应用弹性理论

王启德 著

机械工业出版社

应用弹性理论

王启德 著

机械工业出版社

本书介紹了彈性理論的基本問題，彈性稳定問題与板、壳及其稳定問題；并且結合工程实际需要，用較大的篇幅介紹了解决彈性理論問題中最有成效的解析法（能量法、变分法及复变数法）和数値法（有限差分近似法及松弛法），其中对数値法介紹得尤为詳細。每章都附有习題及解答，可供自学者参考。

本书可供广大的工程技术人員及研究人員閱讀，也可供高等学校有关专业师生参考。

本书由林硯田、連志升等譯出。

CHI-TEH WANG

APPLIED ELASTICITY

McGRAW-HILL PUBLISHING COMPANY LTD 1953

（根据美国McGRAW-HILL公司一九五三年版譯出）

* * *

应用弹性理论

王启德著

*

机械工业出版社出版（北京阜成門外南礼士路北口）

（北京市书刊出版业营业許可証出字第117号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本 850×1168 1/32 · 印張 13 10/16 · 字数 336 千字

1966年6月北京第一版 · 1966年6月北京第一次印刷

印数 0,001— 4,300 · 定价(科六) 2.20 元

*

統一书号：15033 · 3700

毛主席語录

对于外国文化，排外主义的方针是错誤的，应当尽量吸收进步的外国文化，以为发展中国新文化的借鏡；盲目搬用的方针也是错誤的，应当以中国人民的实际需要为基础，批判地吸收外国文化。

《论联合政府》

学习有两种态度。一种是教条主义的态度，不管我国情况，适用的和不适用的，一起搬来。这种态度不好。另一种态度，学习的时候用脑筋想一下，学那些和我国情况相适合的东西，即吸取对我們有益的經驗，我們需要的是这样一种态度。

《关于正确处理人民内部矛盾的问题》

原　　序

在过去七年中，作者一直在紐約大学为工科毕业班学生讲授彈性理論課程。本书就是根据当时的讲义整理而成的。在起草这些讲义时，作者抱有两个目的：第一，应当給学生以必要的基本理論知識，使他們对古典彈性理論范圍內的一些問題，能够用公式表达出来。第二，必須使他們通曉最有效的解析法和数值法，以便当問題用公式表达之后，学生就能够利用其中的某一种方法去求解。

作者考虑到，学生在学习彈性理論的同时，往往还正在学习高等数学分析。所以，本书的內容仅使用了一定水平的数学工具，而假定讀者只具备比較簡单的数学知識。当用到一些較高深的数学知識时，我們都在初次遇到的地方加以推演。作者希望，这种数学上的限制不致过分損害理論的严格性。

本书主要对象是工程技术人員，因此，作者尽可能地闡明問題中各記号和数学关系式的物理意义；因为工程技术人員（特别是在强度計算方面的）的任务是要在較短的时間內提供設計上必要的知識和計算上所需要的数据，所以，书中对几个最有效的数值解法作了詳細的討論。每当用其他方法难于求出精确解时，采用数值解法，一般总能为工程应用給出足够精确的近似解。

王启德

(C. T. Wang)

符　号

α——角，綫膨脹系数，数字因子

β——角，数字因子

γ——剪应变

γ_{xy}，γ_{yz}，γ_{zx}——直角座标系中的剪应变

γ_{zr}，$\gamma_{r\theta}$、$\gamma_{\theta z}$——圓柱座标系中的剪应变

Δ——差分

δ——公盈

ε——綫应变

ε_x，ε_y，ε_z——直角座标系中的綫应变

ε_r，ε_θ，ε_z——圓柱座标系中的綫应变

ε_1，ε_2，ε_3——主应变

ζ——复变数，复数平面

Θ——正应力和

θ——角，单位长度扭角

$\varkappa$——数字因子，曲率

λ——拉梅常数

μ——拉梅常数，数字因子

ν——泊松比

ξ_1，ξ_2——曲綫座标

Π——位能

Π^*——余能

ρ——密度

σ——正应力

σ_x，σ_y，σ_z——直角座标系中的正应力

σ_r，σ_θ，σ_z——圓柱座标系中的正应力

σ_1，σ_2，σ_3——主应力

σ_{cr}——临界应力

τ——剪应力

τ_{xy}，τ_{yz}，τ_{zx}——直角座标系中的剪应力

τ_{zr}，$\tau_{r\theta}$，$\tau_{\theta z}$——圓柱座标系中的剪应力

ϕ——翘曲函数，角

φ——角

$\varkappa_1$，$\varkappa_2$——壳体中面曲率变化

$\varkappa_{12}$——壳体中面扭率变化

ψ——应力函数

ω——角速度

A——面积

a，b，c，d，e，f——常数

C——常数

D——平板的抗弯剛度

d——直徑

E——楊氏彈性模数

E，F，G——曲面第一二次式系数

e——綫应变和，体积膨脹，誤差

F——力

F_x，F_y，F_z——力 F 沿 x，y，z 方向分量

F_r，F_θ——力 F 沿 r，θ 方向分量

G——剪切彈性模数

h——厚度

I——截面慣性矩

I_x，I_y——截面对 x，y 軸的慣性矩

I_p——极慣性矩

J——扭轉常数

K——留数

L——长度

L，M，N——曲面第二二次式系数

l, m, n——方向余弦

M——力矩

M_r，M_t，M_x，M_y——弯矩

M_{rt}，M_{xy}——扭矩

N——法綫，軸向力

N_x，N_y，N_{xy}——作用在平板中面內的力

P——集中力

P_x，P_y——集中力P沿x，y方向分量

P_{cr}——临界載荷

p——压力，流体靜压力，均匀分布載荷

Q——余数，集中力

Q_x，Q_y——平行于x，y軸的剪力

R——曲率半徑，域，球体半徑

r, θ, z——圓柱座标系

r——半徑

S——应力，边界綫

T——溫度，扭矩

t——厚度

U——应变能

u, v, w——沿x，y，z方向位移

V——体积，垂直力

W——位能

w——撓度

X，Y，Z——体积力沿x，y，z方向分量

$\bar{X}$，$\bar{Y}$，$\bar{Z}$——表面力沿x，y，z方向分量

x，y，z——直角座标系

z——复变数，复数平面

目　录

第一章　应力分析

§1.1　应力的定义和記号

当物体受到外力作用时，其形状和大小即发生改变，且外力的作用傳遍整个物体。如果在物体中切取一微小面积，則力的作用就通过該微面积，从物体的这部分傳到物体的那一部分上去。我們用单位面积上的內力来表示应力。幷設材料的組織是連續的。因此，在任一点处的某一微小面积 ΔA 上的应力，就可用下列的极限式来定义：

$$\text{应力}=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta A}$$

式中　ΔF 是作用在該点周圍微小面积 ΔA 上的內力。关于材料的連續性假設的合理性，将在以后加以討論。

通过一个給定点，可以作出无限多个平面。例如，我們来研究受簡单拉伸的杆件。在图 1.1 中，通过 P 点可以作出这样的两个平面。虽然作用在这两个平面上的合力相等，但在这两个平面上的应力是幷不相等的。其原因是：这两个平面的面积和傾角都彼此不同。所以，为了完全描述应力，我們不仅要知道其大小、方向，而且也要知道其作用面。因此，应将应力理解成張量，因为它不仅与确定一个向量所必需的大小、方向有关，而且还与表征其作用面的向量有关。在任意选擇的直角座标系中，一个力可由其在各軸上的分量完全确定。表示这些分量的一个最好办法，就是在字母 F 旁边加上一个下标，即：F_x、F_y、F_z 相应地表示該力在 x、y、z

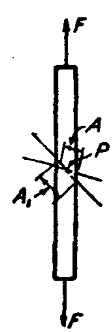

图　1.1

軸上的分量。但是，这种記号幷不足以完全描述应力，为了完全确定应力，尚須指出应力所作用的面。因此，我們引入第二个下标，它們相应地表示截面的法綫方向。例如，与 yz 平面平行的平面的法綫方向为 x 軸的方向，因而，我們可用 x 来表示 yz 平面。作用在截面上某一点的应力可以分解成两个分量：垂直于該面的正应力和作用在該面內的剪应力。我們用字母 σ 表示正应力，用 τ 表示剪应力。对正应力分量而言，其方向已确定了，因而，仅需要一个下标来表示其作用面就够了。至于剪应力分量，可再把它沿其作用面的两个座标軸方向分解成两个分量，因此，表示剪应力就需要两个下标。其中，第一个表示其作用面，而第二个则表示其作用方向。举例来說，按照这种記号，作用在 yz 平面上的三个应力分量将用 σ_x、τ_{xy}、τ_{xz} 来表示。通过彈性体中的一点总可作出三个互相垂直的座标平面，所以，我們总共可得到九个应力分量。其余各应力分量的記号如图 1.2 所示。

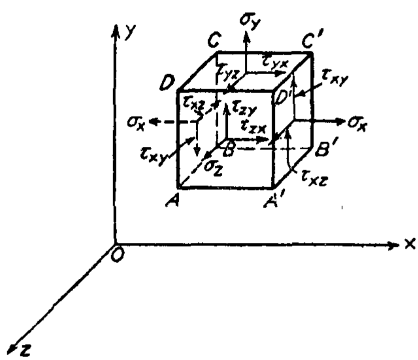

图 1.2

今后，我們将采用如下的符号規則：如果正应力是拉应力则为正值，即正应力的方向是背离其作用面的；如果是朝向作用面，則为压应力，幷規定为負值。因为拉应力背离其作用面，所以如图 1.2 中的 $A'B'C'D'$ 表面，由于作用在其上的正应力的方向与座标軸的方向一致，故該正应力认为是正的；而在 $ABCD$ 表面，只有当作用在其上的正应力的方向与其座标軸方向相反时，才能算是正的。由此，我們可規定剪应力的符号如下：在某一表面上，例如在 $A'B'C'D'$ 表面上的拉应力方向与座标軸方向相同，若其

剪应力方向也与另两根座标軸方向相同，则将此两个剪应力規定为正的。如果拉应力方向与座标軸方向相反，則正的剪应力方向也应与其他两根座标軸的方向相反。根据这个規則，图 1.2 中作用在立方单元体的右面、前面和頂面上的应力分量，其正向均与座标軸的正向一致；而作用于单元体的左面、背面和底面上的应力分量，其正向均与座标軸的正向相反。

§1.2 平衡微分方程式

当物体在外力作用下保持靜止或等速直綫运动时，則称此物体处于平衡状态。一般来說，作用在物体上的外力可分为两类：表面力和体积力。分布在物体表面上的力，例如流体靜压力，称为表面力。分布在物体体积中的力，例如重力和离心力，称为体积力。表面力是就单位面积上的力而言的；而体积力是就单位体积上的力而言的。为了区别这两类力，我們用 $\bar{X}$、$\bar{Y}$、$\bar{Z}$ 表示表面力在 x、y、z 方向上的分量；而用 X、Y、Z 表示体积力在 x、y、z 方向上的分量。

在推导平衡方程式之前，先来說明作用在无穷小单元体不同表面上应力分量的写法。取长度为 1 个单位、面积为 $dxdy$ 的一个单元体。一般說来，物体中的应力是逐点变化的。現在，考虑一种簡单的情况：单元体仅在 x 方向承受拉应力（图 1.3 a）。用 σ_x 表示 A 点的应力。因为 dx 是一无穷小的綫素，所以，可以把 B 点

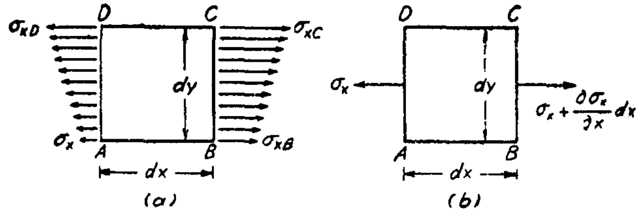

图 1.3

的应力 σ_{xB} 写成 σ_x 与由 A 点到 B 点的应力微小增量之和。按微分学中熟知的法则可知，这一微小增量可用綫段 AB 的长度乘以 σ_x 对 x 的变化率来表示，即

$$\sigma_{xB}=\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx \tag{1.1}$$

对式（1.1）来說，因为 σ_x 不仅随 x 而变化，同时也随 y 而变化，所以我們利用了偏导数的記号。同理，D 点和 C 点的应力可写为：

$$\sigma_{xD}=\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xC}&=\sigma_{xB}+\frac{\partial\sigma_{xB}}{\partial y}dy\\&=\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dy\\&=\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx+\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy\end{aligned} \tag{1.3}$$

因为 dx 和 dy 都是无穷小量，所以，它們的平方或相乘积比起其自身的大小来說，是更加微小，因此，在式(1.3) 中，$(\partial^2\sigma_x/\partial x\partial y)dxdy$ 一項就被略去了，因为它較之 $(\partial\sigma_x/\partial x)dx$ 或 $(\partial\sigma_x/\partial y)dy$ 小得很多。包含高阶微量的各項称为高阶項，它們在含有較低阶微量的項中可以忽略不計。

方程式（1.1）、（1.2）、(1.3) 諸式也可以用微分学中的泰勒展开式来解釋。考虑一个任意函数 $f(x, y)$。設此函数在点 $x=x_0$、$y=y_0$ 处的値为 $f(x_0, y_0)$ 或 f_0。則把 $f(x_0+dx,\ y_0+dy)$ 展为泰勒級数时，我們求得在点 $x=x_0+dx$、$y=y_0+dy$ 处的函数値为：

$$f\,(x_0+dx, y_0+dy)=f_0+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 dx+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 dy+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_0 dx^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_0 dy^2+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)_0 dxdy+\cdots$$

式中 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$、$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$ 等表示在 x_0、y_0 处的一阶偏导数。若設 $f(x, y)=\sigma_x$，$dy=0$ 并略去高阶項，我們便得到方程式(1.1)。同样地，令 $dx=0$ 并略去高阶項，則可得到方程式（1.2)。保留

dx 和 dy，并略去高阶项，则可得方程式（1.3）。

当略去高阶微量时，我們发現，作用在 AD 和 BC 面上的应力是按綫性規律分布的，因而，作用在 AD 面上的力等于：

$$F_1=\frac{1}{2}\left(\sigma_x+\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy\right)dy=\sigma_x dy+\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy^2$$

同理，作用在 BC 面上的力等于：

$$F_2=\frac{1}{2}\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx+\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx+\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy\right)dy$$

$$=\sigma_x dy+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\,dy+\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}dy^2$$

所以，作用在单元体 $ABCD$ 上的合力为

$$\Sigma F=F_2-F_1=\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\,dy$$

如果假設作用在 AD 面上的平均应力为 σ_x，且作用在該面的中心上，則作用在 BC 面上的平均应力将为 $\sigma_x+(\partial\sigma_x/\partial x)dx$。就合力而言，后一种应力分布状态和前一种状态所給出的結果完全相同。平衡方程式的推导主要是根据这些合力。因此，在推导平衡方程式的时候，我們可以考虑用簡化了的后一种应力分布状态来代替較为复杂的前一种应力分布状态。

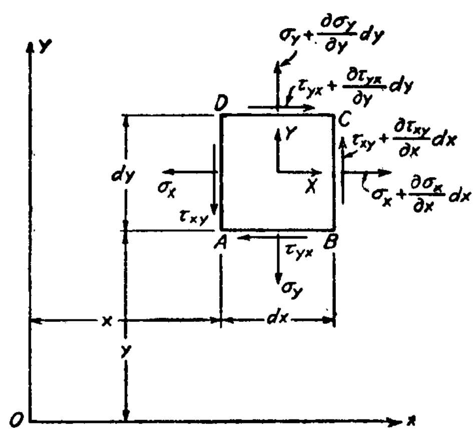

图　1.4

图 1.4 为按照上述簡化方式表示承受一般正的二維应力系作用的同一个单元体，体积力也已同时表示在单元体上。所謂二維应力系，可以理解成这样一种情况：即 σ_x、σ_y、τ_{xy} 和 τ_{yx} 都与 z