高等学校教材

工程数学

线性代数

朱金寿　主编
陈晓江　杨爱芳　副主编

科学出版社

高等学校教材

工程数学

线性代数

朱金寿 主编

陈晓红 杨爱荟 副主编

科学出版社

1998

内 容 简 介

本书是根据1995年原国家教委批准的高等工业学校《线性代数课程教学基本要求》编写的.

本书内容包括:行列式、矩阵、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换.每章最后一节是综合应用与提高部分,可作为教师上习题课的参考内容,也可供要求较高的学生或备考研究生的读者选学.书末附有练习和习题答案.

本书可作为高等工业院校本、专科各专业教材或教学参考书,也可以作为电大、函大、夜大和成人教育的教学用书,还可供工程技术人员自学和作为备考研究生的综合复习资料.

线 性 代 数

朱金寿 主编

陈晓江 杨爱芳 副主编

责任编辑 王 军

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717

中国科学院武汉分院科技印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1998年8月第 一 版 开本:850×1168 1/32
1998年8月第一次印刷 印张:7 1/2
印数:1~10 000 字数:194 000

ISBN 7-03-006902-1/O · 1037

定价: 7.80元

前　言

根据1995年原国家教委批准的高等工业学校《线性代数课程教学基本要求》的精神，我们积数十年教学工作和辅导研究生考试的经验，在授课讲义基础上改编了这本既可以作为教材，又可以作为备考研究生复习资料的线性代数.

本书分成两大部分：基础部分和提高部分(带"*"号的章节).

基础部分包括线性代数课程教学的基本内容和基本计算方法. 为了便于读者自学，容易入门，我们力求语言精练、准确，通俗易懂，采用理论与实例相结合，由浅入深、从具体到抽象的写法. 为了使读者对基本概念的理解和掌握透彻，每节配备了适量的例题和练习，并力求例题、习题新颖、典型，具有代表性和实用性，还配备了很多线性代数的应用实例，着重培养读者解题的基本思想和基本方法. 书末附有练习和习题的参考答案. 讲授这部分内容约需32个学时.

提高部分主要是对前面所学内容的综合应用和总结提高，其例题大多来源于历年全国各院校研究生入学考试试题和一些重点工科院校线性代数考试试题，可供教师上习题课选用和要求较高的读者课外阅读. 读者也可略去不看，不影响后面内容的学习. 但我们希望读者能全看或选看，这样，有利于提高读者分析问题和解决问题的能力，有助于读者了解研究生入学考试线性代数试题形式和范围.

参加本书编写的有：陈晓江(第一、二章)、朱金寿(第三、五章)、杨爱芳(第四、六章)，全书由朱金寿负责统编.

本书由武汉大学数学系叶明训教授主审，参加审稿的还有武汉汽车工业大学张小柔教授，吴传生教授，王卫华副教授，他们都认真审阅了全部书稿，并提出了不少宝贵的意见，在此特向他们表

示衷心感谢！

科学出版社对本书的编审、出版给予了热情支持和帮助，在此一并致谢.

由于编者水平有限，本书难免有不妥之处，恳请读者批评指正.

编　者

1998年6月

目　录

第一章　行列式

行列式是一个重要的数学工具，不仅在数学的各个领域中，而且在其他各学科中都会经常用到它，在线性代数中它更是一个不可缺少的计算工具．在这一章里我们主要讨论以下三个问题：

(1) 行列式的定义和性质；

(2) 行列式的计算方法；

(3) 利用行列式求解线性方程组．

§1.1　行列式的定义

中学代数中介绍过二阶、三阶行列式，并且利用它们来求解二元、三元线性方程组．为了求解 n 元线性方程组，需要把行列式的概念推广到 n 阶．为此，我们先介绍一些预备知识，然后引出 n 阶行列式的定义．

一、全排列及其逆序数

我们知道，n 个不同元素全部取出的一个排列称为 n 个不同元素的一个全排列．全排列的个数

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=n!$$

当 n 个元素为自然数 $1\sim n$ 时，对于两个自然数，如果大的排在小的前面，就称这两个自然数间有一个**逆序**．一个排列中所有逆序的总和称为这个排列的**逆序数**．

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**．

下面介绍求逆序数的方法．设

$$p_1\,p_2\cdots\,p_n$$

为 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，考虑元素 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比 p_i 大且排在 p_i 前面的元素有 τ_i 个，就称 p_i 的逆序数为 τ_i. 全体元素的逆序数的总和

$$\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n$$

即是这个排列的逆序数，记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$，简记为 τ.

例 1 求排列 34152 的逆序数.

解 在排列 34152 中，3 排在首位，逆序数为 0；4 的前面没有比 4 大的，逆序数为 0；1 的前面比 1 大的数有两个：3，4，故逆序数为 2；5 是最大数，逆序数为 0；2 的前面比 2 大的数有三个：3，4，5，故逆序数为 3.

于是所给排列的逆序数

$$\tau=0+0+2+0+3=5$$

排列 34152 是一奇排列. 如果把其中任意两个元素互换一下位置，而其他元素不动，不难算出所得到的排列是一偶排列. 这种作新排列的方法称为一个**对换**.

例如，将奇排列 34152 的前两个元素作一个对换，得到一个新排列 43152，排列 43152 的逆序数为 6，即为偶排列. 一般地，有：

定理 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

(证明留给读者).

二、n 阶行列式的定义

我们先研究一下二阶和三阶行列式的结构，找出它们的共同规律，然后根据这些共同规律给出 n 阶行列式的定义. 大家知道

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-2}$$

以三阶行列式为例，研究它的结构，容易看出：

(1) (1-2)右边每一项都恰是三个元素的乘积，而且这三个元素位于行列式的不同的行、不同的列，因此(1-2)右边的任意项除正负号外可以写成 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 这里第一个下标（称为**行标**）是按自然顺序 123 排列的，而第二个下标（称为**列标**）排成 $p_1p_2p_3$，它是 1,2,3 的某个排列.

(2) (1-2)中每项带有符号，不是正号就是负号，各项的正负号与其列标的排列有关：

带正号的三项列标排列是：123，231，312，它们都是偶排列；

带负号的三项列标排列是：132，213，321，它们都是奇排列.

因此各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^\tau$，其中 τ 为列标排列的逆序数.

(3) 因为 1,2,3 的不同排列共有 $3!=6$ 个，所以(1-2)右边是 6 项的代数和.

总之，三阶行列式可表示为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^\tau a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

其中 τ 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数，$\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

以上这些规律对二阶行列式显然也是成立的. 现在，我们根据这些规律定义 n 阶行列式如下：

设有 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，把它们排成 n 行 n 列的表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

(1) 作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积，这些乘积可以写成下面的一般形式：

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

(2) 每个乘积前所带的符号由排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数 τ 决定,当 τ 为偶数时带正号,当 τ 为奇数时带负号,于是一般项可表示为:

$$(-1)^\tau a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

(3) 因为 n 个数的所有排列共有 $n!$ 个,所以这样的项共有 $n!$ 个.

所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum(-1)^\tau a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为 **n 阶行列式**,记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^\tau a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \quad (1\text{-}3)$$

其中,$\sum$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数的所有排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 求和,τ 表示排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数. 数 a_{ij} 称为第 i 行第 j 列上的**元**或**元素**.

当 $n=1$ 时,规定 $|a|=a$,注意此时不要与绝对值记号相混淆.

在上面行列式的定义中,每个乘积的行标是按自然顺序排列的,实际上我们可以交换乘积中元素的顺序,使每个乘积的列标按自然顺序排列,从而有类似定义:

$$D=\sum(-1)^\tau a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn} \quad (1\text{-}4)$$

下面根据定义计算两类最简单也是最重要的行列式.

例 2 证明**对角行列式**(其中未写出的元素均为 0)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

证 第一式是显然的，下面证明第二式. 记 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$，则由行列式的定义，有

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\tau} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\tau}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

其中 τ 为排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数

$$\tau = 0+1+2+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

故第二式成立. 证毕

为方便起见，一般称 n 阶行列式从左上角到右下角的对角线为**主对角线**，从右上角到左下角的对角线为**次对角线**. 如果对角线以下(上)的元素均为零，则行列式称为**上(下)三角行列式**，它的值与对角行列式相同.

例 3 证明上三角行列式

$$D \doteq \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证 由行列式定义，一般项为

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

在行列式中，第 n 行元素除 a_{nn} 外均为零，故只能取 $p_n=n$. 再考察第 $n-1$ 行，p_{n-1} 不能再取 n，因此这时 p_{n-1} 只能取 $n-1$，即 $p_{n-1}=n-1$. 依次可知 $p_{n-2}=n-2$，$\cdots$，$p_2=2$，$p_1=1$. 不难看出，在定义

中除去

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这一项外,其余的项均为零．而这一项的列标排列 1 2 … n 是偶排列,故这一项带正号,于是

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证毕

练 习 1.1

1. 计算下列各排列的逆序数：

(1) 4312　　(2) 21453

2. 写出 4 阶行列式中含有 $a_{11}a_{23}$的项.

3. 决定 6 阶行列式中下列各项的符号：

(1) $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{65}$　　(2) $a_{51}a_{32}a_{43}a_{14}a_{65}a_{26}$

4. 利用公式(1-1)或(1-2),计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$　　(3) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

5. 利用行列式定义,求

$$f(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda-a_{33} \end{vmatrix}$$

中 λ^3,λ^2 的系数.

§1.2　行列式的性质

为了简化行列式的计算,需要对行列式作进一步的讨论,研究行列式的性质．记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称行列式 D' 为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1 行列式与其转置行列式相等.

证 记

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 由行列式定义(1-4)式，及 $b_{ij}=a_{ji}$，有

$$D'=\sum(-1)^{\tau}b_{p_1 1}b_{p_2 2}\cdots b_{p_n n}=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

所以 $D=D'$. 证毕

性质 1 表明，在行列式中行与列的地位是相同的. 因此，凡是有关行的性质，对列也同样成立. 反之亦然.

性质 2 用数 k 乘行列式的某一行(列)，等于用数 k 乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 由行列式定义，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots ka_{ip_i}\cdots a_{np_n}$$

$$= k\sum(-1)^{\tau}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证毕

推论 1 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

以 r_i 表示行列式的第 i 行,以 c_i 表示第 i 列. 用数 k 乘第 i 行(或列),记为 $r_i\times k$(或 $c_i\times k$);从第 i 行(或列)提出公因子 k,记为 $r_i\div k$(或 $c_i\div k$).

推论 2 行列式中有一行(列)元素全为零,则此行列式等于零.

性质 3 若行列式的某一行(列)的元素皆为两数之和,则此行列式等于两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 3 可推广到某一行(列)为多个数之和的情形,即有

推论 若行列式的某一行(列)的元素皆为 m 个数的和,则此行列式等于 m 个行列式的和.

性质 4 互换行列式的两行(列),行列式变号.

互换 i,j 两行,记为 $r_i \leftrightarrow r_j$;互换 i,j 两列,记为 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 如果行列式中有两行(列)完全相同,则此行列式为零.

性质 5 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式为零.

性质 6 用数 k 乘行列式的某一行(列)的所有元素加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上,记为 $r_i + kr_j$;以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上,记为 $c_i + kc_j$.

以上各性质及其推论的证明留给读者.利用这些性质可以简化行列式的计算.

例 1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4+2r_1]{r_3+r_1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$