

# 计算机辅助飞机制造

唐荣锡

主编

航空工业出版社

0.5  
3

## 前 言

本书是1985年第1版的更新版。从1985年到现在,计算机辅助设计、制造技术本身及其在飞机制造工业中的应用都有了很大发展,本书的编排体系和内容相应也作了大量修改和充实。我国当前的形势是要加快改革开放步伐,大力贯彻“科学技术是第一生产力”的方针,加速推进大中型企业的技术改造,强化技术进步;同时还要努力创造环境,大力发展高新技术产业,这些前提都为CAD/CAM技术的推广和自主版权CAD/CAM软件的开发以及相应软件产业的建立创造了空前有利的条件。

CAD/CAM是当代最杰出的工程技术成就之一。它从根本上改变了过去的手工绘图、发图、凭图纸组织整个生产过程的技术管理方式,将后者变成在图形工作站上交互设计产品、用数据文件发送产品定义,在统一的数字化产品模型下进行设计打样、分析计算、性能仿真、工艺计划、工艺装备设计、数控加工、质量控制、编印产品维护手册、组织备件订货供应等。所谓建立一个产品的CAD/CAM系统,首先应该理解为建立一种新的设计和生产技术管理体制。有了这样的新体制,就可以方便地:

1. 组织平行作业。产品设计的各个部件组、系统组、专业分析组、试验组、生产准备组都可以及时从屏幕上看到产品的总体布局,及时进行各种专业协调。
2. 在产品阶段进行电子模拟装配,及早发现产品结构和系统安装的空间布局中的干涉。
3. 组织迅速有效的设计发图更改和生产更改。
4. 进行产品性能的数字仿真,大幅度减少产品试制的试验工作量。
5. 提前进行产品的工业设计,及早让用户从屏幕上评审产品的外观和使用条件。
6. 进一步组织计算机集成制造。通过计算机网络和数据库,将整个企业的管理信息系统、技术信息系统以及柔性制造线联成一个整体,提高生产的快速应变和市场竞争能力。

航空工业是我国最早应用CAD/CAM技术的部门之一。在飞机制造中计算机技术的应用已经成为新的常规技术。所有新设计和研制、生产的飞机都已100%地建立外形数学模型。飞机的结构模线也已全部用数控绘图机绘制,并且实行了结构打样与结构模线绘制的合一。飞机的整体结构件,如壁板、加强框、座舱盖骨架都用数控机床加工、数控测量机检验。飞机的主起落架运动机构和整流罩已开始计算机屏幕上利用三维几何模型进行协调,一次取得成功,省去了制造实物样机的过程。有些工厂已经实现了全部计算机联网,可以在各部门间直接传输产品定义数据和管理信息,对数控机床实行直接控制。条件好的工厂已经认真地朝着计算机集成制造系统的目标努力,脚踏实地地开展技术改造。

计算机技术的发展无比迅速。本书作为大学本科教材着重介绍基本概念和基础内容。全书共三篇十章,由唐荣锡主编。第一篇介绍产品几何模型的建立方法。第一章说明产品几何模型中最常用的曲线曲面表示方法,由南京航空学院周儒荣、马翔主持修订,比上一版扩充了非均匀有理B样条的内容。第二章介绍图形变换。为使全书的体系较完整,这次扩大了

篇幅，由北京航空航天大学温文彪编写。第三章介绍三维几何造型，属于新增加的内容，由北京航空航天大学王云渤、唐荣锡合写。第二篇生产准备和生产过程的基本环节共有五章。第四章工程绘图由北京航空航天大学范玉青编写，第五章工艺过程设计由张关康编写。第六章工艺装备设计中模具设计部分由西北工业大学高光焘执笔，型架设计部分由北京航空航天大学冯宗律执笔。第七章数控加工的程序编制由任仲贵修订。第八章数控测量未作更动，原来由西北工业大学赵振亚编写。第三篇说明系统的集成，共有两章。第九章飞机制造中的协调路线由张关康、王云渤执笔。最后第十章产品的集成制造系统简单介绍我国的 CIMS 发展概况，由冯宗律编写。

全书请清华大学童秉枢、杨小庆老师审阅，提出了很多宝贵意见，在此表示衷心感谢。

编者

# 目 录

## 第一篇 产品几何模型的建立方法

|                             |       |
|-----------------------------|-------|
| <b>第一章 曲线和曲面的数学描述</b> ..... | (1)   |
| 1.1 曲线和曲面的矢量方程与参数方程 .....   | (1)   |
| 1.2 三次样条曲线与参数样条曲线 .....     | (15)  |
| 1.3 孔斯曲面与双三次样条插值 .....      | (32)  |
| 1.4 贝齐埃曲线与曲面 .....          | (52)  |
| 1.5 B样条曲线与曲面 .....          | (71)  |
| 1.6 非均匀有理B样条曲线和曲面 .....     | (100) |
| 1.7 曲面的几何处理 .....           | (110) |
| <b>第二章 图形变换</b> .....       | (115) |
| 2.1 二维图形变换 .....            | (116) |
| 2.2 齐次坐标 .....              | (127) |
| 2.3 三维图形变换 .....            | (133) |
| 2.4 窗口视区变换 .....            | (137) |
| 2.5 三维物体投影变换 .....          | (140) |
| 2.6 变换的控制 .....             | (151) |
| 2.7 造型变换 .....              | (152) |
| <b>第三章 三维几何造型</b> .....     | (160) |
| 3.1 机械产品常用的三维几何模型 .....     | (160) |
| 3.2 线框模型 .....              | (161) |
| 3.3 表面模型 .....              | (165) |
| 3.4 实体模型 .....              | (169) |
| 3.5 参数化几何造型 .....           | (197) |

## 第二篇 生产准备和生产过程的基本环节

|                            |       |
|----------------------------|-------|
| <b>第四章 工程绘图</b> .....      | (209) |
| 4.1 计算机绘图的基本原理及其图形软件 ..... | (209) |
| 4.2 二维图形的几何定义 .....        | (212) |
| 4.3 常用构图方法 .....           | (221) |
| 4.4 交互式绘图系统 .....          | (235) |
| 4.5 工程绘图的发展 .....          | (243) |
| <b>第五章 工艺过程设计</b> .....    | (247) |
| 5.1 零件信息描述 .....           | (247) |

|            |                  |              |
|------------|------------------|--------------|
| 5.2        | 变异式工艺过程设计        | (267)        |
| 5.3        | 创成式工艺过程设计        | (275)        |
| 5.4        | 钣金零件工艺过程设计       | (289)        |
| <b>第六章</b> | <b>工艺装备设计</b>    | <b>(293)</b> |
| 6.1        | 冷冲模CAD及其专家系统     | (293)        |
| 6.2        | 型架CAD            | (302)        |
| <b>第七章</b> | <b>数控加工的程序编制</b> | <b>(323)</b> |
| 7.1        | 数控机床的特点和分类       | (323)        |
| 7.2        | 数控加工编程           | (331)        |
| 7.3        | 数控机床的指令格式        | (347)        |
| 7.4        | 数控加工零件的编程举例      | (357)        |
| 7.5        | 数控自动编程技术         | (362)        |
| 7.6        | 后置处理程序           | (370)        |
| <b>第八章</b> | <b>数控测量</b>      | <b>(375)</b> |
| 8.1        | 数控测量的应用          | (375)        |
| 8.2        | 测量机的结构形式和精度      | (376)        |
| 8.3        | 测量头和测量方法         | (377)        |
| 8.4        | 数控测量的数据处理        | (381)        |
| 8.5        | 数控测量指令和软件        | (382)        |

### 第三章 集成制造技术

|             |                   |              |
|-------------|-------------------|--------------|
| <b>第九章</b>  | <b>飞机制造中的协调路线</b> | <b>(385)</b> |
| 9.1         | 综述                | (385)        |
| 9.2         | 飞机外形的数学模型         | (388)        |
| 9.3         | 典型飞机结构的协调路线       | (394)        |
| 9.4         | CAD/CAM 技术的应用情况   | (398)        |
| <b>第十章</b>  | <b>产品集成制造简介</b>   | <b>(400)</b> |
| 10.1        | 概述                | (400)        |
| 10.2        | CIMS中的生产计划管理      | (408)        |
| 10.3        | CIMS的质量控制         | (410)        |
| 10.4        | CIMS中的柔性制造系统      | (411)        |
| 10.5        | CIMS 中的数据库        | (415)        |
| <b>参考文献</b> |                   | <b>(417)</b> |

# 第一篇 产品几何模型的建立方法

## 第一章 曲线和曲面的数学描述

对于飞机、汽车及其他一些具有复杂外形的产品,计算机辅助设计与制造的一个关键性环节,就是用数学方法来描述它们的外形,并在此基础上建立它们的几何模型。

本章先简要介绍曲线和曲面的矢量方程和参数方程,然后分别介绍定义曲线和曲面的一些常用的、基本的数学方法。

### 1.1 曲线和曲面的矢量方程与参数方程

#### 一、曲线的矢量方程和参数方程

图 1-1 中有一空间点  $A$ , 从原点  $O$  到  $A$  点的连线  $\overrightarrow{OA}$  表示一个矢量, 此矢量称为位置矢量。

空间一点的位置矢量有三个坐标分量, 而空间曲线是空间动点运动的轨迹, 也就是空间矢量端点运动形成的矢端曲线。其矢量方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}(t) \\ &= [x(t), y(t), z(t)] \end{aligned} \quad (1-1)$$

此式又称为单参数  $t$  的矢函数。

它的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [t_0, t_n] \\ z = z(t) \end{cases} \quad (1-2)$$

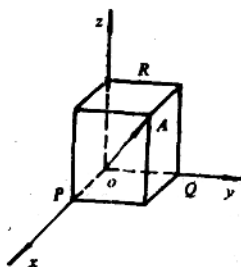


图 1-1 位置矢量

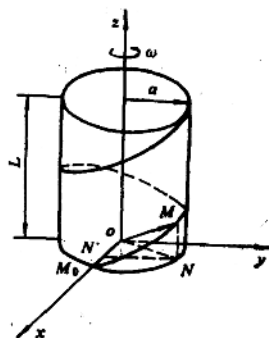


图 1-2 空间螺旋线

### 例 求空间螺旋线的矢量方程和参数方程

设动点  $M$  沿圆柱右螺旋线运动, 如图 1-2 所示。  $M$  点作圆周运动的转动角速度为  $\omega$ , 沿  $z$  轴作直线运动的线速度为  $v$ , 运动的时间为  $t$ , 圆柱的半径为  $a$ , 总长度为  $L$ 。

首先选取起始平面的圆心  $O$  为坐标原点, 过动点的起始位置  $M_0$  作  $x$  轴, 建立右手坐标系  $O-xyz$ 。然后, 连接坐标原点  $O$  和动点的任一位置  $M$ , 得矢量  $\overrightarrow{OM}$ ,  $\overrightarrow{OM}$  的端点轨迹是螺旋线。这时, 矢端曲线的矢量方程为

$$\mathbf{r}(t) = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM}$$

又因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON} &= \overrightarrow{ON'} + \overrightarrow{N'N} \\ &= a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j} \\ \overrightarrow{NM} &= vt \mathbf{k}\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= a \cos \omega t \mathbf{i} + a \sin \omega t \mathbf{j} + vt \mathbf{k} \\ &= [a \cos \omega t, a \sin \omega t, vt]\end{aligned}$$

它的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t \\ y = a \sin \omega t, t \in [0, L/v] \\ z = vt \end{cases}$$

## 二、矢函数的导矢及其应用

### 1. 矢函数求导

和数量函数的求导一样, 矢函数也可以求导。设当参数  $t$  变为  $t + \Delta t$  时 (见图 1-3), 矢函数  $\mathbf{r}(t)$  对应的位置由  $OM$  变为  $OM_1$ , 线段  $MM_1$  对应的矢量差是

$$\Delta \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$$

其变化率是

$$\frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

由此得出的矢量平行于弦矢量  $\overrightarrow{MM_1}$ 。

当参数变化量  $\Delta t > 0$  时,  $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$  和弦  $MM_1$  的方向相同。反之, 当  $\Delta t < 0$  时, 两者的方向相反。

当  $\Delta t \rightarrow 0$  时, 这个矢量的极限叫做  $\mathbf{r}(t)$  的导矢 (严格地讲应为一阶导矢)。记为  $\mathbf{r}'(t)$  或  $d\mathbf{r}(t)/dt$ ,

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$$

又设  $\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$

$$\therefore \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \left[ \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right]$$

$$\therefore \mathbf{r}'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)] \quad (1-3)$$

矢函数的导矢也是一个矢函数, 因此也有方向和模。矢量  $[\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)]/\Delta t$  的方向平行于割线  $MM_1$  (见图 1-3)。当  $\Delta t \rightarrow 0$  时,  $\Delta \mathbf{r}(t)/\Delta t$  就转变为  $M(t)$  点的切线矢量, 故

又称导矢为切矢。它指向曲线参数增长的方向。

导矢的模为

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \quad (1-4)$$

由导矢的定义, 可推出下列运算法则:

$$(1) \quad \mathbf{C}' = \mathbf{0}, (\mathbf{C} \text{ 为常矢}) \quad (1-5)$$

$$(2) \quad [\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t)]' = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t) \quad (1-6)$$

$$(3) \quad [K\mathbf{r}(t)]' = K\mathbf{r}'(t) \quad (1-7)$$

其中  $K$  为常数。

$$(4) \quad [f(t) \cdot \mathbf{r}(t)]' = f'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + f(t) \cdot \mathbf{r}'(t) \quad (1-8)$$

其中  $f(t)$  为数量函数。

$$(5) \quad [\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t)]' = \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t) \quad (1-9)$$

$$(6) \quad [\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)]' = [\mathbf{r}_1'(t) \times \mathbf{r}_2(t)] + [\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2'(t)] \quad (1-10)$$

以上诸式读者可以自行证明其正确性。

(7) 高阶导矢

$$\mathbf{r}''(t) = [x''(t), y''(t), z''(t)]$$

.....

$$\mathbf{r}^{(n)}(t) = [x^{(n)}(t), y^{(n)}(t), z^{(n)}(t)]$$

## 2. 导矢在几何上的应用

前面已介绍了导矢的几何定义。导矢的物理意义也是明确的, 当参数  $t$  是时间时, 一阶导矢就是速度矢, 二阶导矢是加速度矢。下面我们着重介绍导矢在飞机外形数学模型建立中的应用。

(1) 求曲线上任意一点的切线方程和法平面方程

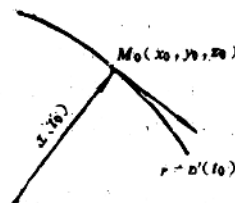


图 1-4 曲线的切矢

设已知曲线方程为  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  (见图 1-4), 求曲线上任一点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  的切线方程和法平面方程。

① 求过  $M_0$  点的切线方程

因为曲线方程为

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

故曲线的切矢为

$$\mathbf{r}'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)]$$

切线的方向数为

$$l = x'(t), m = y'(t), n = z'(t)$$

过  $M_0$  点的方向数为

$$l_0 = x'(t_0), m_0 = y'(t_0), n_0 = z'(t_0)$$

因此, 过  $M_0$  点的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{l_0} = \frac{y-y_0}{m_0} = \frac{z-z_0}{n_0}$$

代入得

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

令  $\frac{x-x_0}{x'(t_0)} = \frac{y-y_0}{y'(t_0)} = \frac{z-z_0}{z'(t_0)} = \lambda$ ,  $\lambda$  为实系数

故过  $M_0$  点的切线方程又可写为

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda x'(t_0) \\ y = y_0 + \lambda y'(t_0) \\ z = z_0 + \lambda z'(t_0) \end{cases} \quad (1-11)$$

## ② 求过 $M_0$ 点的法平面方程

因为  $\mathbf{r}'(t_0)$  是曲线在  $M_0$  点的导矢 (见图 1-5), 即  $\mathbf{r}'(t_0)$  是过  $M_0$  点法平面的法矢。

设  $M$  是法平面上的一点。所以过  $M_0$  点法平面的矢量方程为

$$\mathbf{r}'(t_0) \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$$

$$[x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)] \cdot [x-x(t_0), y-y(t_0), z-z(t_0)] = 0$$

即

$$x'(t_0)[x-x(t_0)] + y'(t_0)[y-y(t_0)] + z'(t_0)[z-z(t_0)] = 0 \quad (1-12)$$

## (2) 平面曲线的等距线

在飞机外形的数学模型中, 有理论外形曲线, 相应地也有结构内形曲线, 它们只相差一个蒙皮厚度或零件的壁厚。又如在数控铣床加工零件时, 铣刀中心轨迹和零件外形相差一个铣刀半径的距离。这些都是等距线的应用。

现在我们给出等距线的定义: 已知一条曲线  $I'$ , 沿曲线各点法线方向移动一段距离  $a$ , 得到一组新的点。这些新点的轨迹  $I_1$  或  $I_2$  (见图 1-6) 称为  $I'$  的等距线。

设已知曲线  $I'$  的矢量方程为

$$\mathbf{r}(t) = [x(t), y(t)]$$

法向距离为  $a$ , 求它的等距线方程。

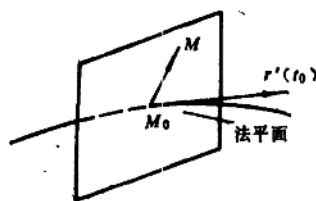


图 1-5 曲线的法平面

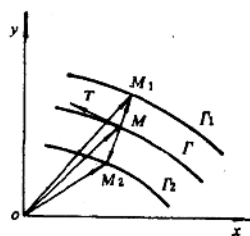


图 1-6 曲线的等距线

在矢量的原点  $O$ , 建立坐标系  $Oxy$ 。从图 1-6 中可知

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM_1}$$

其中  $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(t)$

设  $M$  点的单位切矢为  $\mathbf{T}$ <sup>①</sup>

① 切矢 Tangent vector

$$T = \left[ \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \right] \quad (1-13)$$

$T$  的正向指向曲线参数  $t$  增长的方向。

取垂直于  $xoy$  平面的方向为  $z$  轴, 令  $z$  轴方向上的单位矢量为  $k$ , 则法线方向的单位法矢为

$$N_0 = T \times k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} & \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left[ \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}, -\frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}, 0 \right]$$

$$\overrightarrow{MM_1} = aN$$

把它代入到  $\overrightarrow{oM_1}$  的表达式内, 得到等距线的矢量方程为

$$R_1(t) = \overrightarrow{oM_1} = \overrightarrow{oM} + \overrightarrow{MM_1} = r(t) + aN \quad (1-14)$$

等距线的参数方程为

$$\begin{cases} x_1 = x(t) + ay'(t)/\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \\ y_1 = y(t) - ax'(t)/\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \end{cases} \quad (1-15)$$

同理, 由矢量  $\overrightarrow{oM_2}$  可以确定另一条等距线的矢量方程和参数方程。其方法完全与上述方法相同, 读者可以自行推导。

### 三、曲线的自然参数方程

在曲线的参数方程中, 由于参数选取的不同, 得到的方程也会是不同的。所以在一般的坐标系中讨论曲线时, 由于人们选择坐标的不同而使曲线具有人为的性质。已知曲线自身的弧长是曲线的不变量, 即不管坐标系如何选取, 只要在其上取一初始点, 确定一个方向, 取一个单位长度, 则曲线的弧长和参数增长方向便完全确定了。它是不依赖于坐标系的选取的。所以我们取曲线本身的弧长作为参数, 研究曲线的一些性质, 这对实际应用和理论分析, 都会带来很多方便。

设有一条空间曲线  $\Gamma$  (见图1-7), 在  $\Gamma$  上任取一点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , 作为计算弧长的初始点。曲线上其他点  $M(x, y, z)$  到  $M_0$  之间的弧长  $s$  是可以计算的 (用弧长积分公式或累计弦长公式)。这样, 曲线上每一点的位置与它的弧长之间有一一对应的关系。以曲线弧长作为曲线方程的参数, 这样的方程称为曲线的自然参数方程, 弧长则称为自然参数。这就是说, 曲线上点的坐标  $(x, y, z)$  都是以弧长为参数的函数。曲线的参数方程为

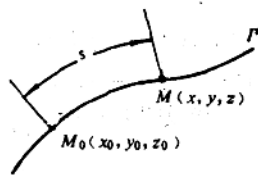


图 1-7 以弧长为参数的曲线点

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases} \quad (1-16)$$

曲线的矢量方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = [x(s), y(s), z(s)] \quad (1-17)$$

下面叙述曲线的自然参数方程与一般参数方程的联系。设已知曲线的一般参数方程(或矢量方程)为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$$

如何将它转化为曲线的自然参数方程呢?

为了观察方便, 图 1-8 所示为平面曲线的情况, 空间曲线的情况类同。

$$\therefore \mathbf{r}'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)] = \left[ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right]$$

又弧长微分公式为

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

引入参数  $t$ , 则上式可改写为

$$(ds/dt)^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2 = |\mathbf{r}'(t)|^2$$

由于矢量的模一定为正或零, 不会为负, 所以

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| > 0$$

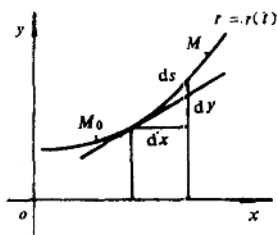


图 1-8 自然参数与一般参数的对应联系

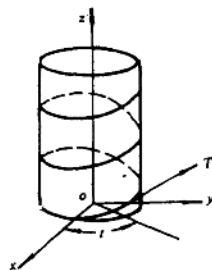


图 1-9 圆柱螺线

故知弧长  $s$  是  $t$  的单调增函数, 其反函数  $t(s)$  存在, 且一一对应。将  $t(s)$  代入到曲线方程  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  中去, 得  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s)) = \mathbf{r}(s)$ , 此式即是以弧长为参数的自然参数方程。

自然参数方程有一个重要的性质:

$$\begin{aligned} \therefore \dot{\mathbf{r}}(s) &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \mathbf{r}'(t) \cdot \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \\ \therefore |\dot{\mathbf{r}}(s)| &= 1 \end{aligned}$$

即自然参数方程的切矢为单位矢量。

下面将举一简单的例子来说明如何从一般参数曲线方程求自然参数方程。

例 已知圆柱螺线的一般参数方程为 (见图1-9)

● 今后约定  $\dot{\mathbf{r}}$  代表自然参数方程的导矢,  $\mathbf{r}'(t)$  代表一般参数方程的导矢。

$$r(t) = [a \cos t, a \sin t, bt]$$

其中  $a$  为柱面半径, 螺距为  $2\pi b$ 。

求圆柱螺线的自然参数方程

$$\therefore s = \int_{t_0}^t |r'(t)| dt$$

$$\text{令 } r'(t) = [-a \sin t, a \cos t, b]$$

代入得

$$s = \int_{t_0}^t \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2 + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} t$$

$$\therefore t = s / \sqrt{a^2 + b^2}$$

代入圆柱螺线的一般参数方程, 得到自然参数方程为

$$r(s) = [a \cos(s/\sqrt{a^2 + b^2}), a \sin(s/\sqrt{a^2 + b^2}), bs/\sqrt{a^2 + b^2}]$$

#### 四、曲线论的基本公式

##### 1. 活动坐标系和基本三棱形

如果取坐标系的原点和曲线  $r$  上的动点  $M$  重合, 使整个坐标系随  $M$  点的运动而跟随运动, 这种坐标系称为活动坐标系 (见图1-10)。

现在我们来讨论活动坐标系中各坐标轴如何选择?

##### (1) 确定坐标轴 I:

设空间曲线  $r$  的方程为  $r=r(s)$ , 由前面证明的自然参数方程的一个重要性质知, 自然参数方程表示的曲线的切矢为单位矢量, 记为  $T$ 。

$$T(s) = \dot{r}(s) \quad (1-18)$$

切矢  $T$  的方向就取为活动坐标系的第一个坐标轴的方向。

##### (2) 确定坐标轴 II:

$\therefore [T(s)]^2 = 1$ , 对左式求导, 得

$$2T(s) \cdot \dot{T}(s) = 0$$

上式说明  $T(s)$  和  $\dot{T}(s)$  垂直。又因为  $\dot{T}(s)$  不是单位矢量, 可以认为

$$\dot{T}(s) = k(s) \cdot N(s) \quad (1-19)$$

式中所定义的单位矢量  $N(s)$  是曲线  $r$  的主法线单位矢量, 或称主法矢。主法矢  $N(s)$  总是指向曲线凹入的方向, 这也是主法矢正向的几何意义。 $k(s)$  是个数量系数, 称为曲线  $r$  的曲率。而矢量  $\ddot{r}(s) = \dot{T}(s)$  称为曲率矢量, 它的模就是该曲线的曲率。

$$|\ddot{r}(s)| = k(s)$$

记  $\rho(s) = 1/k(s)$ ,  $\rho(s)$  称为曲率半径。

取主法线单位矢量  $N$  的方向作为活动坐标系的第二个坐标轴的方向。

##### (3) 确定坐标轴 III:

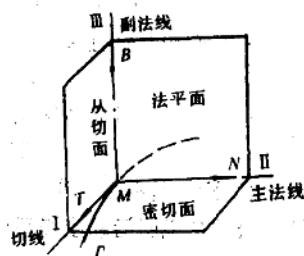


图 1-10 基本三棱形活动坐标系

令垂直于  $T$  和  $N$  的单位矢量为  $B$ ，称此矢量为次法线单位矢量或副法线单位矢量。

$$B(s) = T(s) \times N(s) \quad (1-20)$$

$B$  构成活动坐标系的第三个坐标轴的方向。

这三个单位矢量  $T, N, B$  是按右手系来建立的，它们与空间直角坐标系的三个单位矢量  $i, j, k$  有相同的性质。所不同的是  $T, N, B$  是随动点  $M$  沿曲线变动的。由于  $T, N, B$  是三个基矢，故空间曲线  $r$  从  $M$  点所引出的其他任何矢量都可以在这个活动坐标系上分解。

在图1-10中，由切线和主法线所定的平面称为密切平面。由主法线和副法线组成的平面称为法平面。而由切线和副法线构成的平面称为从切面（或称次切面）。这三个面构成了曲线  $r$  在  $M$  点处的基本三棱形（或称基本三面形）。当  $M$  点沿曲线  $r$  移动时，基本三棱形作为一个刚体运动，故又称为动标三棱形。

下面我们将介绍基矢  $T, N, B$  之间的相互关系：

(1) 它们是单位矢量：

$$[T(s)]^2 = [N(s)]^2 = [B(s)]^2 = 1 \quad (1-21)$$

(2) 三个基矢是相互垂直的：

$$T(s) \cdot N(s) = N(s) \cdot B(s) = B(s) \cdot T(s) = 0 \quad (1-22)$$

(3) 它们相互垂直又构成右手系：

$$T \times N = B, N \times B = T, B \times T = N \quad (1-23)$$

(4) 三个基矢组成的体积为1：

$$(T \times N) \cdot B = (T, N, B) = 1 \quad (1-24)$$

## 2. 曲线论的基本公式<sup>①</sup>

这组公式是说明活动坐标系中三个基矢的导矢和基矢之间的关系。现在我们先谈公式的内容。

因为

$$\dot{T}(s) = k(s) \cdot N(s) \quad (1-25)$$

其中

$$k(s) = |\dot{T}(s)| = |\ddot{r}(s)| = \sqrt{\ddot{x}(s)^2 + \ddot{y}(s)^2 + \ddot{z}(s)^2}$$

又  $B(s) \cdot T(s) = 0$ ，对左式求导，得

$$\dot{B}(s) \cdot T(s) + B(s) \cdot \dot{T}(s) = 0$$

又因为

$$\dot{T}(s) = k(s) \cdot N(s), B(s) \cdot N(s) = 0$$

所以

$$\dot{B}(s) \cdot T(s) = 0$$

又  $[B(s)]^2 = 1$ ，对左式求导，得

$$B(s) \cdot \dot{B}(s) = 0$$

所以， $\dot{B}(s)$  既垂直于  $T(s)$ ，又垂直于  $B(s)$ ，必有  $\dot{B}(s) \parallel N(s)$ 。

于是令

$$\dot{B}(s) = -K(s)N(s) \quad (1-26)$$

式中  $K(s) \in (-\infty, \infty)$ ，是数量系数，称为曲线  $r$  的挠率， $1/K$  称为挠率半径。

① 副法矢——Binormal vector

② 又称弗朗内-塞雷 (Frenet-Serret) 公式

再看

$$\begin{aligned} N(s) &= B(s) \times T(s) \\ \dot{N}(s) &= \dot{B}(s) \times T(s) + B(s) \times \dot{T}(s) \\ &= (-K(s)N(s)) \times T(s) + B(s) \times (k(s) \times N(s)) \\ &= -k(s)T(s) + K(s)B(s) \end{aligned} \quad (1-27)$$

将公式 (1-25)、(1-26)、(1-27) 综合起来, 可写为

$$\begin{cases} \dot{T}(s) = k(s)N(s) \\ \dot{N}(s) = -k(s)T(s) + K(s)B(s) \\ \dot{B}(s) = -K(s)N(s) \end{cases} \quad (1-28)$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & K \\ 0 & -K & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

这组公式说明了基矢  $T$ 、 $N$ 、 $B$  关于弧长的导矢, 可以用基矢的线性组合来表示。它反映了当  $M$  点在曲线上移动时, 活动坐标系跟随着移动, 矢量  $T$ 、 $N$ 、 $B$  的方向也随着变化, 这种变化可以用导矢  $\dot{T}$ 、 $\dot{N}$ 、 $\dot{B}$  来描述。这组公式还可用来求曲线的曲率  $k$  和挠率  $K$ 。

## 五、曲率和挠率

### 1. 曲率

#### (1) 曲率的几何意义

在微积分中, 已讨论过平面曲线的曲率, 即曲线在一点的曲率等于切线方向对于弧长的导数  $d\theta/ds$ 。即

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right| = k$$

在微分几何中, 曲率的几何意义是

$$k = |\dot{T}| = \left| \frac{dT}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta T}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta T}{\Delta \theta} \right| \cdot \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right|$$

由于  $|T(s)| = |T(s + \Delta s)| = 1$ , 都是单位矢量, (见图 1-11), 故弦长  $|\Delta T|$  与角度  $\Delta \theta$  之比的极限为 1, 就得到

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|$$

这个结果和平面曲线曲率的定义是一致的。所以  $k$  是空间曲线  $r$  的曲率, 平面曲线的曲率只不过是它的特例。曲率表示切线方向对于弧长的转动率。转动越“快”, 曲率越大, 弯曲程度越厉害。

由公式  $k = |\ddot{r}(s)| = 0$  可知, 曲率恒等于零的曲线是直线。

#### (2) 平面曲线曲率的计算方法

对于曲线方程  $y = f(x)$ , 微积分中给出的曲率计算公式是

$$k = \left| \frac{y''(x)}{[1 + (y'(x))^2]^{3/2}} \right| \quad (1-29)$$

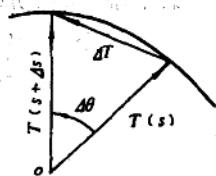


图 1-11 曲率的几何意义

对于曲线方程  $F(x, y) = 0$ , 曲率的计算公式是

$$k = \left| -\frac{F_{xx}(F_y)^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}(F_x)^2}{[(F_x)^2 + (F_y)^2]^{3/2}} \right| \quad (1-30)$$

对于自然参数方程, 曲率的计算公式是

$$k = \sqrt{[\ddot{x}(s)]^2 + [\ddot{y}(s)]^2 + [\ddot{z}(s)]^2} \quad (1-31)$$

现在给出自然参数方程中曲率的另一种表示形式。

$$\because \quad y'(x) = \dot{y}(s) / \dot{x}(s)$$

对上式求导, 得

$$y''(x) = [\ddot{y}(s)\dot{x}(s) - \dot{y}(s)\ddot{x}(s)] / [\dot{x}(s)]^3$$

将以上二式代入 (1-29) 式, 得

$$k = \frac{|\ddot{y}(s)\dot{x}(s) - \dot{y}(s)\ddot{x}(s)|}{[\dot{x}(s)]^2 + [\dot{y}(s)]^2}^{3/2}$$

$$\because \quad \sqrt{[\dot{x}(s)]^2 + [\dot{y}(s)]^2} = 1$$

$$\therefore \quad k = |\ddot{y}(s)\dot{x}(s) - \dot{y}(s)\ddot{x}(s)| \quad (1-32)$$

### (3) 空间曲线的曲率计算方法

对于自然参数方程, 曲率的计算公式为

$$k = \sqrt{[\ddot{x}(s)]^2 + [\ddot{y}(s)]^2 + [\ddot{z}(s)]^2} \quad (1-33)$$

对于一般参数方程, 曲率的计算方法如下:

$$\because \quad [\dot{\mathbf{r}}(s)]^2 = \left( \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right)^2 = \left( \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} \right)^2$$

$$\text{又} \quad |\dot{\mathbf{r}}(s)| = |\mathbf{T}(s)| = 1$$

$$\therefore \quad \left( \frac{dt}{ds} \right) = 1 / \sqrt{[\mathbf{r}'(t)]^2}$$

$$\text{则} \quad \dot{\mathbf{r}}(s) = \mathbf{r}'(t) / \sqrt{[\mathbf{r}'(t)]^2}$$

$$\text{又} \quad \ddot{\mathbf{r}}(s) = \{ \mathbf{r}''(t) [\mathbf{r}'(t)]^2 - \mathbf{r}'(t) [\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)] \} / \{ \sqrt{[\mathbf{r}'(t)]^2}^3 \cdot \sqrt{[\mathbf{r}'(t)]^2} \}$$

将上述等式两边平方,

$$\begin{aligned} [\ddot{\mathbf{r}}(s)]^2 &= \{ [\mathbf{r}''(t)]^2 [\mathbf{r}'(t)]^2 - [\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)]^2 \} / \{ [\mathbf{r}'(t)]^2 \}^3 \\ &= |\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|^2 / \{ [\mathbf{r}'(t)]^2 \}^3 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad k = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} \quad (1-34)$$

若用分量表示

$$k = \frac{\left[ \begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'(t) & x'(t) \\ z''(t) & x''(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}^2 \right]^{1/2}}{\{ [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 \}^{3/2}} \quad (1-35)$$

### (4) 应用举例

i) 已知曲线方程, 求任意点的曲率;

$$\bullet \quad \because a^2 b^2 - (a \cdot b)^2 = |a \times b|^2$$

- ii) 在作曲线光滑处理时, 使用平面曲线的相对曲率作为判别曲线是否光滑的准则;  
 iii) 已知曲率值  $k(s)$  和初始条件, 求解曲线的方程。

## 2. 挠率

### (1) 挠率 $K$ 的几何意义

$$\dot{\mathbf{B}} = -KN$$

$$\therefore |K| = \left| \frac{d\mathbf{B}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \mathbf{B}}{\Delta \theta} \cdot \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right|$$

和上面曲率的证明方法一样, 可得到 (见图1-12)

$$|K| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \theta}{\Delta s} \right|$$

即曲线在一点的挠率, 就绝对值而言, 等于副法线方向 (或密切面) 对弧长的转动率。

对于平面曲线, 密切面是固定不变的, 因而副法矢  $\mathbf{B}$  也是固定不变的, 即  $\mathbf{B} = 0$ , 故挠率  $K$  恒等于零。

### (2) 挠率 $K$ 的正负号的规定

曲线在  $M_0$  点穿过法平面和密切面, 但不穿过切面。若曲线在  $T$  正向的一方, 且在密切面的上面,

即也在  $\mathbf{B}$  正向的这一面, 这时挠率  $K$  取正 (见图1-13(a))。若曲线在  $T$  正向的一方, 且在密切面的下面, 挠率  $K$  取负 (见图1-13(b))。

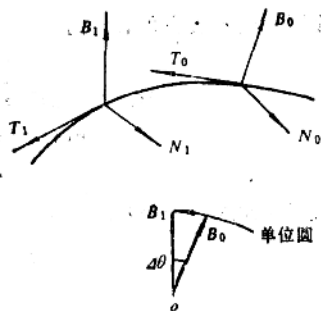


图 1-12 挠率的几何意义

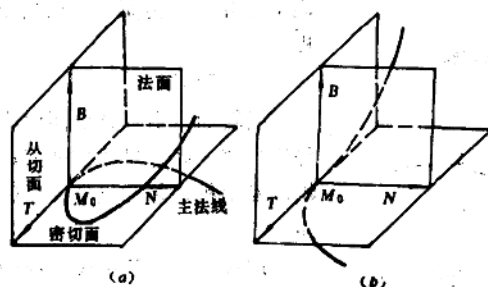


图 1-13 挠率的正负号规定

### (3) 挠率的计算公式

挠率  $K$  的基本公式:

$$\dot{\mathbf{B}} = -KN$$

$$K = -\dot{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{N} \quad (1-36)$$

$$\dot{\mathbf{N}} = -k\mathbf{T} + K\mathbf{B}$$

$$K = \dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{B} + k\mathbf{T} \cdot \mathbf{B} = \dot{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{B} \quad (1-37)$$

当曲线用自然参数方程表示时

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N}$$

$$\mathbf{T} = \dot{\mathbf{r}}(s)$$

$$\begin{aligned} N &= \ddot{\mathbf{r}}(s)/k \\ \dot{N} &= \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{k} + \ddot{\mathbf{r}}(s) \frac{d(1/k)}{ds} \end{aligned}$$

将上四式代入 (1-37) 式, 得

$$\begin{aligned} K(s) &= \left[ \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{k} + \ddot{\mathbf{r}}(s) \frac{d(1/k)}{ds} \right] \cdot \left[ \dot{\mathbf{r}}(s) \times \frac{\ddot{\mathbf{r}}(s)}{k} \right] \\ &= \frac{1}{k^2} \ddot{\mathbf{r}}(s) \cdot [\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)] = (\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) / [\ddot{\mathbf{r}}(s)]^2 \end{aligned} \quad (1-38)$$

当曲线用一般参数方程表示时

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(s) &= \mathbf{r}'(t) \cdot dt/ds \\ [\dot{\mathbf{r}}(s) \times \ddot{\mathbf{r}}(s)] \cdot \ddot{\mathbf{r}}(s) &= [\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)] \cdot \mathbf{r}'''(t) (dt/ds)^6 \\ [\dot{\mathbf{r}}(s)]^2 &= |\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|^2 / |\mathbf{r}'(t)|^6 \\ (dt/ds) &= 1/|\mathbf{r}'(t)| \end{aligned}$$

将以上诸式代入 (1-38) 式, 得

$$K(t) = \frac{(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))}{(\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t))^2} \quad (1-39)$$

## 六、曲面的矢量方程和参数方程

在飞机外形设计中, 应用的曲面主要是回转面、直纹面和自由型复杂曲面。直纹面应用于翼面类部件, 将在以后专门章节讨论。这里我们主要介绍回转面和复杂曲面的矢量方程和参数方程。

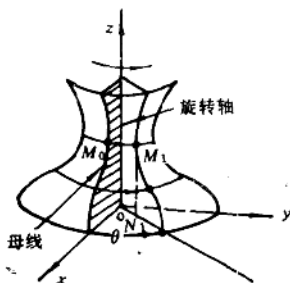


图 1-14 回转面的生成

### 1. 回转面

回转面是由一条平面曲线 (数学上称为母线或经线) 绕一固定轴线旋转而成的曲面, 飞机上的桨帽、发动机短舱和机身前后段等经常就选用这类曲面。

现求回转面的矢量方程和参数方程 (见图 1-14)。

#### (1) 母线方程

$$\overrightarrow{oM_0} = [x_0(t), 0, z_0(t)]$$

是单参数  $t$  的曲线。

#### (2) 空间 $M_1$ 点的矢量方程

$$\overrightarrow{oM_1} = \overrightarrow{oN_1} + \overrightarrow{N_1M_1} = [x_0 \cos \theta, x_0 \sin \theta, z_0]$$

是单参数  $\theta$  的曲线。式中,  $x_0$  是  $M_1$  点在  $xoy$  平面上的投影点  $N_1$  与原点  $O$  连线  $ON_1$  的长度。 $z_0$  是  $M_1$  点的  $z$  坐标尺寸。

#### (3) 回转面的矢量方程

$$\mathbf{r}(t, \theta) = [x_0(t) \cos \theta, x_0(t) \sin \theta, z_0(t)]$$

回转面的参数方程