

应用数学译丛

第4号

# 数学建模

——来自英国四个行业中的案例研究

[英] D. 伯格斯 等著

叶其孝 吴庆宝 译



世界图书出版公司

# 数学建模

——来自英国四个行业中的案例研究

[英]D. 伯格斯 等 著

叶其孝 吴庆宝 译

世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安

1997

## 图书在版编目(CIP)数据

数学建模:来自英国四个行业中的案例研究/(英)伯格(Burghes, D)等著;叶其孝,吴庆宝译. —北京:世界图书出版公司北京公司,1997. 7

(应用数学译丛;4/章祥荪主编)

书名原文:Mathematical Modelling

ISBN 7-5062-3290-1

I. 数… I. ①伯… ②叶… ③吴… II. 建立模型-应用-研究-英国  
IV. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (97)第 10739 号

**Mathematical Modelling**/David Burghes et al.

©1996 by Prentice Hall International (UK) Limited

Published by arrangement with the original publisher,

Prentice Hall Europe, a Simon & Schuster company

中文版版权 ©世界图书出版公司北京公司,1997

本书任何部分之内容,未经出版者书面同意,不得用任何方式抄袭、节录或翻印。

本书封面贴有 Prentice Hall Inc 激光防伪标签,无标签者不得销售。

北京市版权局著作权合同登记号:01-97-0571

书 名: **数学建模**——来自英国四个行业中的案例研究

原作者: [英]D. 伯格等

译 者: 叶其孝 吴庆宝

出版者: 世界图书出版公司北京公司(北京朝内大街 137 号 邮编:100010)

印刷者: 北京昌平百善印刷厂

发行者: 新华书店北京发行所

开 本: 850×1168 1/32 印张 9

版 次: 1997 年 7 月第 1 版 1997 年 7 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-5062-3290-1/O · 181

印 数: 0001—2500

定 价: 22.00 元

# 应用数学译丛

主 编 章祥荪

编 委 (按姓氏笔划排)

王 炜 成世学 汪寿阳

黄文炆 曾宪武 程 侃

## 译 者 的 话

数学建模(Mathematical Modelling)就是对实际问题进行抽象、简化,建立数学模型,求解数学模型,解释和验证等步骤的多次循环执行的过程,也是一种强有力的研究、解决各种实际问题的方法。用数学方法研究、解决各种问题不是新鲜事,通过数学建模的方法研究、解决各种实际问题也不是新鲜事,纵观科学史和数学史就不难看到这点。问题是用数学建模的方法去研究、解决各种实际问题往往需要大量的计算(数值计算或符号运算)及形象(例如图象)表示的技术手段,如果技术手段没有充分发展,必将限制数学建模方法的发展和应用。正是由于本世纪下半世纪计算机及相应数学软件包的迅速发展,大大促进了数学建模的发展,以至“数学建模和与之相伴的计算正在成为工程设计中的关键工具”。

30年来,数学建模的教学活动(课程开设、数学建模实验室等课外活动、数学建模竞赛活动等)已经成了大、中学校数学、科学教育的不可或缺的有机组成部分。在我国很多大学中,数学建模课已经成为数学系学生的必修课以及所有各专业学生的限制性选修课或选修课。1992年我国开始举办大学生数学建模竞赛,到1996年,就有来自24个省(市、自治区),337所院校的1683个队(每队三名学生)参加了竞赛。我国还多次组队参加美国大学生数学建模竞赛。另外,中学生数学知识应用竞赛也已在上海、北京举行(上海已连续举办了六届)。更为重要的是数学建模教学活动正对大、中学校的数学教育改革产生深远的影响,它实际上已形成了在不影响现行教学秩序下规模颇大的数学、科学教育改革试验。

然而,要成功地开展数学建模教学活动,特别是开设好数学建模课,是很不容易的。它既要有高质量的师资,更要有好的教材(或教学材料)以及高质量的技术手段的准备,还要在教学方法上进行革新,这正是包括我国在内的世界各国从事数学建模教育活动的教师、科学家、工程师所关注并努力实践的关键问题。本书就是这样一种努力,尽管本书只要求读者具有较好的高中数学知识,但重要的是它大力倡导学习数学建模就要亲自去做数学建模的精神,取材的案例来自与读者日常生活和工作密切相关的活动,并尽量通过大量的思考题和习题让读者觉得自己有可能亲自动手去做;全书尽量不用高深的数学术语,逐步引导,逐步深入,最终使读者真正领悟到一个真谛:在当今激烈竞争的社会中要生存并获胜,具有数学、数学建模能力是极端重要的。

为了真正掌握数学建模的方法,本书强调指出数学建模全过程的“最后阶段是用现实世界中的语言把解答翻译回来。这一步可能并不复杂,但这也需要对现实问题的解决作出仔细考虑——它有意义吗?是与实际证据相符合吗?……如果要使数学模型有实际价值的话,这一步在建模的循环中是关键的一步。”这一点对于真正想学习、掌握数学建模的思想和方法的人来说是至关重要的,为此本书提供了能启发读者思考的大量实际数据及问题。国内外很多冠以“数学建模”书名的书很多忽略了这至关重要的一步,有的书实际上只写了数学建模中出现的各种问题求解的数学方法,这是一种很大的欠缺。当我们读完英文版 D. Burghes 等著的《Mathematical Modelling》后,感受到它的特色和魅力,认为有必要翻译成中文献给广大中国读者,相信对更好地开展大、中学以至成人教育中的数学教育活动来说,它是一本很好的参考书。

在翻译过程中,我们写信给主要作者 D. Burghes 教授,请教了一些问题。他很快地回信答复并欣然为本书作了中文版序。我们还对原书中的若干错处(包括图错)及印刷错误提出修改意见,

他都一一首肯。对他的真诚帮助,我们十分感谢。

我们还要感谢世界图书出版公司北京公司为这本中文版所做的努力,特别是王伟同志做了大量工作,我们由衷地感激她的热情相助。

由于译者学术、外语水平的限制,书中定有错误不妥之处,真诚希望广大读者予以指正。

叶其孝 吴庆宝  
于北京理工大学  
1997年3月

## 中 文 版 序

当我获悉我们的教科书《Mathematical Modelling》被翻译成中文时,我感到非常高兴。希望中国学生会发现它是一本很有用的参考读物。

我们特别渴望看到数学在解决与人类利益相关的实际问题及有关问题中能发挥作用。希望能共同分享数学的这些应用成果,从而促进国际间的交流与合作。



D. 伯格斯  
(D. Burghes)  
英国 Exeter 大学  
1997 年 4 月



## 前 言

本教科书材料翔实,通过一系列案例研究介绍并研究了数学建模的重要概念。这些案例研究取材于下列英国四大公司的问题:

British Steel (英国钢铁公司)

The Post Office (英国邮局)

Esso (埃索石油公司)

Tesco (Tesco 超级市场连锁集团)

我们希望本教科书能向选修 A 级数学课程\* 的学生提供一组有用的课外辅助学习材料,帮助他们有信心将学到的数学知识应用于解决实际问题。每个公司的数据部分提供了各公司的实际数据和思路,对学生理解统计课程特别有用。

---

\* 在英国中学和大学预科里,正规教学课程的基点是高级水平普通教育证书 (General Certificate of Education at Advanced Level, 即 A 水平)。这种在 18 岁参加的考试是英国大学的入学基础。它要求学生三门课程。这里,“课程”的含义是能导致总共大约为 6 小时的考试的学习计划。

但是,“半课程”——所谓的高级增补水平 (Advanced Supplementary Level, 即 AS 水平)——也是可能的。某些学生可修学数学作为“双课程”。这些考虑为设计学分制提供了基础;六个教学单元 (module) 等价于 A 水平,而三个教学单元等价于 AS 水平。以这样的方式,教学单元的集成代替了课程结束时传统的 6 小时的考试。——译者注

# 目 录

译者的话

中文版序

前言

|                         |       |
|-------------------------|-------|
| 第一章 绪论 .....            | ( 1 ) |
| 1.1 数学的本质 .....         | ( 1 ) |
| 1.2 运用数学 .....          | ( 2 ) |
| 1.3 数学建模 .....          | ( 7 ) |
| 第二章 英国钢铁公司 .....        | (16)  |
| 2.1 罐头设计 .....          | (16)  |
| 2.2 饮料罐头 .....          | (19)  |
| 2.3 波状边 .....           | (21)  |
| 2.4 运输 .....            | (22)  |
| 2.5 冷轧机 .....           | (26)  |
| 2.6 卷筒馈送线 .....         | (29)  |
| 2.7 有关数据 .....          | (31)  |
| 第三章 邮局 .....            | (43)  |
| 3.1 邮政编码 .....          | (43)  |
| 3.2 邮政编码的编码和解码 .....    | (46)  |
| 3.3 邮资 .....            | (51)  |
| 3.4 最大体积 .....          | (53)  |
| 3.5 最佳投递路线和收集路线 .....   | (56)  |
| 3.6 有关数据 .....          | (62)  |
| 第四章 Esso (埃索石油公司) ..... | (71)  |

|     |                  |       |
|-----|------------------|-------|
| 4.1 | 输油管线             | (71)  |
| 4.2 | 钱的价值             | (74)  |
| 4.3 | 量油尺问题            | (76)  |
| 4.4 | 油库选址             | (78)  |
| 4.5 | 公路油罐车设计和装载       | (84)  |
| 4.6 | 有关数据             | (99)  |
| 第五章 | Tesco (超级市场连锁集团) | (105) |
| 5.1 | 商场选址             | (105) |
| 5.2 | 条形码技术            | (109) |
| 5.3 | 库存控制             | (115) |
| 5.4 | 抽样生产线            | (119) |
| 5.5 | 包装               | (123) |
| 5.6 | 有关数据             | (127) |
| 第六章 | 九十年代的数学应用        | (135) |
| 6.1 | 引言               | (135) |
| 6.2 | 英吉利海峡海底隧道        | (137) |
| 6.3 | 国家彩票             | (140) |
| 6.4 | 后记               | (145) |
|     | 习题答案             | (146) |
|     | 索引               | (149) |

# 第一章 绪 论

## 1.1 数学的本质

综观历史,数学起着显著的作用。它为和平建设献力,帮助解决问题和解释自然现象;它也会为较有侵略性的目的效劳,例如研制前所未有的复杂武器时,数学必不可少。

很多时候为解决问题所需要用的数学早已被纯粹数学家们研究好了。纯粹数学家只从事研究数学的一些特殊方面和概念,作出证明取得结果,但几乎不考虑最终如何将这些结果应用于实际问题。

数学的另外内容就是探讨后者——回答实际问题,例如力学中用到的数学经常就是这种情况。为解释一些实际现象或预测结果需要解法,专门为求解这些问题的数学也就应运而生并得到了发展。

在本书中你将探索数学——特别是英国 A 级水平数学课程的主要内容——怎样地通过数学模型的研制和探索来帮助解决实际问题。

在本章中,主要的任务是了解数学怎样用于:

- 解释
- 预测
- 决策

你要从头到尾阅读本书。如果有时间,对书中的例子自己先动手试试做,然后才通读书中给出的解。

你还应试试思考题和习题;注意,凡要求读者“停下来思考一

下”的地方,本书都用黑体字表示。

## 1.2 运用数学

### Bode 定则

1772 年,德国天文学家 Johann Bode (1747~1826)研究了行星到太阳距离形成的模式。

那时已经知道的只有六大行星,Bode 发明的模式如下所示。距离是按如下比例尺度来测量的,即太阳到地球距离等于 10 个单位。

| 行 星 | 真实距离 | Bode 模式    |
|-----|------|------------|
| 水 星 | 4    | $0+4=4$    |
| 金 星 | 7    | $3+4=7$    |
| 地 球 | 10   | $6+4=10$   |
| 火 星 | 15   | $12+4=16$  |
| —   | —    | —          |
| 木 星 | 52   | $48+4=52$  |
| 土 星 | 96   | $96+4=100$ |

• 对缺项你有什么想法?

也还有比土星远的行星。

• 找出 Bode 模式中的后两个数。

实际上,后续的数据如下:

| 行 星 | 真实距离 |
|-----|------|
| 天王星 | 192  |
| 海王星 | 301  |
| 冥王星 | 395  |

• 你能否就怎样改写 Bode 定则使之也能适合于这额外的数据给出一种说明。

## 风寒

当温度降低到接近于  $0^{\circ}\text{C}$  时,天气预报员通常给出两个值:预期的空气温度和风寒温度——这是人们真实感觉到的温度,它依赖于风速和空气温度。例如,对于真实温度  $0^{\circ}\text{C}$  和风速 10mph (英里/时),给出的风寒温度近似于  $-5.5^{\circ}\text{C}$ 。

对于  $v > 5\text{mph}$ , 由下式给出风寒温度:

$$T = 33 + (0.45 + 0.29 \sqrt{v} - 0.22v)(t - 33)$$

其中  $t^{\circ}\text{C}$  是空气温度,  $v\text{ mph}$  是风速。这个公式在第二次世界大战时由美国科学家基于实验证据确立的。

**【例】** 求下列情况下的风寒温度:

(a)  $t = 2^{\circ}\text{C}$ ,  $v = 20\text{ mph}$

(b)  $t = -10^{\circ}\text{C}$ ,  $v = 5\text{ mph}$

(c)  $t = 0^{\circ}\text{C}$ ,  $v = 40\text{ mph}$

解 (a) 当  $t = 2$ ,  $v = 20$  时,

$$\begin{aligned} T &= 33 + (0.45 + 0.29 \sqrt{20} - 0.02 \times 20)(-31) \\ &\approx -8.8^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

(b) 当  $t = -10$ ,  $v = 5$  时,

$$\begin{aligned} T &= 33 + (0.45 + 0.29 \sqrt{5} - 0.02 \times 5)(-43) \\ &\approx -9.9^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

(c) 当  $t = 0^{\circ}\text{C}$ ,  $v = 40$  时,

$$\begin{aligned} T &= 33 + (0.45 + 0.29 \sqrt{40} - 0.02 \times 40)(-33) \\ &\approx -16.0^{\circ}\text{C} \end{aligned}$$

• 风速大约是 5 mph 的含义是什么?

## 七项全能

七项全能是一项女运动员的比赛,她们参加七个独立的项目(通常分别排在两天内进行)。

基于如下想法:一个好的参赛者在每项运动中她将记分为1000点,对于每项运动有一个记分点方法。例如,对800米跑其记分点方法是:

$$P = 0.11193(254 - m)^{1.88}$$

其中  $m$  是参赛者跑完800米的时间(按秒计)。

**【例】** 对于  $m=124.2$ ,

$$P = 0.11193(254 - 124.2)^{1.88}$$

$$\approx 1051.72$$

$$\Rightarrow P = 1051$$

(记分总是只舍不入到最接近的整数。)

于是,为达到记分1000点所需要的时间  $m$  秒为:

$$1000 = 0.11193(254 - m)^{1.88}$$

$$\Rightarrow (254 - m)^{1.88} = 8934.15$$

$$\Rightarrow 254 - m = (8934.15)^{\frac{1}{1.88}}$$

$$\Rightarrow m = 254 - 126.364$$

$$\text{给出 } m = 127.64$$

对于所有的径赛,使用以下形式的记分点方法:

$$P = a(b - m)^c$$

$a$ 、 $b$  和  $c$  满足适当的约束。

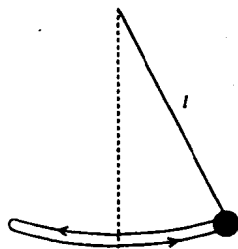
• 试就七项全能中径赛的记分点方法的公式提出适当公式。

## 单摆

伟大的意大利科学家伽利略(Galileo)(1564~1642)第一个对摆锤的性能得到了重要发现。这些发现导致摆钟的研制。

### 思考题 1.1 摆的摆动周期

在一条轻线的一端系一锤,另一端被固定。在垂直平面中通过一个小的角度让摆自由摆动,对于各种摆长  $l$  (按 m 计),求一个完全振荡所相应的按秒计的时间(称为周期)。就时间而言,更精确的做法是做 5 次振荡,然后把总时间除以 5。在图上,画出周期  $T$  关于摆长平方根  $\sqrt{l}$  的图。你注意到什么了?



事实上,两个量近似地有下列公式表示的关系:

$$T = 2.006 \sqrt{l}$$

**【例】** 摆长为多少时周期为 1 秒?

解 若  $T = 1$ , 则

$$1 = 2.006 \sqrt{l}$$

$$\Rightarrow \sqrt{l} = \frac{1}{2.006} = 0.4985$$

$$\Rightarrow l \approx 0.25\text{m}$$

### 思考题 1.2

用  $l = 0.25\text{m}$  构成一个单摆并检验它的周期时间。



## 习题 1A

1. 用风寒温度公式求下列情况的风寒温度值:

(a)  $t = 0^{\circ}\text{C}, v = 20 \text{ mph}$

(b)  $t = 5^{\circ}\text{C}, v = 20 \text{ mph}$

(c)  $t = -5^{\circ}\text{C}, v = 20 \text{ mph}$

对于  $v = 20 \text{ mph}$ , 画风寒温度关于温度  $t$  的图。

当  $t = 10^{\circ}\text{C}$  和  $v = 20 \text{ mph}$  时, 用你的图估计风寒温度。

2. 在七项全能中对于跳高运动的记分点方法由下式给出:

$$P = a(m - b)^c$$

其中  $a = 1.84523, b = 75.0, c = 1.348, m$  是跳的高度(按 cm 计)。求跳的高度为 183cm 的记分点, 并确定记分 1000 点需要跳的高度。

3. 下表给出确定复活节日期的算法。用该表找出下一年复活节的日期, 日期由  $n$  月  $p$  日给出。

| 步  | 数                 | 除数  | 答案*   | 余项    |
|----|-------------------|-----|-------|-------|
| 1  | $x = \text{年}$    | 100 | $b =$ | $c =$ |
| 2  | $5b + c$          | 19  | —     | $a =$ |
| 3  | $3(b + 25)$       | 4   | $r =$ | $s =$ |
| 4  | $8(b + 11)$       | 25  | $t =$ | —     |
| 5  | $19a + r - t$     | 30  | —     | $h =$ |
| 6  | $a + 11h$         | 319 | $g =$ | —     |
| 7  | $60(5 - s) + c$   | 4   | $j =$ | $k =$ |
| 8  | $2j - k - h + g$  | 7   | —     | $m =$ |
| 9  | $h - g + m + 110$ | 30  | $n =$ | $q =$ |
| 10 | $q + 5 - n$       | 32  | —     | $p =$ |

其中示出的“—”表示不需要用该数。

• (若必要的话)