工程技术常用数学

F. S. 梅里特

丁 仁 陈三平 译

内 容 简 介

本书主要介绍数学概念与数学方法，内容叙述简明扼要，易于自学。全书共分十章，包括基础数学复习、应用微积分、复变函数基础以及概率与数理统计介紹。本书注重实用，其特点在于说明数学在工程实践中是怎么应用的。

F. S. Merritt
APPLIED MATHEMATICS IN
ENGINEERING PRACTICE
McGraw-Hill, 1970

工程技术常用数学

F. S. 梅里特

丁 仁 陈三平 译

科 学 出 版 社 出 版
北京朝阳门内大街137号
北 京 新 华 印 刷 厂 印 刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1976年12月第 一 版 开本：850×1168 1/32
1978年11月第二次印刷 印张：9 1/2
印数：83,301—284,230 字数：249,000

统一书号：13031 · 488
本社书号：724 · 13—1

定 价：0.92元

目　　录

第一章 微 分 学

微分学使确定变量瞬时变化率的方法得到了发展．例如，设有一架飞机用 5 小时飞行了某两城市间的 3200 公里，那末它的平均速度是 3200/5＝640 公里/小时．但假如现在重要的是想知道飞机的巡航速度[1]或飞机在两城中途时飞得有多快，平均速度便不是所求的答案了，因为飞行时间中包括起飞、上升及降落的时间．如果已知飞机在飞行中所在位置与时间的关系，我们就可借助微分学求得飞机在某一特定时刻或处于某一特定位置时的速度．

§ 1-1 函数的极限

我们来考察实变量 x 的函数 $f(x)$ 在 x 趋于一特定实数 a 时的变化情形．这里的 $f(x)$ 是任意函数，在 a 处它可以是连续的，也可以是不连续的，可以取得任一我们所赋予的值，也可以根本没有定义．然而，在 x 趋于 a 时，$f(x)$ 却可能有一个确定的值．如果这样的值满足下述定义，我们称之为 $f(x)$ 的极限：

当且仅当对任一正实数 ε，存在一正实数 δ，使得 $0<|x-a|<\delta$ 时 $f(x)$ 有定义且 $|f(x)-L|<\varepsilon$ (L 为常数)，称 x 趋于 a 时 $f(x)$ 收敛于极限 L．

“x 趋于 a”记为“$x\to a$”，极限记为

$$\lim_{x\to a}f(x)=L,$$

并读作“$f(x)$ 在 x 趋于 a 时的极限等于 L”．

例如，我们来求 $x\to 1$ 时 $\frac{1-x}{1-x^2}$ 的极限．$x=1$ 时分子分母都等于零，因而我们假定 $x\neq 1$，并将分子分母同除以 $(x-1)$：

---

1) 飞机在飞行中最省燃料时的速度叫做巡航速度．——译者注

$$\frac{1-x}{1-x^2}=\frac{1-x}{(1-x)(1+x)}=\frac{1}{1+x}.$$

现令 x 与 1 仅相差一个很小的量 δ，则 $\frac{1}{1+x}$ 与 $\frac{1}{2}$ 也仅相差一个很小的量 ε. 我们可以通过缩小 x 与 1 的差来缩小 $\frac{1}{1+x}$ 与 $\frac{1}{2}$ 的差，因此，

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x^2}=\frac{1}{2}.$$

某些函数在 x 无限增大 $(x\to\infty)$ 时也有确定的值. 如果这样的值满足下述定义，我们称之为 $f(x)$ 的极限：

当且仅当对任一正实数 ε，存在一正实数 N，使得 $x>N$ 时 $f(x)$ 有定义且 $|f(x)-L|<\varepsilon$，称 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 收敛于极限 L.

例如，我们来求 $x\to\infty$ 时 $\frac{6x^3-2x^2}{2x^3-3x+2}$ 的极限. 当 $x\to\infty$ 时，函数成为 $\frac{\infty}{\infty}$ 的形式. 但我们可将分子分母同除以 x^3，然后再来考察 $x\to\infty$ 时函数的变化情形：

$$\frac{6x^3-2x^2}{2x^3-3x+2}=\frac{6-2/x}{2-3/x^2+2/x^3}.$$

由此可以看出，x 值越大，$\frac{2}{x}$，$\frac{3}{x^2}$ 及 $\frac{2}{x^3}$ 便越小. 因此，在 x 是一个很大的数 N 时，函数值与 $\frac{6}{2}=3$ 仅相差一个很小的量. 令 x 大于 N，可使这个差变得更小，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3-2x^2}{2x^3-3x+2}=3.$$

下述定理可用以求数列极限和函数极限. 我们假定式中所给极限均存在，a 可以是有限数，也可以是 ∞.

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x), \tag{1-1}$$

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\lim_{x\to a}g(x). \tag{1-2 a}$$

在(1-2 a)中若取 $g(x)$ 为常数 k，则有

$$\lim_{x\to a}kf(x)=k\lim_{x\to a}f(x). \tag{1-2 b}$$

如果 $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}. \tag{1-3}$$

作为例子，我们来计算 $e=\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$。首先，利用二项式定理将函数展开：

$$(1+x)^{1/x}=1+1+\frac{1}{2!}(1-x)+\frac{1}{3!}(1-x)(1-2x)+\cdots$$

$$+\frac{1}{(n-1)!}(1-x)(1-2x)(1-3x)\cdots[1-(n-2)x]+\cdots.$$

现在利用(1-1)及(1-2)，有

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=2+\lim_{x\to 0}\frac{1}{2!}(1-x)+\lim_{x\to 0}\frac{1}{3!}(1-x)(1-2x)+\cdots$$

$$=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots=2.7183=e.$$

下面是另一个有用的定理：

设对于含 $x=a$ 的某个区间内的所有 x 值（$x=a$ 本身可能除外），$f(x)\geqslant g(x)$ 与 $f(x)\leqslant h(x)$ 均成立。若 $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\lim\limits_{x\to a} h(x)=L$，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$。

例如，可利用这一定理证明

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

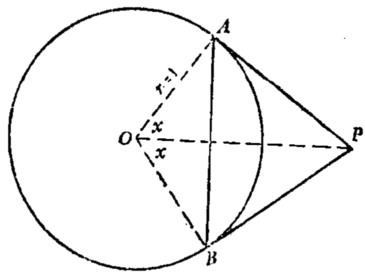

图 1-1

这里 x 是用弧度表示的角．在图 1-1 的单位圆内作弦 AB，令 x 为 AB 所对圆心角 AOB 的一半，则 $AB=2\sin x$ 且弧 $AB=2x$．现过 A, B 分别作圆的切线 PA 及 PB 交于圆外一点 P．因 $PA+PB=2\tan x$，且

$$\text{弦 } AB<\text{弧 } AB<PA+PB,$$

故有

$$2\sin x<2x<2\tan x.$$

将此不等式各部分除以 $2\sin x$，然后再取倒数，得

$$1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

$x\to 0$ 时 $\cos x$ 的极限是 1，因此，由上一定理推知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

本节一开始，我们就提请注意 $f(a)$ 与 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 未必相等这一事实．然而，对于连续函数而言，两者是相等的．

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内处处有定义，当且仅当对任一正实数 ε，存在一正实数 δ，使 $|x-a|<\delta$ 时 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$，这时称 $f(x)$ 在 $x=a$ 连续．

类似地，当且仅当多元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在点 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的某个邻域内处处有定义，且 $x_1\to a_1, x_2\to a_2, \cdots, x_n\to a_n$ 时函数的极限等于 $f(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，称函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在点 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 连续．又，当且仅当函数在某点集（如区间或区域）的每点连续，我们称函数在该点集上连续．

微积分中许多方法与公式都是以函数连续这一假定为基础的．在检验工程问题中所涉及的函数是否连续时，常用到上述定义及下面的定理．

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=a$ 连续，则它们的和、差、积均在 $x=a$ 连续；若 $g(a)\neq 0$，则 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 也在 $x=a$ 连续．

若 $f(x)$ 为多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，则 $f(x)$ 对 x 的所有值都是连续的；如 $f(x)$ 是有理函数，即两个多项式的商 $\frac{g(x)}{h(x)}$,

那末，除了使 $h(x)$ 为零的值以外，$f(x)$ 对 x 的所有值都是连续的。

如果 f, g 均为 x 的连续函数，则复合函数 $h=g(f)$ 也是连续的。例如，

$$\lim_{x\to 0}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1.$$

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续，那么 $f(x)$ 必在此区间上有最大值和最小值，且对最大值与最小值之间的任一值 K，闭区间内至少存在一点 c，使 $f(c)=K$。此外，如果 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在区间中某处有 $f(x)=0$。因此，如果一条连续曲线在区间的一部分位于 x 轴上方，一部分位于 x 轴下方，则在该区间内曲线必与 x 轴相交。

函数 $\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 看成是不连续的，因为在该点函数没有定义；同样，函数 $\frac{1}{x^2-9}$ 在 $x=\pm 3$ 也是不连续的。然而，$(-1)^x$ 在 $x=0$ 虽有定义，$(-1)^0=1$，但仍在该点不连续，因 $\lim(-1)^x$ 不存在。事实上，当 x 取接近于 0 的不同值时，函数 $(-1)^x$ 时而取值 1，时而取值 -1，如 $x=\frac{2}{9}$ 时 $(-1)^x=1$，$x=\frac{1}{9}$ 时 $(-1)^x=-1$。[1]

§ 1-2 一阶导数

极限概念是定义函数的瞬时变化率的基础。我们称这种变化率为函数的导数，而称确定导数的过程为求导。

设 $y=f(x)$ 为实变量 x 的函数，在一特定点的某个邻域内处处有定义。在该点 $f(x)$ 对 x 的一阶导数定义如下：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}. \tag{1-4}$$

表示一阶导数有各种各样的符号，如 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d}{dx}f(x)$，$D_x y$，$f'(x)$，y' 以及 $\dot{y}$。

1) 应该指出，在 0 的任何邻域内，都有使 $(-1)^x$ 无意义的点。——译者注

为说明如何利用定义求函数的导数，我们来求 $y=x^2$ 的导数：

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

作为应用求导的例子，试考虑下面的问题：一重物按规律 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 自由下落，其中 t 为从运动开始起所经历的时间（秒），s 为自由下落的距离（米），g 为重力加速度。试求在第四秒末重物的速度。

在任何时刻的速度等于在该时刻 s 对 t 的一阶导数。因此

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=4}=\frac{d}{dt}[4.9\,t^2]_{t=4}=4.9\times 2t\Big|_{t=4}=39.2,$$

即重物在第四秒末的速度等于 39.2 米/秒。

几何上，导数 $f'(x)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 在一点的切线的瞬时方

表 1-1　代数函数[1]基本求导公式

$\frac{dc}{dx}=0$ （c 为常数）
$\frac{dx}{dx}=1$
$\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$
$\frac{d}{dx}cv=c\frac{dv}{dx}$（$c$ 为常数）
$\frac{d}{dx}uv=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}(u_1u_2\cdots u_n)=u_2u_3\cdots u_n\frac{du_1}{dx}+u_1u_3\cdots u_n\frac{du_2}{dx}+\cdots+u_1u_2\cdots u_{n-1}\frac{du_n}{dx}$
$\frac{dx^n}{dx}=nx^{n-1}$（n 为常数）
$\frac{du^n}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$（$n$ 为常数）
$\frac{d}{dx}\frac{u}{v}=\frac{1}{v^2}\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)$

1） 由代数运算生成的函数叫做代数函数。或者说，对函数 $y=f(x)$，若存在多项式 $P(x,y)$，使 $P(x,f(x))\equiv 0$，则称 $f(x)$ 为代数函数；任一函数若不是代数函数，即称为超越函数。——译者注

向，即切线的斜率．曲线在点 $P_1(x_1, y_1)$ 的切线的方程是

$$y-y_1=(x-x_1)f'(x_1); \tag{1-5}$$

在同一点曲线的法线的方程是

$$x-x_1=(y_1-y)f'(x_1). \tag{1-6}$$

由一阶导数的定义可推得表 1-1 及表 1-2 中的求导公式，借

表 1-2 超越函数基本求导公式

$\frac{d}{dx}e^u=e^u\frac{du}{dx}$, $e=2.718281828459045$
$\frac{d}{dx}a^u=a^u\frac{du}{dx}\ln a$, a 为常数
$\frac{d}{dx}u^v=vu^{v-1}\frac{du}{dx}+u^v\frac{dv}{dx}\ln u$
$\frac{d}{dx}\ln u=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$, $\ln u=\ln 10\log_{10}u=2.302585092994046\log_{10}u$
$\frac{d}{dx}\log_{10}u=\frac{\log_{10}e}{u}\frac{du}{dx}$, $\log_{10}e=0.434294481903252$
$\frac{d}{dx}\sin u=\cos u\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}\sinh u=\cosh u\frac{du}{dx}=\frac{e^u+e^{-u}}{2}\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\cos u=-\sin u\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}\cosh u=\sinh u\frac{du}{dx}=\frac{e^u-e^{-u}}{2}\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\tan u=\sec^2 u\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}\tanh u=\mathrm{sech}^2 u\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\cot u=-\csc^2 u\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}\coth u=-\mathrm{csch}^2 u\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\sec u=\sec u\tan u\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}\mathrm{sech}\, u=-\mathrm{sech}\, u\tanh u\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\csc u=-\csc u\cot u\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}\mathrm{csch}\, u=\mathrm{csch}\, u\coth u\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\arcsin u=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}\mathrm{argsinh}\, u=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\frac{du}{dx}$
$\frac{d}{dx}\arccos u=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}\mathrm{argcosh}\, u=\pm\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}, u>1$
$\frac{d}{dx}\arctan u=\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}\mathrm{argtanh}\, u=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}, -1<u<1$
$\frac{d}{dx}\mathrm{arccot}\, u=-\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$, $\frac{d}{dx}\mathrm{argcoth}\, u=\frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}$, $\lvert u\rvert>1$

助这些公式我们能求较复杂的函数的导数。

例如，试求 $y=x^3-3x^2+4+\frac{1}{x^2}+\sqrt[3]{x}$ 的导数. 考察表 1-1 各公式看出，可采用这样几个公式：$\frac{d}{dx}(u+v-w)=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}-\frac{dw}{dx}$，$\frac{d}{dx}cv=c\frac{dv}{dx}$，$\frac{du^n}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$（$n$ 为常数）。于是，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{dx^3}{dx}-3\frac{dx^2}{dx}+\frac{d(4)}{dx}+\frac{d}{dx}x^{-2}+\frac{d}{dx}x^{1/3}\\&=3x^{3-1}-3\times2x^{2-1}+0-2x^{-2-1}+\frac{1}{3}x^{1/3-1}\\&=3x^2-6x-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{3x^{2/3}}.\end{aligned}$$

作为另一个例子，试求 $\frac{\sin x}{x}$ 的导数. 一种方法是利用表 1-1 中的公式 $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}\left(v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}\right)$，这时 $u=\sin x$，$v=x$，由表 1-2，$\sin x$ 的导数是 $\cos x$，因此 $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{1}{x^2}(x\cos x-\sin x)$。另一种方法是利用表 1-1 中的公式 $\frac{d}{dx}uv=u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}$，这时 $u=\sin x$，$v=\frac{1}{x}=x^{-1}$，于是

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}\sin x+\frac{1}{x}\cos x=\frac{1}{x^2}(x\cos x-\sin x),$$

与前一结果相同。

下面是几个用以求复合函数导数的法则：

若 y 是变量 u 的函数，而 u 又是另一变量 x 的函数，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}. \tag{1-7}$$

例如，试求 $y=\ln(x^2+1)$ 的导数. 令 $u=x^2+1$，于是 $y=\ln u$，$y'=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$；因 $\frac{du}{dx}=2x$，故 $y'=\frac{2x}{x^2+1}$.

如果 $\frac{dx}{dy}$ 比 $\frac{dy}{dx}$ 更易求得，可用公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{dx/dy}. \tag{1-8}$$

例如，试求 $\operatorname{arcsec} x$ 的导数. 令 $y=\operatorname{arcsec} x$，则 $x=\sec y$，$\frac{dx}{dy}=\sec y\tan y=\sec y\sqrt{\sec^2 y-1}=x\sqrt{x^2-1}$，因此$\frac{d}{dx}\operatorname{arcsec}x=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

若函数以参数式给出：$x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}. \tag{1-9}$$

例如，试求旋轮线的切线斜率，旋轮线的参数方程是

$$x=a(\theta-\sin\theta),\ y=a(1-\cos\theta),$$

其中 θ 为参数. 在这种情况下，我们可先将所给方程对 θ 求导，再利用式(1-9)求得斜率$\frac{dy}{dx}$：

$$\frac{dx}{d\theta}=a(1-\cos\theta),$$

$$\frac{dy}{d\theta}=a\sin\theta,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}.$$

如果 y 与 x 的函数关系由关系式 $f(x,y)=0$ 给出，求$\frac{dy}{dx}$的一种方法是把 y 看成 x 的函数后，将 f 对 x 求导并解出$\frac{dy}{dx}$. 如求椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 上任一点切线的斜率，可令 $f=4x^2+9y^2-36=0$，则$\frac{df}{dx}=4\cdot 2x+9\cdot 2y\frac{dy}{dx}=0$，由此得$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{9y}$.

另一方法需用含偏导数(见 § 1-5)的公式：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}. \tag{1-10}$$

简言之，$\frac{\partial f}{\partial x}$是把 y 看成常数时 f 对 x 的导数，$\frac{\partial f}{\partial y}$是把 x 看成常

数时 f 对 y 的导数。现利用式(1-10)求解前一问题：

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(4x^2+9y^2-36)=8x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(4x^2+9y^2-36)=18y,$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}=-\frac{8x}{18y}=-\frac{4x}{9y}.$$

§1-3 高阶导数

函数的一阶导数的导数称为二阶导数。若 $y=f(x)$，则 y 对 x 的二阶导数可记为 $\frac{d^2y}{dx^2}$，$D^2{}_xy$，$f''(x)$，y'' 及 $\ddot{y}$ 等。

在§1-2 中我们看到，速度可看成是距离对时间的一阶导数。类似地，由于加速度是速度的瞬时变化率，加速度可看成是速度对时间的导数。因此，加速度是距离对时间的二阶导数。

设一物体至某定点的距离由 $s=\frac{1}{t+1}$ 给出(单位为米)，这里 t 是时间(秒)，试求第 2 秒末物体的速度和加速度。

速度 $v=\frac{ds}{dt}=\frac{d}{dt}(t+1)^{-1}=-(t+1)^{-2}$，当 $t=2$ 时

$$v=-(2+1)^{-2}=-\frac{1}{9}(\text{米/秒})；$$

加速度 $a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}[-(t+1)^{-2}]=2(t+1)^{-3}$，当 $t=2$ 时

$$a=2(2+1)^{-3}=\frac{2}{27}(\text{米/秒}^2).$$

函数的二阶导数可用以确定表示该函数的平面曲线的曲率。曲率就是曲线的切线方向的变化率。在平面直角坐标系中，曲率由下式给出：

$$K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\frac{-x''}{(1+x'^2)^{3/2}}, \tag{1-11}$$

其中 y', y'' 分别是 y 对 x 的一阶和二阶导数，x', x'' 分别是 x 对 y 的一阶和二阶导数.

如求椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 在 $x=0$ 处的曲率. 在 §1-2 中已求得 $y'=-\frac{4x}{9y}$，将此式再对 x 求导，即得

$$y''=-\frac{4}{9}\frac{y-xy'}{y^2}.$$

于是，由式(1-11)，椭圆上任一点的曲率

$$K=\frac{-4/9[(y-xy')/y^2]}{(1+y'^2)^{3/2}}=-\frac{4(y-xy')}{9y^2(1+y'^2)^{3/2}}.$$

$x=0$ 时 $y=\pm 2, y'=0$，因此，在 $x=0$ 处的曲率是

$$K=-\frac{4}{9y}=\pm\frac{2}{9}.$$

在结构分析中，一承受载荷的弹性梁上任一点的弯矩与曲率有如下关系：

$$M=EIK, \tag{1-12}$$

其中 E 是材料的弹性模数，I 是梁的横截面的惯矩. 在实际应用中，梁的挠度很小，因此，不妨假设在式(1-11)中可以略去梁在任一点的切线斜率. 所以，弯矩一般由梁的挠度的二阶导数表出：

$$M=EIy''. \tag{1-13}$$

例如，设梁的挠度确为 $y=-\frac{(xL^3-2x^3L+x^4)w}{24EI}$，其中 w 为载荷，L 是梁的跨度. 试求与一支座距离为 x 处的弯矩. 求导，得弹性曲线(又称挠曲曲线或挠度曲线)的切线斜率 $y'=-\frac{(L^3-6x^2L+4x^3)w}{24EI}$，再次求导并代入式(1-13)，即得弯矩 $M=EIy''=-\frac{(-12xL+12x^2)w}{24}=\frac{w}{2}x(L-x)$.

梁上任一点的切力由下式给出：

$$V=\frac{dM}{dx}. \tag{1-14}$$

因此，由问题的条件，$V=\frac{w}{2}(L-2x)=\frac{wL}{2}-wx$. 此式表明，切