现代数学译丛

力学和物理学中的变分不等方程

【法】G. 迪沃 J. L. 利翁斯 著

科学出版社

内 容 简 介

本书通过力学和物理学中大量的所谓单侧问题，得出各种类型的变分不等方程，并用直接方法建立解的存在性、唯一性．本书对所用的力学、物理学和泛函分析工具均作了相当完备的介绍．书中列举了大量尚未解决的问题．

读者对象为大学有关专业的学生、研究生、教师以及科学技术工作者．

G. Duvaut, J. L. Lions

LES INÉQUATIONS EN MÉCANIQUE ET EN PHYSIQUE

Dunod, 1972

现 代 数 学 译 丛

力学和物理学中的变分不等方程

〔法〕G. 迪沃 J. L. 利翁斯 著

王耀东 译

责任编辑 吕 虹 张鸿林

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987 年 4 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1987 年 4 月第一次印刷 印张：13 5/8

印数：0001—4,750 字数：348,000

统一书号：13031・3478

本社书号：4555・13—1

定价：3.85 元

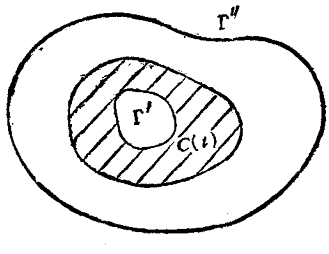
中 译 本 序

自本书于 1972 年问世以来，出现了变分不等方程(简写为 I.V.) 的许多新的应用和推广.这里，我们对这些内容做一个简短的介绍.

1. 首先，C. Baiocchi 注意到，对于(例如)土质水坝的渗流这一流体动力学中的经典自由边界问题，若变换未知函数，在一些情形下，问题归结为一个变分不等方程. 这样就从理论的观点和数值的观点上解决了问题(有关的叙述，可参考 C. Baiocchi 和 A. Cappello [1]).

我们这里给出在自由边界问题中 C. Baiocchi 变换未知函数这一想法的另一应用实例 (G. Duvaut[1]). 考虑一相 Stefan 问题，设有一 $\mathbb{R}^3$ 中由器壁 Γ' 和 Γ'' 所包围的容器，其中盛有冰水混合物，器壁 Γ'' 的温度保持在 0 ℃，而器壁 Γ' 被加热，具有温度

$$g(x,t) \geqslant 0 \tag{1.1}$$



在时刻 $t > 0$，混合物由占据区域 $C(t)$ (图中影线部分)的水和占据区域 $\Omega\backslash C(t)$ 的冰组成，水和冰的界面记作 $S(t)$，曲面 $S(t)$ 是自由界面.

引进记号

$C =$ 在 $\Omega \times]0, T[$ 中被水占据的区域(从而 C 与平面 $t =$

s 的交是 $C(s)$);

$S=$ 在 $\Omega\times]0,T[$ 中的水冰界面(从而 S 与平面 $t=s$ 的交是 $S(s)$);

$\theta(x,t)=$ 水在点 $x\in C(t)$ 时刻 t 的温度。

我们有

(1.2) $$\theta(x,t)>0$$

采用适当的单位则有

(1.3) $$\frac{\partial\theta}{\partial t}-\Delta\theta=0,\quad \text{在 } C \text{ 中}$$

其它的条件是

(1.4) $$\theta=g,\quad \text{在 } \Gamma'\times]0,T[\text{ 上}$$

(1.5) $\theta(x,0)=\theta_0(x)$, $\theta_0(x)$ 是在由水在时刻 $t=0$ 占据的已知区域 $C(0)$ 上给定的函数.

还有在自由界面上的 Stefan 条件

(1.6) $$\theta=0,\quad \text{在 } S \text{ 上 } \frac{\partial\theta}{\partial\nu}=-LV\cdot\nu$$

其中

$\nu=S(t)$ (在 $\mathbb{R}^3$ 中)的法向量;

$V=S(t)$ 的速度;

$L>0$, $L=$ 融解潜热.

现在我们变换问题如下,引入

$\tilde{\theta}=\theta$ 在 C 外取 0 值的到 $\Omega\times]0,T[$ 的延拓;

$\chi=C$ 在 $\Omega\times]0,T[$ 内的特征函数.

利用条件 (1.6) 可以验证(详见 J. L. Lions[1] 第二章第 7 节)

(1.7) $$\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial t}-\Delta\tilde{\theta}=-L\frac{\partial\chi}{\partial t},\text{在 } \Omega\times]0,T[\text{ 中}$$

于是自然对 t 积分 (1.7). 若引进

(1.8) $$u(x,t)=\int_0^t\tilde{\theta}(x,s)ds$$

显然有

(1.9) $$u \geqslant 0, \text{ 在 } \Omega \times]0,T[\text{ 内}$$

由 (1.7) 推出

(1.10) $$\tilde{\theta}(x,t) - \tilde{\theta}_0(t) - \Delta u = -L\chi(x,t) + L\chi(x,0)$$

设 χ_0 是 $C(0)$ 的特征函数,并令

(1.11) $$g_0 = \tilde{\theta}_0 + L\chi_0 - L$$

则 (1.10) 变为

(1.12) $$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - g_0 = L(1-\chi)$$

但是

$\chi = \tilde{\theta} > 0$ 的点集的特征函数

$= u > 0$ 的点集的特征函数(因 $C(t)$ 随 t 增加)于是

(1.13) $$(1-\chi)u = 0$$

从而可把(1.9),(1.12),(1.13)概括为

(1.14) $$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - g_0 \geqslant 0,\ u \geqslant 0 \\ \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u - g_0\right] u = 0, \text{ 在} \Omega \times]0,T[\text{ 内} \end{gathered}$$

此外

(1.15) $u(x,0) = 0$, 在 Ω 内

(1.16) $$u(x,t) = \begin{cases} 0, \text{ 在 } \Gamma'' \times]0,T[\text{ 上} \\ \int_0^t g(x,\sigma)d\sigma\ (\geqslant 0), \text{ 在 } \Gamma' \times]0,T[\text{ 上} \end{cases}$$

问题 (1.14), (1.15), (1.16) 是"障碍问题"的一类典型的发展变分不等方程问题

2. 障碍问题

设椭圆算子 A 给定为

(2.1) $$A = -\frac{1}{2}\Delta - g\cdot\nabla$$

其中 $g = \{g_i\}$, $g_i \in C^1(\bar{\Omega})$, $g\cdot\nabla = g_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}$

考虑问题

(2.2) $Au - f \leqslant 0,\ u \leqslant 0,\ (Au - f)u = 0$, 在 Ω 内

(2.3) $u = 0$, 在 Γ 上

这一问题解的随机解释是最佳逗留时间. 为此考虑 (Ito) 随机微分方程

(2.4) $$dy = g(y)ds + dw(s)$$

其中 $w(s)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的规范 Wiener 过程,初始条件是

(2.5) $$y(0) = x,\ x \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$$

设 $y_x(s)$ 是 (2.4),(2.5) 的解, τ_x 是从 Ω 离开的时间, 考虑逗留时间 θ

(2.6) $$0 \leqslant \theta \leqslant \tau_x$$

对于在 $L^2(\Omega)$ 中给定的函数 f, 设

(2.7) $$J_x(\theta) = E\left[\int_0^\theta f(y_x(s))\,ds\right]$$

其中 E 是数学期望,令

(2.8) $$u(x) = \inf_\theta J_x(\theta)$$

可以证明 (见 A. Benssoussan 和 J. L. Lions [1]) u 可由 (2.2), (2.3) 刻画其特征.

可把这些考虑推广到更一般的二阶椭圆算子和发展算子, 其中包括我们得到的 Stefan 问题解的一个随机解释.

3. 脉冲控制和拟变分不等方程(简写为 I. Q. V)

这里我们不打算回顾冲量控制的动机, 这些内容可参考 A. Bensoussan 和 J. L. Lions [2]和该书中的文献, 这里仅给出脉冲控制中基本的 I. Q. V. 形式.

设 A 是在 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上定义的二阶椭圆算子,求函数 u, 满足

(3.1) $Au - f \leqslant 0$, 在 Ω 内

(3.2) $u - M(u) \leqslant 0$, 在 Ω 内

(3.3) $(Au - f)(u - M(u)) = 0$, 在 Ω 内

边界条件是

(3.4) $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} \leqslant 0,\ u - M(u) \leqslant 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A}(u - M(u)) = 0$, 在 $\partial\Omega$

上

在这些关系中，$M(u)$ 如下给定

$$M(u)(x)=k+\inf_{\xi} u(x+\xi) \tag{3.5}$$

其中 $\xi=\{\xi_i\}$ 满足 $\xi_i\geqslant 0, x+\xi\in\Omega$，且 $k>0$. 在 (3.4) 中，$\frac{\partial}{\partial v_A}$ 表示对应于 A 的余法向导数，而法向 v 指向 Ω 的外部.

若 $M(u)$ 已知，令

$$M(u)=\psi \tag{3.6}$$

我们重新回到障碍问题(带 Neumann 型的边界条件). 但在上述问题中，$M(u)$ 未知。采用通常的记号，问题的变分提法是

$$a(u,v-u)\geqslant(f,v-u),\ \forall v\leqslant M(u),\ u\leqslant M(u) \tag{3.7}$$

一般，若 V 是 $\mathbf{R}$ 上的 Hilbert 空间，$a(u,v)$ 是 V 上的连续且强制的双线性型，$v\to K(v)$ 是 $V\to V$ 的非空闭凸子集的一个(适当的)映射，则称下列问题为拟变分不等方程：求 u，使得

$$\begin{cases}u\in K(u)\\ a(u,v-u)\geqslant(f,v-u),\ \forall v\in K(u)\end{cases} \tag{3.8}$$

若 $K(v)=K$ 不依赖于 v，则重新得到通常的 I. V. 自然，为使问题 (3.8) 有(唯一)解，映射 $v\to K(v)$ 必须满足一定的条件，这问题的一般的陈述在 A. Bensoussan 和 J. L. Lions [2]中给出.

4. I. Q. V. 的概念及有关结果已被用来解决各种力学问题.

首先，C. Baiocchia 通过未知函数的变换来解非矩形水坝(渗流)问题.

尔后，(捷克斯洛伐克的) J. Necas 及其布拉格的小组应用 I. Q. V 解磨擦问题.

另外，K. A. Malla 和 N. Nassif 应用 I. Q. V 解决了晶体管问题.

5. 本书没有涉及大部分自由边界的正则性问题. 对于这些内容，请参考 D. Kinderlehrer 和 G. Stampacchia 的书[1]和该书中

的文献。

6. 另外，自本书出版之后，出现了许多有关 I. V. 的数值分析的著述。前面已提到了 Pavia 数值分析实验室的工作。我们还要指出 R. Glowinski, J. L. Lions 和 R. Trémolieres 的书[1]以及在 INRIA（国立信息与自动化研究所）中由 R. Glowinski, Bégis, Bourgat, Bristeau, Marrocco 及其他研究人员所做的工作。还要指出 Brouner 和 Nicolaenko 的由"线性分式补偿"所得到的结果，这些结果曾由作者之一（J. L. Lions）于 1981 年 5 月在复旦大学讲授的课程中予以介绍。

在结束中译本导言时，我谨以 G. Duvaut 和我本人的名义向译者致谢。

1981 年 5 月，上海，复旦大学

J. L. Lions

参 考 文 献

C. Baiochi, A. Cappello

[1] Disequazioni variazinali et quasivariazinali-applicazioni a problemi di frontiera libera, Vol. 1, 2, Pitagora, Bologna, 1978.

A. Bensoussan, J. L. Lions

[1] Inéquations variationnelles et controle optimal stochastique Paris, Dunod, 1978.

[2] Inéquations quasi variationnelles et controle impnesionel, Paris, Dunod, 1982.

G. Duvaut

[1] Résolution d'un probleme de Stefan, *C. R. A. S. Paris,* **276** (1973), pp. 1461—1463.

R. Glowinski, J. L. Lions, R. Trémoliers

[1] Approximation numérique des néquations variationnelles, Vol. 1, 2, Paris, Dunod, 1976.

D. Kinderlehrer, G. Stampacchia

[1] An introduction to variationa inequalities and their applications, Aca, Press, 1980.

J. L. Lions

[1] Sur quelques quastions d'analyse de mécanique et de contrôle optimal, Press de L'université de Montrial, 1976.

序　　言

1. 首先，我们给出一个出现在初等物理中的偏微分不等方程的例子.

考虑在点 x 于时刻 t 压强为 $u(x,t)$ 的充满 $\mathbf{R}^3$ 的一个区域 Ω 的流体，Ω 被厚度可以忽略的一个薄膜 Γ 限制住，该薄膜是半渗透的，即允许流体自由地通过它而进入 Ω，但禁止流体流出.

可以验证(细节见第一章 2.2.1)

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g \quad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right),\quad \Omega \text{ 内 } t > 0$$

g 是给定函数，u 满足不等式形式的边条件[1]

$$(2)\quad \begin{aligned} u(x,t) > 0 &\Rightarrow \partial u(x,t)/\partial n = 0,\ x \in \Gamma \\ u(x,t) = 0 &\Rightarrow \partial u(x,t)/\partial n \geqslant 0,\ x \in \Gamma \end{aligned}$$

还满足初条件

$$(3)\quad u(x,0) = u_0(x)$$

注意条件 (2) 是**非线性的**；由 (2) 推出在每一固定时刻 t，Γ 上有两个区域 Γ_0^t 和 Γ_1^t，其上分别有 $u(x,t) = 0$ 和 $\partial u(x,t)/\partial n = 0$. 这些区域不是预先给定的；因而这涉及到一个“自由边界”型的问题.

(1), (2) 可表成(等价的)不等方程形式. 为此引入“检验函数” v 的集合 K

(4)　$K = \{v \mid v \text{ 是定义在 } \Omega \text{ 内的函数}^{2)},\ \text{在 } \Gamma \text{ 上 } v \geqslant 0\}$ 则(1), (2)等价于

---

1) $\partial/\partial n$ 表示 Γ 上指向 Ω 外部的法线方向导数.

2) 应在 Sobolev 空间 $H^1(\Omega)$ 中取 v，在第一章将明确这一点.

$$
(5)\quad \left|\begin{array}{l} u(\cdot,t)\in K,\ \forall t\geqslant 0 \\ \displaystyle\int_\Omega\left[\frac{\partial u}{\partial t}(v-u)+\operatorname{grad}_x u\operatorname{grad}_x(v-u)-g(v-u)\right]dx\geqslant \\ \qquad 0,\ \forall v\in K \end{array}\right.
$$

求(5)的满足初条件(3)的解的问题称为(抛物型)发展不等方程.

2. 前述例子有一个一般特征：人们在这样情况下遇到称为不等方程的问题，其中约束、状态方程、物理规律等在达到或越过某些临界值时发生变化.

本著作的目的在于研究力学和物理学中出现这种情况的各种例子.

3. 上节指出的问题是一个尚未详尽研究过的范围广阔的课题,本书仅限于讨论最简单的古典定律. 我们将讨论下列课题：

1) 应用到热学和流体动力学的扩散的半渗透壁问题；

2) 控制问题,特别是热学中的；

3) 带摩擦的和单侧的(线性)弹性问题；

4) 平板弯曲问题；

5) 弹-粘-塑性、完全弹性、塑性、刚-粘-塑性、刚性-完全塑性和闭锁材料；

6) Bingham 流体的流动；

7) 和 Maxwell 算子相联系的不等方程问题.

4. 为避免叙述上述问题时发生混淆，有必要一开始就以简明而又严格的方式建立所处状况的力学和物理学的基础，每章都以这种内容开头. 下面介绍一下各章内容.

5. 上面第一段给出了第一章所涉及的问题的一个例子；其余的问题关系到温度调节.

第二章研究导致带初条件(3)的形为

$$
(6)\quad \left|\begin{array}{l} \partial u/\partial t(\cdot,t)\in K \\ \displaystyle\int_\Omega\left[\frac{\partial u}{\partial t}\left(v-\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\operatorname{grad}_x u\cdot\operatorname{grad}_x\left(v-\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right. \end{array}\right.
$$

$$- g\left(v - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big] dx \geqslant 0, \ \forall v \in K$$

(和 (5) 比较)的不等方程的控制问题.

第三章给出相当完整的经典线性弹性理论(特别给出了 Korn 不等式的证明,它是该理论的不可缺少的数学基础), 然后转到导出不等方程的摩擦问题;我们采用 Coulomb 定律并列举其若干变形.

第四章研究与薄板力学相联系的摩擦问题.

第五章研究弹-粘-塑性现象, 以不同方式取极限, 即导出弹性-完全塑性、刚-粘-塑性和刚性-完全塑性等情形,所有这些问题都可表达为不等方程的形式. 本章还研究 Hencky 定律和闭锁材料.

第六章研究一类非 Newton 流体, 即 Bingham 流体的流动. 因而导出发展不等方程,其中包括经典的 Navier-Stokes 方程组作为特殊情形.

第七章研究和 Maxwell 算子相联系的不等方程问题. 我们首先研究导电介质,其中电场和电流强度的关系是经典的 Ohm 定律,即电阻是常量(称这样的介质是"稳定的"). 然后研究在电场作用下电离的活跃介质. 在那种情况下, 电阻突然变为无穷: 当蓄电池或天线击穿时即发生这种现象.

同时涉及各章所述的两种情况的"混合"问题在 Duvaut-Lions 的文章[7],[8]中研究过.

6. 在整个著作中我们将使用尽可能直接的方法,一般地把不等方程(绝对必需的工具, 对发展问题尤其如此)做为非线性方程的极限(同时一般说来有力学或物理意义).

另外, 为便于阅读, 我们使各章尽可能相互独立(自然这样就难免重复).

7. 关于力学中的稳定不等方程已经有了许多更早的工作. 与向量空间上二次泛函的极小化相联系来研究稳定弹性问题是经典的方法(见 P. Germain [1], G. Mandel [1], E. Tonti [1] 和这

些著作中的文献）. 在不是向量空间的凸集上的类似泛函的极小化问题出现在完全塑性中（那里应力张量保持在一个有界闭凸集中)(见 W. I. Koiter [1], G. Mandel [2], W. Prager[1]及这些著作中的文献),尔后在 Signorini 问题的单侧弹性中,该问题先在 G. Fichera[1],后在 J. L. Lions-G. Stampacchia [1] 中被解决.

由 J. Moreau [3] 研究的气泡现象和带约束的最小曲面的研究 (J. C. Nitsche [1]) 同样能导致变分不等方程的问题.

抛物型情形下的发展不等方程在 Lions-Stampacchia [1] 中引进，双曲型情形在 Lions [4] 中引进，并特别为 H. Brézis[1)] 研究过(又见 Lions[1] 和此书的文献). 力学和物理学中发展不等方程的应用在本书中似乎第一次加以研究，自然这些应用又引出许多新问题,其中有一些尚未解决;特别要指出:

●解的正则性问题 (Brézis-Stampacchia [1] Brézis [2] 的方法在本书的许多场合不能沿用).

●与依赖 t 的凸集或泛函相联系的发展不等方程问题(特别,在动力弹-粘-塑性理论中要遇到).

8. 导致稳定或发展不等方程的物理学的其它问题. 例如，热弹-粘-塑性和由不等方程制约的系统的最优控制也归结到不等方程的课题. 还要指出,流体力学中, C. Baiocchi[1] 用不等方程方法解决了一个自由边界问题.

我们没有涉及跟本书有关的两个课题:

i) 和不等方程有关的奇异摄动理论(奇异层理论);可参考 J. L. Lions [5],[6];

ii) 发展不等方程解的数值逼近法,这是 R. Glowinski, J. L. Lions 和 R. Tremoliéres [1] 的主题. 关于这一课题参考 D Bégis [1], J. F. Bourgat [1], H. Brézis 和 M. Sibony [1], J Céa 和 R. Glowinski[1], J. Céa, R. Glowinski 和 J. Nédelec[1], R. Commincioli [1],[2],[3], B. Courjaret[1], M. Frémond[1],

---

1) 在该文章中特别有非线性半群理论的应用,本书不用这一理论.

A. Fusciardi, U. Mosco, F. Scarpini 和 A. Schiaffino [1], M. Goursat[1], Y. Haugazeau[1], P. G. Hodge[1], A. Marrocco[1], M. Sibony [1], D. Viaud [1].

9. 作者诚挚地感谢 Alais 先生和 A. Lichnérowicz 先生，同前者的讨论是富有成果的，后者愿意把本书收入他编纂的丛书。作者还感谢 Dunod 出版者的精美印刷.

G. Duvaut, J. L. Lions

1971 年 3 月

目　　录

第一章　半渗透介质和温度控制问题 ······ 1

1. 连续介质力学的回顾 ······ 1
   1.1 应力张量 ······ 1
   1.2 守恒定律 ······ 2
   1.3 应变张量 ······ 8
   1.4 特性定律 ······ 11
2. 半渗透壁和温度控制问题 ······ 11
   2.1 方程的建立 ······ 11
   2.2 半渗透壁 ······ 14
   2.3 温度控制 ······ 18
3. 温度控制和半渗透壁问题的变分提法 ······ 24
   3.1 记号 ······ 24
   3.2 变分不等方程 ······ 27
   3.3 例.和第 2 节中问题的等价性 ······ 27
   3.4 若干补充 ······ 35
   3.5 稳定情形 ······ 35
4. 若干泛函分析工具 ······ 38
   4.1 Sobolev 空间 ······ 38
   4.2 应用：凸集 K ······ 44
   4.3 向量值函数空间 ······ 45
5. 第 3 节中发展变分不等方程的求解 ······ 47
   5.1 问题的最终提法 ······ 47
   5.2 主要结果的陈述 ······ 49
   5.3 条件的验证 ······ 50
   5.4 其它逼近方式 ······ 52
   5.5 定理 5.1 (和 5.2) 中唯一性的证明 ······ 53
   5.6 定理 5.1 和 5.2 的证明 ······ 53

6. 解的正性和可比较性 …… 61
6.1 解的正性 …… 61
6.2 解的比较 (I) …… 63
6.3 解的比较 (II) …… 65
7. 稳定问题 …… 66
7.1 严格强制情形 …… 66
7.2 用 $t\to\infty$ 时发展方程的解逼近稳定状态 …… 69
7.3 非严格强制情形 …… 71
8. 评述 …… 79
第二章 热量控制问题 …… 81
1. 热量控制 …… 81
1.1 瞬时控制 …… 81
1.2 延迟控制 …… 83
2. 控制问题的变分提法 …… 84
2.1 记号 …… 84
2.2 变分不等方程 …… 84
2.3 例 …… 85
2.4 指南 …… 89
3. 瞬时控制问题的求解 …… 89
3.1 主要结果的陈述 …… 89
3.2 定理 3.1 (和 3.2) 中唯一性的证明 …… 91
3.3 定理 3.1 和 3.2 的证明 …… 92
4. 薄壁瞬时控制问题解的一个性质 …… 101
5. 关于延迟控制的特殊结果 …… 103
5.1 一个结果的陈述 …… 103
5.2 定理 5.1 中存在性的证明 …… 104
5.3 定理 5.1 中唯一性的证明 …… 108
6. 评述 …… 109
第三章 弹性和粘弹性中的古典问题和摩擦问题 …… 110
1. 引言 …… 110
2. 古典线性弹性 …… 110

2.1 特性定律 …… 110
2.2 线性弹性的古典问题 …… 112
2.3 发展问题的变分提法 …… 115
3. 静态问题 …… 117
3.1 古典提法 …… 117
3.2 变分提法 …… 117
3.3 Korn 不等式及其推论 …… 119
3.4 结果 …… 127
3.5 对偶提法 …… 128
4. 动态问题 …… 133
4.1 主要结果的陈述 …… 133
4.2 定理 4.1 的证明 …… 136
4.3 其它边条件 …… 140
5. 带摩擦或单侧约束的线性弹性 …… 144
5.1 摩擦的首批定律. 动态情形 …… 144
5.2 Coulomb 定律, 静态情形 …… 148
5.3 对偶变分提法 …… 155
5.4 其它边条件和尚未解决的问题 …… 159
5.5 动态情形 …… 166
6. 线性粘-弹性. 短记忆材料 …… 176
6.1 特性定律和推广 …… 176
6.2 动态情形. 问题的提法 …… 178
6.3 动态情形的存在性和唯一性定理 …… 179
6.4 拟静态问题. 变分提法 …… 182
6.5 Γ_U 有正测度情形的存在性和唯一性定理 …… 183
6.6 $\Gamma_U = \emptyset$ 情形的研究 …… 187
6.7 无摩擦问题中拟静态的验证 …… 192
6.8 作为带粘性情形极限的无粘性情形 …… 196
6.9 粘性问题解释为抛物型组 …… 199
7. 线性粘-弹性. 长记忆材料 …… 200
7.1 特性定律和推广 …… 200
7.2 带摩擦的动态问题 …… 201

7.3 动态情形的存在性和唯一性定理 …… 202
7.4 拟静态情形 …… 207
7.5 在无摩擦情形 Laplace 变换的运用 …… 212
7.6 作为带记忆情形极限的弹性情形 …… 214
8. 评述 …… 215
第四章 平板理论中的单侧现象 …… 216
1. 引言 …… 216
2. 板的一般理论 …… 216
2.1 定义和记号 …… 216
2.2 力的分析 …… 217
2.3 线性化理论 …… 220
3. 待考虑的问题 …… 228
3.1 古典问题 …… 228
3.2 单侧问题 …… 229
4. 稳定单侧问题 …… 230
4.1 记号 …… 230
4.2 (稳定)问题 …… 231
4.3 问题 4.1 的求解. 解存在的必要条件 …… 234
4.4 问题 4.1 的求解. 充分条件 …… 236
4.5 问题 4.1 和 4.3 中的唯一性问题 …… 238
4.6 问题 4.1′ 的求解 …… 239
4.7 问题 4.2 的求解 …… 240
5. 发展单侧问题 …… 243
5.1 问题的提出 …… 243
5.2 发展单侧问题的求解 …… 245
6. 评述 …… 247
第五章 塑性引论 …… 249
1. 引言 …… 249
2. 弹性完全塑性 (Prandtl-Reuss 定律) 和弹-粘-塑性情形 …… 249
2.1 Prandtl-Reuss 特性定律 …… 249
2.2 弹-粘-塑性特性定律 …… 254