ 的一侧。同样理由，$3x_1+2x_2\leqslant 6$ 所示域如图 1.5 中影线部分。

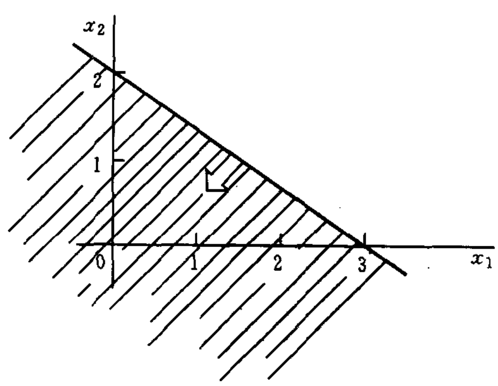

图 1.4

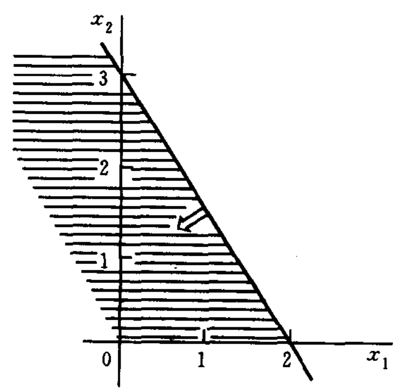

图 1.5

所以例 1.8 的可行解域如图 1.6 所示。

目标函数 $x_1+x_2=c$ 在 ox_1x_2 平面上是一直线，⇒表示使目标函数值增大的方向，见图 1.7。不难直观得出目标函数在可行域的顶点 $\left(\frac{6}{5},\frac{6}{5}\right)$ 处取得极大值 $\max z=\frac{6}{5}+\frac{6}{5}=\frac{12}{5}$。