研究生教材

数理方程HILBERT空间方法

（上）

广义函数和СОБОЛЕВ空间

李开泰　马逸尘

西安交通大学出版社

研 究 生 教 材

数理方程HILBERT空间方法

（上）

广义函数和СОБОЛЕВ空间

李开泰　　马逸尘

西 安 交 通 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书是数理方程Hilbert空间方法的上册，其内容为广义函数和Соболев空间两部分。

广义函数包括三类广义函数的定义、性质、结构和相互关系；广义函数的卷积和Fourier变换等。Соболев空间主要讨论整数阶Соболев空间、实数阶Соболев空间、迹空间，以及在电磁场、连续介质力学中很有用的向量值Соболев空间。

本书内容丰富，结构紧凑。可作为高等院校计算数学、应用数学、计算物理以及计算力学等专业研究生教材，也可作为有关专业的高年级大学生、研究生、大学教师和科技工作者教学和科研参考书。

数理方程 HILBERT 空间方法

（上）

广义函数和СОБОЛЕВ空间

李开泰　马逸尘

*

西安交通大学出版社出版

（西安市咸宁路28号）

西安交通大学出版社轻版印刷厂印装

陕西省新华书店经售

*

开本850×1168　1/32　印张8.375　字数205千字

1990年10月第1版　1990年10月第1次印刷

印数：1—2,000

ISBN7-5606-0418-3/O·72　　定价：3.50元

《研究生教材》总序

研究生教育是我国高等教育的最高层次，是为国家培养高层次的人才。他们必须在本门学科中掌握坚实的基础理论和系统的专门知识，以及从事科学研究工作或担负专门技术工作的能力。这些要求具体体现在研究生的学位课程和学位论文中。

认真建设好研究生学位课程是研究生培养中的重要环节。为此，我们组织出版这套《研究生教材》，以满足当前研究生教学，主要是公共课和一批新型的学位课程的教学需要。教材作者都是多年从事研究生教学工作，有着丰富教学和科学研究经验的教师。

这套教材首先着眼于研究生未来工作和高技术发展的需要，充分反映国内外的最新学术动态，使研究生学习之后，能迅速接近当代科技发展的前沿，以适应"四化"建设的要求；其次，也注意到研究生公共课程和学位课程应有它最稳定、最基本的内容，是研究生掌握坚实的基础理论和系统的专门知识所必要的。因此，在研究生教材中仍应强调突出重点，突出基本原理和基本内容，以保持学位课程的相对稳定性和系统性，内容有足够的深度，而且对本门课程有较大的覆盖面。

这套《研究生教材》虽然从选题、大纲、组织编写到编辑出版，都经过了认真的调查论证和细致的定稿工作，但毕竟是第一次编辑这样高层次的教材系列，水平和经验都感不足，缺点与错误在所难免。希望通过反复的教学实践，广泛听取校内外专家学者和使用者的意见，使其不断改进和完善。

西安交通大学研究生院
西安交通大学出版社
1989年12月

前　言

数学物理方程理论是数学科学中最为活跃的分支之一，它不但是很大一部分数学内容的基础，而且也是很大一部分物理内容的基础，它有助于人们对物质运动规律的认识．自然科学基本规律的精确数学表达式大都是微分方程，如 Newton 运动方程，Euler 方程，Navier–Stokes 方程，Maxwell 方程，Boltzmann 方程以及 Schrödinger 方程等．这些基本方程及其派生出来的方程几乎覆盖了一切科学工程领域，现代大型科学工程计算的主要任务，也是用现代大型计算机求解这些方程．

数学物理方程理论发展到今天，经典的和现代的互相渗透，形成内容十分丰富的分支．如何使应用数学、计算数学、物理和力学专业的研究生在较短的时间内，尽快地了解如此庞大理论体系中的主要结果和方法，以便结合数学和自然科学的各个分支，使它们互相渗透，有所创新．培养和训练研究生的这种能力，是近代科学综合发展趋势的要求，也是培养新一代科学工作者必不可少的环节．

从一个庞大的理论体系中选取一定的材料，使它不仅要包含原体系的主要结果和方法，还要自成体系、满足作为一本教材的种种要求，这不能不说是一件非常困难的事情．自 1980 年以来，我们经过多年的教学探索和实践，多次修改，撰写成本书，较好地达到了这一要求．

本书分两部分．第一部分（第一章到第四章）是广义函数和 Соболев 空间．主要阐述广义函数和 Соболев 空间的概念和基

本性质，尤其是一些有重要应用的 Соболев 空间性质。第二部分（第五章到第九章）是数学物理方程 Hilbert 空间方法。对椭圆型方程着重于变分原理和正则性理论；对发展方程，着重于用半群理论来讨论它的适定性问题；最后还讨论了在弹性力学、流体力学、电磁场和量子力学中的应用。

第一章广义函数和 Fourier 变换。本章较系统地阐述了建立 Соболев 空间的泛函基本知识。这样做为的是使学生从本科泛函分析课程中延续过来，起到承上启下的作用，使学生在一进入本课程时不致于太吃力。同时本章的讨论也为全书的展开打下了良好的基础。本章结构紧凑，各节的定义、定理及例子环环相扣，较简捷地处理了教材内容。

第二章 $L^p(\Omega)$空间。本章内容虽然是经典的，但它是了解 Соболев 空间所必需的。本章既介绍了 $L^p(\Omega)$空间的主要内容，又强调了一些常用的基本方法，同时还适当地略去了那些与 Соболев 空间关系不大的内容。

第三章整数阶 Соболев 空间 $H^{m,p}(\Omega)$，本章恰当地处理了庞大而复杂的内容，如内插性质、延拓性质以及嵌入性质等，既阐明了基本方法，使学生对这些性质的来龙去脉有个大致的了解，同时又不拘泥于琐碎的细节，繁简适当。

第四章实数阶 Соболев 空间和迹空间。推广了整数阶 Соболев 空间的性质，同时还讨论了若干向量值 Соболев 空间，它们在弹性力学、流体力学和电磁场中有广泛应用。

第五章抽象的椭圆边值变分问题。本章对线性椭圆变分问题、混合变分问题、三线性和拟线性变分问题等，讨论了解的存在性、迭代方法、收敛性以及正则性等问题。对它们的理论根据、实际背景均有一定交代，并对内容作了合理的组织和取舍。

第六章在椭圆边值问题中的应用。本章包括在 2m 阶线性椭

圆型方程和拟线性椭圆型方程中的应用．为了更好地理解理论和概念，这里给出了一些例子．使较短的篇幅包含了较多的内容．

本章的内容和以后两章是研究数学物理问题的基础．

第七章、第八章讨论了一、二阶发展方程．这两章采用了从抽象到具体的方法，不仅讲授了内容，而且展示了整个抽象的过程和方法，使得读者很自然地获得较完整的概念．

第九章应用前面提供的理论工具，较系统地讨论了弹性力学中 Navier–Lame 方程，流体力学中 Navier–Stokes 方程，电磁场中 Maxwell 方程，磁流体动力学方程，量子力学中的 Schrödinger 方程和 Klein–Gorden 方程等相应的变分问题的解的存在、唯一性、分叉和混沌等性质．

为了内容上的自封闭，我们不得不以附录形式，给出两部分内容．附录 A：非线性泛函分析中若干问题．主要讨论非线性泛函中的极值原理、位势型算子和单调算子等性质．这部分内容，多数命题、定理都有严格证明．附录 B：紧算子 Schauder–Riesz 理论，这部分内容是经典的，不加证明．但是很有用．

这里我们应该特别感谢周天孝、黄艾香两位教授．他们仔细地阅读了全部书稿，提出了非常宝贵的意见，由于他(她)们的努力，本书才能够以今天这样的面貌同读者见面．

由于作者水平所限，错误在所难免，热忱欢迎读者提出宝贵意见，谢谢！

作　者

1990.9.

目　录

第一章　广义函数和 Fourier 变换

本章从连续函数空间入手，建立广义函数空间，并且研究广义函数的可导性、结构及其运算，包括卷积和 Fourier 变换，同时给出了用途很广的磨光算子，平均函数及单位分解定理.

§1.1　记号和说明

$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维 Euclid 空间，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中一个点，其内积和范数分别定义为

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i,\qquad |x|^2=(x,x),\quad \forall x,y\in R^n$$

若$x,y\in\mathbf{R}^n$，则点x和y之间的距离为

$$\operatorname{dist}(x,\ y)=|x-y|$$

若G是$\mathbf{R}^n$中的一个集合，则点$x\in\mathbf{R}^n$到G的距离为

$$\operatorname{dist}(x,\ G)=\inf_{y\in G}\ \operatorname{dist}(x,y)$$

若G、H是$\mathbf{R}^n$中两个集合，则集合G和H之间的距离为

$$\operatorname{dist}(G,\ H)=\inf_{x\in G}\ \operatorname{dist}(x,H)$$

若 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中一开集，则称之为区域．又如 $G\subset\mathbf{R}^n$，则用$\overline{G}$ 表示 G 在 $\mathbf{R}^n$ 中的闭包．如$\overline{G}\subset\Omega$ 且$\overline{G}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的紧子集（即有界闭集），则记为 $G\subset\subset\Omega$. 如果 u 是定义在 G 上的函数，则集合 $\{x\in G:\ u(x)\neq 0\}$ 的闭包定义为 u 的支集，记为

$$\operatorname{supp}\ u=\overline{\{x\in G:u(x)\neq 0\}}$$

如果supp $u\subset\subset\Omega$，则称u在Ω中具有紧支集.

用 $\partial\Omega$ 表示 Ω 在 $\mathbf{R}^n$ 中的边界，即集合 $\overline{\Omega}\bigcap\Omega^c$，其中 $\Omega^c=\mathbf{R}^n\backslash\Omega=\{x\in\mathbf{R}^n:x\notin\Omega\}$ 是 Ω 的补集．

设向量 $\alpha=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)$，它的每个分量都是非负整数，所有这些向量的集合，称为 n 重非负整数空间，记为 Z_+^n，也称 α 为 n 重指标．若 $\alpha,\beta\in Z_+^n$，则规定 $|\alpha|=\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j$，$\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$．如果 $\alpha_j\leqslant\beta_j,j=1,2,\cdots,n$，则称 $\alpha\leqslant\beta$．还有 $\alpha!=\alpha_1!\cdots\alpha_n!$．而且如果 $\alpha\leqslant\beta$，则

$$\binom{\beta}{\alpha}=\frac{\beta!}{\alpha!(\beta-\alpha)!}=\binom{\beta_1}{\alpha_1}\binom{\beta_2}{\alpha_2}\cdots\binom{\beta_n}{\alpha_n}$$

若 $\alpha\in Z_+^n$，则用 x^α 表示次数为 $|\alpha|$ 的单项式 $x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$．类似地，对于 $1\leqslant j\leqslant n$，

$$\partial^\alpha=\partial_1^{\alpha_1}\cdots\partial_n^{\alpha_n}\text{，其中}\partial_j=\frac{\partial}{\partial x_j}$$

表示阶数为 $|\alpha|$ 的导数，显然 $\partial^{(0,\cdots,0)}u=u$．

对于在 x 附近 $|\alpha|$ 次连续可导函数 u 和 v，容易证明Leibniz公式

$$\partial^\alpha(uv)(x)=\sum_{\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\partial^\beta u(x)\partial^{\alpha-\beta}v(x)$$

§1.2 连续函数空间

设 Ω 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开子集，$\alpha\in Z_+^n$，m 为非负整数．

集合 $C^m(\Omega)$ 是由定义在 Ω 上，并在 Ω 上连续且具有直到 m 阶连续的偏导数 $\partial^\alpha f$ $(|\alpha|\leqslant m)$ 的函数 f 组成．

集合 $C^m(\overline{\Omega})$ 是由 $C^m(\Omega)$ 中这样的函数 f 组成：f 及其直到 m 阶偏导数 $\partial^\alpha f(|\alpha|\leqslant m)$ 均在 Ω 上有界和一致连续．如定义范数为

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})}=\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup_{x\in\Omega}|\partial^\alpha f(x)| \tag{1.2.1}$$

则$C^m(\overline{\Omega})$是Banach空间.

通常用$C(\Omega)$表示$C^0(\Omega)$，$C(\overline{\Omega})$表示$C^0(\overline{\Omega})$.

$C_B(\Omega)$是由定义在Ω上的有界连续函数的全体组成.类似地可以定义$C_B^m(\Omega)$.$C_B^m(\Omega)$是Banach空间，其范数的定义与$C_B^m(\overline{\Omega})$的相同.

如果$0<\lambda\leqslant 1$，定义$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$是$C^m(\overline{\Omega})$的子空间，它由$C^m(\overline{\Omega})$中的这样的函数$f$组成：对于$0\leqslant|\alpha|\leqslant m$，$\partial^\alpha f$在$\Omega$中满足指数为$\lambda$的Hoelder条件，即存在常数$c$，使得

$$|\partial^\alpha f(x)-\partial^\alpha f(y)|\leqslant c|x-y|^\lambda \quad \forall x,y\in\Omega$$

如定义范数为

$$\|f\|_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})}=\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})}+\max_{0\leqslant|\alpha|\leqslant m}\sup_{\substack{x,y\in\Omega\\x\neq y}}\frac{|\partial^\alpha f(x)-\partial^\alpha f(y)|}{|x-y|^\lambda} \qquad (1.2.2)$$

则$C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 是Banach空间，称指标为(m,λ)的Hoelder空间.

如果Ω是有界区域，下面两个众所周知的定理对于确定$C(\overline{\Omega})$的子集合的稠密性和紧性提供了有效的判别准则.

定理 1.2.1 (Stone－Weierstrass 定理) 设Ω是$\mathbf{R}^n$中的有界区域.如果$C(\overline{\Omega})$的子集合A满足

(1) 如果$f,g\in A$且$c\in K$,K为一数域.则$f+g$，fg和cf都属于A；

(2) 如果$f\in A$，则$\overline{f}\in A$，其中$\overline{f}$是f的复共轭；

(3) 如果$x,y\in\overline{\Omega}$，$x\neq y$,则存在$f\in A$,使得$f(x)\neq f(y)$；

(4) 如果$x\in\overline{\Omega}$，则存在$f\in A$，使得$f(x)\neq 0$.

那么A在$C(\overline{\Omega})$中稠密.

推论 1.2.1(Weierstrass) 设Ω是$\mathbf{R}^n$中的有界区域，$f\in C(\overline{\Omega})$，则对任意一个$\varepsilon>0$，存在一个多项式$P(x)$满足

$$\|f-P\|_{C(\overline{\Omega})}<\varepsilon$$

定理 1.2.2 (Ascoli－Arzela 定理) 设Ω是$\mathbf{R}^n$中有界区

域，$C(\bar{\Omega})$ 的子集合 A 在 $C(\bar{\Omega})$ 中是准紧（相对紧）的，如果 A 满足：

(1) 存在常数 M，使得对一切 $f\in A$ 和 $x\in\Omega$，$|f(x)|\leqslant M$；

(2) 对每个 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得如果 $f\in A, x, y\in\Omega$，而且 $|x-y|<\delta$，则 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

令 $C^\infty(\Omega)=\bigcap\limits_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$，它是 Ω 上无穷次连续可微函数的全体．$C^\infty(\Omega)$ 中函数本身及其偏导数可以在 Ω 上无界．类似地可以定义 $C^\infty(R^n)$．把 $C^\infty(R^n)$ 中的函数在 Ω 上的限制所得的函数全体记为 $C^\infty(R^n, \Omega)$，即

$$C^\infty(R^n,\Omega)=\{u:\ u=v|_\Omega, v\in C^\infty(R^n)\}$$

显然，$C^\infty(R^n, \Omega)\subset C^\infty(\Omega)$.

定义 $C_0(\Omega)=\{f\in C(\Omega):\ \mathrm{supp}\ f\subset\subset\Omega\}$

$$C_0^\infty(\Omega)=\{f\in C^\infty(\Omega):\ \mathrm{supp}\ f\subset\subset\Omega\}.$$

类似地有 $C_0^m(\Omega)$，$C_0^\infty(R^n)$．把 $C_0^\infty(R^n)$ 中的函数限制在 Ω，所得函数的全体组成 $C_0^\infty(R^n, \Omega)$.

为了以后的讨论，这里给出 $C^\infty(\Omega)$ 内有界集的定义．若 A 是由 $C^\infty(\Omega)$ 中的部分元素组成的集合，如对任意给定的整数 $m\geqslant 0$ 和紧集 $K\subset\Omega$，存在只依赖于 m 和 K 的常数 $c>0$，使得

$$|\partial^\alpha\psi(x)|\leqslant c, \forall\alpha\in Z_+^n, |\alpha|\leqslant m, \forall\psi\in A,\ x\in K.$$

则称 A 是 $C^\infty(\Omega)$ 中的有界集合.

相应地，集合 A 在 $C_0^\infty(\Omega)$ 中有界是指存在紧子集 $K\subset\Omega$，使得 $\mathrm{supp}\ \psi\subset K$，$\forall\psi\in A$ 且 $\forall\alpha\in Z_+^n$，存在常数 c_α，使得

$$|\partial^\alpha\psi(x)|\leqslant c_\alpha,\ \forall x\in K,\ \forall\psi\in A.$$

设 p 为一正实数，u 为 Ω 上的可测函数，则定义

$$L^p(\Omega)=\{u:\ \int_\Omega |u|^p dx<\infty\} \qquad (1.2.3)$$

在 $L^p(\Omega)$ 中，把两个定义在 Ω 上几乎处处相等的函数 $u_1(x)$ 和 $u_2(x)$（即在 Ω 中除去一个零测集之外，$u_1(x)=u_2(x)$）称为是等

价的．因此 $L^p(\Omega)$ 中的元素是满足 $\int_\Omega |u|^p dx < \infty$ 的可测函数等价类．其范数定义为

$$\|u\|_{0,p,\Omega} = \{\int_\Omega |u|^p dx\}^{1/p} \tag{1.2.4}$$

用 $L^\infty(\Omega)$ 表示在 Ω 中除去一个零测集之外是有界的可测函数 $u(x)$ 全体．若 $u \in L^\infty(\Omega)$，则存在一个常数 c(与 $u(x)$ 有关)使得 $|u(x)| \leqslant c$ 几乎处处成立．定义其范数为

$$\|u\|_{0,\infty\Omega} = \text{ess}\sup_{x\in\Omega}|u(x)| = \inf\{c:|u(x)| \leqslant c\} \tag{1.2.5}$$

§1.3 检验函数空间

1° 引言 在分析领域，古典函数已不能满足实际的需要．例如偏微分方程的解，已经不能为古典函数所描述，许多物理量也不能为古典函数所刻划，这就需要扩大函数的概念．广义函数理论从此被建立起来．完整的广义函数理论是由 Schwartz 等人建立的，它是作为泛函而被引入的．然而应该选择怎样的函数空间，使得在它上面的线性连续泛函可以作为广义函数呢?

首先考察 $L^2(\Omega)$ 空间，由 Riesz 表示定理知对于 $L^2(\Omega)$ 上的任一线性连续泛函 $l \in (L^2(\Omega))'$($L^2(\Omega)$ 的对偶空间)，存在着唯一的函数 $u \in L^2(\Omega)$，使得对于任意 $v \in L^2(\Omega)$ 有 $<l,v> = (u,v) = \int_\Omega uv dx$. 反之，$L^2(\Omega)$ 中任一函数，可以利用上式建立一个 $L^2(\Omega)$ 上的线性连续泛函．这就在 $L^2(\Omega)$ 和 $(L^2(\Omega))'$ 之间建立了一一对应的关系．由 Riesz 表示定理知，这种对应关系实际上是等距同构，即 $\|l\|_{(L^2(\Omega))'} = \|u\|_{0,2,\Omega}$．这说明，如我们取 $(L^2(\Omega))'$ 中的元素作为广义函数，则没有扩大所研究的函数的范围．

其次考察 $L^p(\Omega)$ 空间，且 Ω 是有界区域，$p > 2$. 在定

理 2.3.1 中将会看到 $L^{p'}(\Omega)$ 与其对偶空间 $(L^{p}(\Omega))'$ 有着等距同构关系，记为 $(L^{p}(\Omega))' \simeq L^{p'}(\Omega)$，其中 $1/p+1/p'=1$. 因为 $p>2$，有 $1<p'<2$，由 Hoelder 不等式容易证明，$\forall u \in L^{p}(\Omega)$，必有 $u \in L^{p'}(\Omega)$ 且范数满足

$$\|u\|_{p',\Omega} \leqslant (\mu(\Omega))^{(1/p')-(1/p)}\|u\|_{p,\Omega},\ (\mu(\Omega)=\int_{\Omega} dx)$$

这说明，如果我们把 $(L^{p}(\Omega))'$ 中的元素作为广义函数，则扩充了所研究的函数空间 $L^{p}(\Omega)$.

最后，考察由

$$l(\psi)=\psi(0) \qquad \forall \psi \in C_B(\Omega)$$

所定义的线性泛函，称其为 δ 函数或 Dirac 函数，记为

$$\delta(\psi)=<\delta,\ \psi>=\psi(0),$$

或 $\delta(\psi)=\int_{\Omega}\delta(x)\psi(x)dx$.

可以证明，线性泛函 δ 在 $C_B(\Omega)$ 的范数下是连续的. 事实上，令 $\psi_n(x) \in C_B(\Omega)$，且满足

$$\|\psi_n(x)\|_{C_B(\Omega)} \to 0, \quad 当 n \to \infty 时.$$

显然有 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta(\psi_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(0)=0$，所以 $\delta(\psi)$ 是连续的. 然而，我们找不到一个连续函数 $f(x)$，使得

$$\int_{\Omega} f(x)\psi(x)dx=\psi(0) \quad \forall \psi \in C_B(\Omega)$$

在后面的讨论中，我们还将知道，甚至我们找不到一个可积函数 $f(x)$，使得上式成立.

引人泛函序列

$$<\delta_h,\psi>=\int_{\Omega}\delta_h(x)\psi(x)dx \quad \forall \psi \in C(\Omega)$$

其中 ω_n 是 R^n 中单位球体积，以及

$$\delta_h(x)=\begin{cases}(\omega_n h^n)^{-1} & |x| \leqslant h \\ 0 & |x|>h\end{cases}$$

由中值定理，有

$$\int_{\Omega}\delta_h(x)\psi(x)dx=\psi(\xi)$$

其中 $\xi\in B_h(0)$.$B_h(0)$ 表示中心在原点，半径为 h 的闭球．显然，当 $h\to 0$ 时，$\xi\to 0$，故 $\lim\limits_{h\to 0}<\delta_h,\psi>=\psi(0)=<\delta,\psi>$．因此，$\delta$ 可以看作泛函序列 δ_h 在某种意义下的极限

由上述分析，不难看出，函数空间的性质越好，则在此函数空间上所定义的泛函就越多，其对偶空间就越广.我们把定义在一些特定的函数空间上的连续线性泛函称为广义函数，而这些特定的函数空间称为检验函数空间.

2°.检验空间$C^\infty(\Omega)$，$C_0^\infty(\Omega)$以及空间$E(\Omega)$，$D(\Omega)$

$C^m(\Omega)$在加法和数乘运算下是一个线性空间.

对于Ω的任一紧子集K和$\alpha\in Z_+^n$，定义半范如下，

$$p_{K,m}(f)=\max_{|\alpha|\leq m}\sup_{x\in K}|\partial^\alpha f(x)|\quad \forall f\in C^m(\Omega).$$

于是 $C^m(\Omega)$ 在这族半范数下成为一个局部凸拓扑空间，记为 $E^m(\Omega)$. 在这个空间 $E^m(\Omega)$ 中，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$就意味着在 Ω 的每一个紧子集 K 上，对每一个 $\alpha\in Z_+^n$，$|\alpha|\leqslant m$，$\lim\limits_{n\to\infty}\partial^\alpha f_n(x)=\partial^\alpha f(x)$ 一致地成立．

可以证明$E^m(\Omega)$是一个拓扑空间.

对于 $C^\infty(\Omega)$ 空间，可数半范族 $\{p_{K,m}\}(m=0,1,2,\cdots)$ 定义了 $C^\infty(\Omega)$ 上的一个局部凸拓朴空间，记为 $E(\Omega)$. 类似地，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ 就是在 Ω 的每一个紧子集 K 上，对每一个 $\alpha\in Z_+^n$，$|\alpha|<\infty$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\partial^\alpha f_n(x)=\partial^\alpha f(x)$ 一致地成立．

$C_0^\infty(\Omega)$ 在加法和数乘运算下是一个线性空间．对于 Ω 的任

一紧子集 K, 设 $C_K^\infty(\Omega)=\{f\in C_0^\infty(\Omega):\ \mathrm{supp}\ f\subset K\}$. 在 $C_K^\infty(\Omega)$ 上定义半范族

$$p_{K,m}(f)=\sup_{|\alpha|\leqslant m,\ x\in K}|\partial^\alpha f(x)|,\ m<\infty.$$

于是 $C_K^\infty(\Omega)$ 成为一个局部凸拓朴线性空间，且当 $K_1\subseteq K_2$ 时，$C_{K_1}^\infty(\Omega)$ 的拓朴与 $C_{K_1}^\infty(\Omega)$ 作为 $C_{K_2}^\infty(\Omega)$ 的一个子集的相对拓扑是恒同的．从而诸 $C_K^\infty(\Omega)$(这里 K 取遍 Ω 的所有紧子集)的诱导(或归纳)极限是一个局部凸线性拓扑空间．用这样的方法把 $C_0^\infty(\Omega)$ 拓朴化后记为 $D(\Omega)$. 在空间 $D(\Omega)$ 中，收敛 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n=f$ 意味着满足如下两个条件：1　存在 Ω 的某个紧子集 K，使得 $\mathrm{supp}f\subset K$ 和 $\mathrm{supp}f_n\subset K(n=1,2,\cdots)$ 以及 2　对任意的微分算子 ∂^α，序列 $\partial^\alpha f_n(x)$ 在 K 上都一致收敛于 $\partial^\alpha f(x)$.$D(\Omega)$ 在广义函数的定义中有重要的作用．

例1　令 $\psi(x)=\begin{cases}\exp(|x|^2-1)^{-1} & \text{当}|x|<1\text{时},\\ 0 & \text{当}|x|\geqslant 1\text{时},\end{cases}$

则 $\psi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$，而且 $\mathrm{supp}\psi\subset\{x:|x|\leqslant 1\}=B_1(0)$，即以 $x=0$ 为中心，以 1 为半径的闭球．引入规格化常数 $c=\int_{\mathbf{R}^n}\psi(x)dx$ 后，如记

$$\alpha(x)=\psi(x)/c$$

则有 $\alpha(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$;$\int_{\mathbf{R}^n}\alpha(x)dx=1$;$\mathrm{supp}\alpha(x)=B_1(0)$ 以及 $\alpha(x)\geqslant 0,\forall x\in\mathbf{R}^n$.

例 2　特征函数．设球 $B_R(0)=\{x:|x|\leqslant R\}$(或简记为 B_R),则函数

$$\chi_R(x)=\begin{cases}1 & |x|\leqslant R\\ 0 & |x|>R\end{cases}$$

称为B_R的特征函数.

令　$\beta_R(x)=\int_{R^n}\chi_R(x-t)\alpha(t)dt=\int_{R^n}\chi_R(t)\alpha(x-t)dt$