

应用弹性理论

王启德著

机械工业出版社

520
128

应用弹性理论

王 启 德 著



机 械 工 业 出 版 社

本书介绍了弹性理论的基本问题，弹性稳定问题与板、壳及其稳定问题；并且结合工程实际需要，用较大的篇幅介绍了解决弹性理论问题中最有成效的解析法（能量法、变分法及复变数法）和数值法（有限差分近似法及松弛法），其中对数值法介绍得尤为详细。每章都附有习题及解答，可供自学者参考。

本书可供广大的工程技术人员及研究人员阅读，也可供高等学校有关专业师生参考。

本书由林砚田、连志升等译出。

CHI-TEH WANG
APPLIED ELASTICITY
McGRAW-HILL PUBLISHING COMPANY LTD 1953

(根据美国McGRAW-HILL公司一九五三年版译出)

* * *

应用弹性理论

王启德著

*

机械工业出版社出版 (北京阜成门外南礼士路北口)

(北京市书刊出版业营业登记证出字第117号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行，各地新华书店经售

*

开本 $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ · 印张 $13 \frac{10}{16}$ · 字数 336 千字

1966年6月北京第一版 · 1966年6月北京第一次印刷

印数 0,001—4,300 · 定价(科六) 2.20 元

*

统一书号: 15033 · 3700

毛主席語录

对于外国文化，排外主义的方針是錯誤的，应当尽量吸收进步的外国文化，以为发展中国新文化的借鏡；盲目搬用的方針也是錯誤的，应当以中国人民的实际需要为基础，批判地吸收外国文化。

《论联合政府》

学习有两种态度。一种是教条主义的态度，不管我国情况，适用的和不适用的，一起搬来。这种态度不好。另一种态度，学习的时候用脑筋想一下，学那些和我国情况相适合的东西，即吸取对我们有益的經驗，我們需要的是这样一种态度。

《关于正确处理人民内部矛盾的问题》

原 序

在过去七年中，作者一直在紐約大学为工科毕业班学生讲授彈性理論課程。本书就是根据当时的讲义整理而成的。在起草这些讲义时，作者抱有两个目的：第一，应当給学生以必要的基本理論知識，使他們对古典彈性理論範圍內的一些問題，能够用公式表达出来。第二，必須使他們通曉最有效的解析法和数值法，以便当問題用公式表达之后，学生就能够利用其中的某一种方法去求解。

作者考虑到，学生在学习彈性理論的同时，往往还正在学习高等数学分析。所以，本书的内容仅使用了一定水平的数学工具，而假定讀者只具备比較簡單的数学知識。当用到一些較高深的数学知識时，我們都在初次遇到的地方加以推演。作者希望，这种数学上的限制不致过分損害理論的严格性。

本书主要对象是工程技术人員，因此，作者尽可能地闡明問題中各記号和数学关系式的物理意义；因为工程技术人員（特别是在强度計算方面的）的任务是要在較短的時間內提供設計上必要的知識和計算上所需要的数据，所以，书中对几个最有效的数值解法作了詳細的討論。每当用其他方法难于求出精确解时，采用数值解法，一般总能为工程应用給出足够精确的近似解。

王启德
(C. T. Wang)

符 号

- α ——角, 綫膨胀系数, 数字因子
 β ——角, 数字因子
 γ ——剪应变
 $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ ——直角坐标系中的剪应变
 $\gamma_{rr}, \gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}$ ——圆柱坐标系中的剪应变
 Δ ——差分
 δ ——公盈
 ϵ ——綫应变
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ ——直角坐标系中的綫应变
 $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z$ ——圆柱坐标系中的綫应变
 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ——主应变
 ζ ——复变数, 复数平面
 Θ ——正应力和
 θ ——角, 单位长度扭角
 ν ——数字因子, 曲率
 λ ——拉梅常数
 μ ——拉梅常数, 数字因子
 ν ——泊松比
 ξ_1, ξ_2 ——曲线坐标
 Π ——位能
 Π^* ——余能
 ρ ——密度
 σ ——正应力
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ ——直角坐标系中的正应力
 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ ——圆柱坐标系中的正应力
 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ——主应力

- σ_{cr} ——临界应力
 τ ——剪应力
 $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$ ——直角坐标系中的剪应力
 $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta r}, \tau_{\theta z}$ ——圆柱坐标系中的剪应力
 ϕ ——翘曲函数, 角
 φ ——角
 κ_1, κ_2 ——壳体中面曲率变化
 κ_{12} ——壳体中面扭率变化
 Ψ ——应力函数
 ω ——角速度
 A ——面积
 a, b, c, d, e, f ——常数
 C ——常数
 D ——平板的抗弯刚度
 d ——直径
 E ——杨氏弹性模数
 E, F, G ——曲面第一二次式系数
 e ——线应变和, 体积膨胀, 误差
 F ——力
 F_x, F_y, F_z ——力 F 沿 x, y, z 方向分量
 F_r, F_θ ——力 F 沿 r, θ 方向分量
 G ——剪切弹性模数
 h ——厚度
 I ——截面惯性矩
 I_x, I_y ——截面对 x, y 轴的惯性矩
 I_p ——极惯性矩
 J ——扭转常数
 K ——留数
 L ——长度
 L, M, N ——曲面第二二次式系数

- l, m, n —— 方向余弦
 M —— 力矩
 M_r, M_t, M_x, M_y —— 弯矩
 M_{rt}, M_{xy} —— 扭矩
 N —— 法綫, 軸向力
 N_x, N_y, N_{xy} —— 作用在平板中面內的力
 P —— 集中力
 P_x, P_y —— 集中力 P 沿 x, y 方向分量
 P_{cr} —— 临界載荷
 p —— 压力, 流体靜压力, 均匀分布載荷
 Q —— 余数, 集中力
 Q_x, Q_y —— 平行于 x, y 軸的剪力
 R —— 曲率半徑, 域, 球体半徑
 r, θ, z —— 圓柱坐标系
 r —— 半徑
 S —— 应力, 边界綫
 T —— 温度, 扭矩
 t —— 厚度
 U —— 应变能
 u, v, w —— 沿 x, y, z 方向位移
 V —— 体积, 垂直力
 W —— 位能
 w —— 撓度
 X, Y, Z —— 体积力沿 x, y, z 方向分量
 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ —— 表面力沿 x, y, z 方向分量
 x, y, z —— 直角坐标系
 z —— 复变数, 复数平面

目 录

原序

符号

第一章 应力分析	1
§ 1.1 应力的定义和記号	1
§ 1.2 平衡微分方程式	3
§ 1.3 一点的应力状态的研究	8
§ 1.4 主应力和莫尔圓	11
§ 1.5 用已知表面力表示的边界条件	16
第二章 应变分析	18
§ 2.1 应变分量	18
§ 2.2 一点的应变状态的研究	20
§ 2.3 諧調方程式	24
第三章 应力-应变关系和彈性理論的一般方程式	27
§ 3.1 工程材料的理想化	27
§ 3.2 广义虎克定律	28
§ 3.3 用工程彈性常数表示的广义虎克定律	33
§ 3.4 彈性理論問題的提法	36
§ 3.5 应变能	39
§ 3.6 解的存在和唯一性	44
§ 3.7 圣維南原理	47
第四章 平面应力和平面应变問題	48
§ 4.1 基本微分方程式	48
§ 4.2 端载荷作用下狹矩形截面悬臂梁的弯曲	52
§ 4.3 圓柱座标系中的一般方程式	58
§ 4.4 受均匀压力作用的厚壁圓筒。热压配合和压入配合	63
§ 4.5 受力平板中小圓孔的影响。应力集中	68

08737

§ 4.6	旋轉圓盤和圓柱體中的應力	73
§ 4.7	變厚度旋轉圓盤	78
§ 4.8	長圓柱體和薄圓盤中的溫度應力	81
第五章	各種不同截面形狀杆的扭轉	89
§ 5.1	稜柱杆的扭轉	89
§ 5.2	圓截面杆和橢圓截面杆的扭轉	94
§ 5.3	矩形截面杆的扭轉	99
§ 5.4	薄膜比擬	105
§ 5.5	開口薄壁截面杆的扭轉	111
§ 5.6	薄壁管的扭轉	113
§ 5.7	變直徑圓軸的扭轉	119
第六章	有限差分近似法和松弛法	123
§ 6.1	有限差分	123
§ 6.2	有限差分方程式	127
§ 6.3	有限差分方程式的解	129
§ 6.4	松弛法	134
§ 6.5	整塊松弛法和對稱綫	138
§ 6.6	高階有限差分近似法	143
§ 6.7	外推法	152
§ 6.8	曲綫邊界和網格間距的變化	162
§ 6.9	其他的邊界條件	165
第七章	能量原理和變分法	169
§ 7.1	位能原理	169
§ 7.2	余能原理	174
§ 7.3	將位能原理和余能原理看作為變分原理	177
§ 7.4	瑞利-里茲法	184
§ 7.5	加辽金法	191
§ 7.6	毕采諾-科奇法	195
§ 7.7	互易定理和卡斯提安諾定理	198
第八章	復變數解法	203

§ 8.1	复变数和复变函数	203
§ 8.2	复变数理論的几个基本关系式	206
§ 8.3	棱柱杆的扭轉	212
§ 8.4	橢圓截面杆的扭轉	219
§ 8.5	平面应力和平面应变問題	223
§ 8.6	用极坐标解平面应力和平面应变問題	229
§ 8.7	有圓孔的无限大平板的一般解	230
§ 8.8	在集中力和力矩作用下的无限大平板	236
§ 8.9	边界上承受任意載荷的圓板	238
§ 8.10	环形圓板	241
§ 8.11	在簡單拉伸作用下帶有橢圓孔的平板。保角变換法	246
第九章	杆件的弯曲和压縮。彈性稳定性	252
§ 9.1	棱柱杆的純弯曲	252
§ 9.2	棱柱杆的弯曲与压縮联合作用	258
§ 9.3	軸向压縮下的棱柱杆。彈性稳定性	261
§ 9.4	等截面柱的屈曲載荷	268
§ 9.5	框架的屈曲。两端为彈性支承的柱	274
§ 9.6	变截面柱的屈曲	276
§ 9.7	真实柱的破坏	279
§ 9.8	狹矩形截面梁的側向屈曲	283
第十章	确定屈曲載荷的数值解法	287
§ 10.1	有限差分近似法	287
§ 10.2	松弛法	295
§ 10.3	高阶有限差分近似法	297
§ 10.4	外推法	299
§ 10.5	能量法	306
§ 10.6	由位能原理推导瑞利公式	316
§ 10.7	用能量法計算屈曲載荷时的誤差	322
§ 10.8	变截面柱屈曲載荷下限的确定	327
第十一章	薄板的弯曲和屈曲	333

§ 11.1	薄板弯曲的微分方程式	333
§ 11.2	边界条件	338
§ 11.3	简支矩形板的弯曲	340
§ 11.4	固定边矩形板的弯曲。瑞利-里兹法	345
§ 11.5	圆板的弯曲	351
§ 11.6	矩形板的拉弯联合作用	356
§ 11.7	单向均匀受压简支矩形板的屈曲	361
§ 11.8	在两个垂直方向受压简支正方形板的屈曲。有限差分近似法	363
§ 11.9	在剪力作用下简支矩形板的屈曲。能量法	366
第十二章	薄壳和曲板理论	373
§ 12.1	曲面的一些微分几何知识	373
§ 12.2	平衡方程式	387
§ 12.3	旋转壳体的薄膜理论	392
§ 12.4	圆柱壳体的薄膜理论	399
§ 12.5	应变分量的确定	402
§ 12.6	圆柱壳体的一般理论	408
§ 12.7	在轴对称载荷作用下的圆柱壳体	411
§ 12.8	在非对称载荷作用下的圆柱壳体	416
§ 12.9	受均匀轴向压缩圆柱壳体的屈曲	420
人名对照		424

第一章 应力分析

§ 1.1 应力的定义和記号

当物体受到外力作用时，其形状和大小即发生改变，且外力的作用傳遍整个物体。如果在物体中切取一微小面积，則力的作用就通过該微面积，从物体的这部分傳到物体的那一部分上去。我們用单位面积上的內力来表示应力。并設材料的組織是連續的。因此，在任一点处的某一微小面积 ΔA 上的应力，就可用下列的极限式来定义：

$$\text{应力} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

式中 ΔF 是作用在該点周圍微小面积 ΔA 上的內力。关于材料的連續性假設的合理性，将在以后加以討論。

通过一个給定点，可以作出无限多个平面。例如，我們来研究受簡單拉伸的杆件。在图 1.1 中，通过 P 点可以作出这样的两个平面。虽然作用在这两个平面上的合力相等，但在这两个平面上的应力是并不相等的。其原因是：这两个平面的面积和倾角都彼此不同。所以，为了完全描述应力，我們不仅要知其大小、方向，而且也要知其作用面。因此，应将应力理解成張量，因为它不仅与确定一个向量所必需的大小、方向有关，而且还与表征其作用面的向量有关。在任意选择的直角坐标系中，一个力可由其在各軸上的分量完全确定。表示这些分量的一个最好办法，就是在字母 F 旁边加上一个下标，即： F_x, F_y, F_z 相应地表示該力在 x, y, z



图 1.1

轴上的分量。但是,这种记号并不足以完全描述应力,为了完全确定应力,尚须指出应力所作用的面。因此,我们引入第二个下标,它们相应地表示截面的法线方向。例如,与 yz 平面平行的平面的法线方向为 x 轴的方向,因而,我们可用 x 来表示 yz 平面。作用在截面上某一点的应力可以分解成两个分量:垂直于该面的正应力和作用在该面内的剪应力。我们用字母 σ 表示正应力,用 τ 表示剪应力。对正应力分量而言,其方向已确定了,因而,仅需要一个下标来表示其作用面就够了。至于剪应力分量,可再把它沿其作用面的两个座标轴方向分解成两个分量,因此,表示剪应力就需要两个下标。其中,第一个表示其作用面,而第二个则表示其作用方向。举例来说,按照这种记号,作用在 yz 平面上的三个应力分量将用 σ_x 、 τ_{xy} 、 τ_{xz} 来表示。通过弹性体中的一点总可作出三个互相垂直的座标平面,所以,我们总共可得到九个应力分量。其余各应力分量的记号如图 1.2 所示。

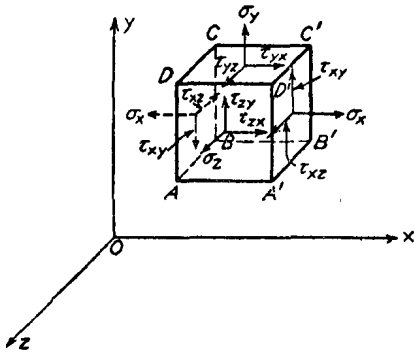


图 1.2

今后,我们将采用如下的符号规则:如果正应力是拉应力则为正值,即正应力的方向是背离其作用面的;如果是朝向作用面,则为压应力,并规定为负值。因为拉应力背离其作用面,所以如图 1.2 中的 $A'B'C'D'$ 表面,由于作用在其上的正应力的方向与座标轴的方向一致,故该正应力认为是正的;而在 $ABCD$ 表面,只有当作用在其上的正应力的方向与其座标轴方向相反时,才能算是正的。由此,我们可规定剪应力的符号如下:在某一表面上,例如在 $A'B'C'D'$ 表面上的拉应力方向与座标轴方向相同,若其

剪应力方向也与另两根坐标轴方向相同，则将此两个剪应力规定为正的。如果拉应力方向与坐标轴方向相反，则正的剪应力方向也应与其他两根坐标轴的方向相反。根据这个规则，图 1.2 中作用在立方单元体的右面、前面和顶面上的应力分量，其正向均与坐标轴的正向一致；而作用于单元体的左面、背面和底面上的应力分量，其正向均与坐标轴的正向相反。

§ 1.2 平衡微分方程式

当物体在外力作用下保持静止或等速直线运动时，则称此物体处于平衡状态。一般来说，作用在物体上的外力可分为两类：表面力和体积力。分布在物体表面上的力，例如流体静压力，称为表面力。分布在物体体积中的力，例如重力和离心力，称为体积力。表面力是就单位面积上的力而言的；而体积力是就单位体积上的力而言的。为了区别这两类力，我们用 \bar{x} 、 \bar{y} 、 \bar{z} 表示表面力在 x 、 y 、 z 方向上的分量；而用 X 、 Y 、 Z 表示体积力在 x 、 y 、 z 方向上的分量。

在推导平衡方程式之前，先来说明作用在无穷小单元体不同表面上应力分量的写法。取长度为 1 个单位、面积为 $dx dy$ 的一个单元体。一般来说，物体中的应力是逐点变化的。现在，考虑一种简单情况：单元体仅在 x 方向承受拉应力（图 1.3 a）。用 σ_x 表示 A 点的应力。因为 dx 是一无穷小的线素，所以，可以把 B 点

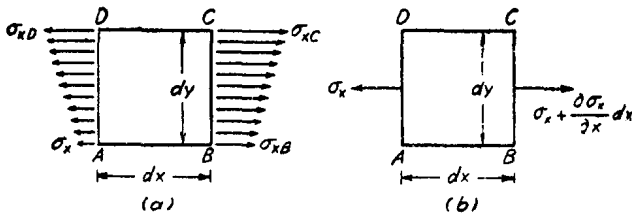


图 1.3

的应力 σ_{xB} 写成 σ_x 与由 A 点到 B 点的应力微小增量之和。按微分学中熟知的法则可知，这一微小增量可用线段 AB 的长度乘以 σ_x 对 x 的变化率来表示，即

$$\sigma_{xB} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \quad (1.1)$$

对式 (1.1) 来说，因为 σ_x 不仅随 x 而变化，同时也随 y 而变化，所以我们利用了偏导数的记号。同理， D 点和 C 点的应力可写为：

$$\sigma_{xD} = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xC} &= \sigma_{xB} + \frac{\partial \sigma_{xB}}{\partial y} dy \\ &= \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \\ &= \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy \end{aligned} \quad (1.3)$$

因为 dx 和 dy 都是无穷小量，所以，它们的平方或相乘积比起其自身的大小来说，是更加微小，因此，在式 (1.3) 中， $(\partial^2 \sigma_x / \partial x \partial y) dx dy$ 一项就被略去了，因为它较之 $(\partial \sigma_x / \partial x) dx$ 或 $(\partial \sigma_x / \partial y) dy$ 小得很多。包含高阶微量的各项称为高阶项，它们在含有较低阶微量的项中可以忽略不计。

方程式 (1.1)、(1.2)、(1.3) 诸式也可以用微分学中的泰勒展开式来解释。考虑一个任意函数 $f(x, y)$ 。设此函数在点 $x = x_0$ 、 $y = y_0$ 处的值为 $f(x_0, y_0)$ 或 f_0 。则把 $f(x_0 + dx, y_0 + dy)$ 展为泰勒级数时，我们求得在点 $x = x_0 + dx$ 、 $y = y_0 + dy$ 处的函数值为：

$$\begin{aligned} f(x_0 + dx, y_0 + dy) &= f_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_0 dx^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_0 dy^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_0 dx dy + \dots \end{aligned}$$

式中 $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0$ 、 $\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0$ 等表示在 x_0 、 y_0 处的一阶偏导数。若设 $f(x, y) = \sigma_x$ ， $dy = 0$ 并略去高阶项，我们便得到方程式 (1.1)。同样地，令 $dx = 0$ 并略去高阶项，则可得到方程式 (1.2)。保留

dx 和 dy , 并略去高阶项, 则可得方程式 (1.3)。

当略去高阶微量时, 我们发现, 作用在 AD 和 BC 面上的应力是按线性规律分布的, 因而, 作用在 AD 面上的力等于:

$$F_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma_x + \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy \right) dy = \sigma_x dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy^2$$

同理, 作用在 BC 面上的力等于:

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{2} \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy \right) dy \\ &= \sigma_x dy + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} dy^2 \end{aligned}$$

所以, 作用在单元体 $ABCD$ 上的合力为

$$\Sigma F = F_2 - F_1 = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy$$

如果假设作用在 AD 面上的平均应力为 σ_x , 且作用在该面的中心上, 则作用在 BC 面上的平均应力将为 $\sigma_x + (\partial \sigma_x / \partial x) dx$ 。就合力而言, 后一种应力分布状态和前一种状态所给出的结果完全相同。平衡方程式的推导主要是根据这些合力。因此, 在推导平衡方程式的时候, 我们可以考虑用简化了的后一种应力分布状态来代替较为复杂的前一种应力分布状态。

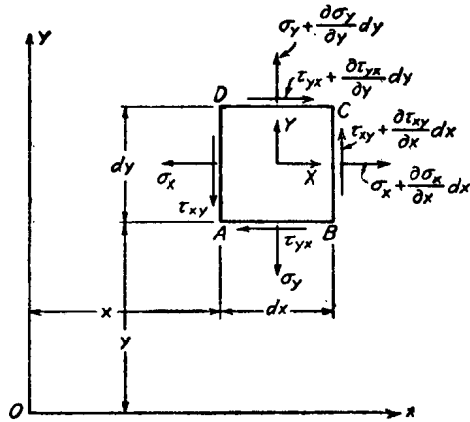


图 1.4

图 1.4 为按照上述简化方式表示承受一般正的二维应力系作用的同一个单元体, 体积力也已同时表示在单元体上。所谓二维应力系, 可以理解成这样一种情况: 即 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 和 τ_{yx} 都与 z