

# 电磁场与微波技术

(上册)

(第二版)

马冰然 编

华南理工大学出版社



# 电磁场与微波技术

(上册)

(第二版)

马冰然 编

华南理工大学出版社

·广州·

## 内 容 简 介

本书内容包括：电磁场，电磁波，微波技术，天线及电波传播。全书共18章，分上下册出版。上册内容有：矢量分析，静电场，恒定电场，恒定磁场，静态场的边值问题，时变电磁场，平面电磁波。下册内容有：长线理论，微波传输线，微波谐振腔，微波网络，微波元件，微带传输线及微带元件，微波振荡源，微波测量，微波加热及微波防护，天线及电波传播。每章都附有一定数量的习题及其答案。

本书可作为高等院校电子与通信、电子与信息、物理电子与光电子、电力自动化等专业，以及成人高等教育有关专业的教材或参考书，也可供有关工程技术人员阅读参考。

## 图书在版编目(CIP)数据

电磁场与微波技术(上册)/马冰然编. —2版. —广州: 华南理工大学出版社, 1999. 9  
ISBN 7-5623-0255-3

- I. 电…
- II. 马…
- III. 电磁场-微波技术
- IV. O441.4 TN015

华南理工大学出版社出版发行

(广州五山 邮编 510640)

责任编辑 张颖 詹志青

各地新华书店经销

广州市新光明印刷厂印装

\*

1999年9月第2版 1999年9月第5次印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 14.625 字数: 351千

印数: 16001—21000册

定价: 22.00元

# 前 言

电磁场理论是一门研究各类电磁现象内在规律的基本理论。

表现为电磁形式的能量和信息,具有便于产生、传送、量测、贮存、加工处理、控制及转化为其它能量和信息的特点,因此得到了广泛的应用。例如无线电类专业的通信、广播、电视、雷达、遥感遥测等都离不开电磁波的产生、发射、传播和接收;元器件类专业的电子器件,则要求遵循电子在运动状态下的规律;电力类专业的电机、电器制造、高压工程等,则要运用电磁能量的转换、传输与控制。所有这些应用领域,无不以电磁场理论为基础,尤其在信息方面,如全息图像、遥感技术、光纤通信、卫星通信等,其应用更加广泛和深入。因此,在我国各高等院校及世界先进工业国的工科大学中,一般都把它作为电类专业的必修课。

电磁场理论是电类专业的共同基础和共同的生长点。不仅如此,它过去、现在和将来都是边缘学科、交叉学科的孕育点。

这门课程的理论性较强,概念较抽象,应用的数学知识较多,因此,在学习这门课程之前,应当具备大学物理和高等数学的扎实基础。

本书分上下两册。上册研究电磁场与电磁波,共7章,内容包括矢量分析、静电场、恒定电场、恒定磁场、静态场的解、交变电磁场、平面电磁波。下册研究微波技术,共8章,内容包括长线理论、微波传输线、微波谐振腔、微波网络、微波元件、微波振荡源、微波测量、微波的应用。上下册的内容既前后衔接,又相对独立,可合并使用,也可单独使用。

由于篇幅及教学时数的限制,本书力求内容精选、重点突出,以加强基础理论,并反映最新理论和技术;在内容的编排及叙述上,力求由浅入深,循序渐进,通俗易懂;在概念与数学分析的关系上,既强调物理概念,也不回避必要的数学推理,使读者既能掌握正确的物理内涵,又能得到必要的数学逻辑思维和数学运算能力的培养。每章都选编了一定数量的习题并给出答案,以便于自学。

本书主要作为高等院校无线电与电子类专业的教材。若在内容上作适当的取舍也可作为不同层次、不同类型的电类专业的教材或参考书。

本书由李绪益担任主编。罗惠萍编写了上册的第1至第3章,马冰然编写了上册的第4至第7章,林志编写了下册的第3至第7章,李绪益编写了下册的第1、2、8章及上、下册的附录。本书的出版,得到了华南理工大学教务处、无线电工程系的领导,以及微波与天线教研室、物理电子教研室的同志们的大力支持和热情帮助,梁金义编写的讲义也给予有益的借鉴,在此谨向他们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限,书中难免存在缺点和错误,欢迎读者批评指正。

李绪益

1991年1月

# 再版前言

《电磁场与微波技术》(第一版)自1991年出版至今已9年有余。在这9年中,我国的经济建设发生了深刻的变化,高新科学技术发展速度越来越快、应用范围越来越广,高等教育也随着经济建设和科学技术的迅猛发展而日趋兴旺。为科技兴国,为教育兴国,教者在努力,学者也在努力。在这知识空前膨胀的信息时代,要求现代大学生具有更强的竞争意识,更广泛的适应能力,更宽阔的专业知识面,更厚实的基础理论水平。

《电磁场与微波技术》不仅仅是无线电电子与通信工程、电子与信息工程和电力自动化工程等电类专业的技术基础理论,而且也是激光通信、卫星通信、电磁兼容和生物医学电磁效应等高新技术的理论基础及交叉领域新学科的生长点。故《电磁场与微波技术》课程除了依照惯例作为电子与通信工程、电子与信息工程和电力自动化工程等电类专业的必修课外,已越来越多地成为其它专业的学生的选修课。

1991年出版的《电磁场与微波技术》(第一版)走的是一条“力求内容精选,重点突出”“力求由浅入深,循序渐进,通俗易懂”的路子,这是适应当时的形势和实际情况的。从9年来教学的实践和读者的反馈情况看,第一版基本达到了以上目的。但随着科技形势的发展,随着高等教育要“宽专业、厚基础”的要求,随着读者的知识面的拓宽、求知欲的增强和自学能力的提高,第一版也渐显其过于“精”、“少”的不足之处。

为了使本课程更适应客观的需求,对第一版作修订是很有必要的。第二版对第一版作了较大的修订。除了将一些错漏的地方修正以外,第二版比第一版更注意概念、定理的准确性,前后思路的连贯性及阐述推理的逻辑性,并且内容具有一定深度。也不回避较深的概念和数学推理,但尽量选用较简单的方法和较通俗的语言,使其清晰、易懂。此次修订,各章节都作了不少改动。如上册第2章的极化概念、镜像法、静电能量与力,第3章的电流与电荷密度概念,第4章的磁化概念和磁场的能量与力,第5章的圆柱、圆球坐标系的分离变量法和第7章的多层垂直入射及任意方向的斜入射等,与第1版相应内容比较,都得到了“拓宽”和“加深”。另外,每章都增加了相当数量的例题和习题。例题是精心挑选的,希望能帮助读者加深对概念、定理的理解和增强对问题的分析计算能力。也希望不久将有一册与此教材相配套的辅导资料及习题集。

第二版是在第一版的基础上修订的。修订的内容无疑凝聚了修订者在16年的各种电磁场理论教学中的心得体会。但由于时间和本人的水平有限,书中难免有错漏之处,欢迎读者批评指正。

马冰然

1999.7.26

# 目 录

|                           |      |
|---------------------------|------|
| <b>1 矢量分析</b> .....       | (1)  |
| 1.1 三种常用的坐标系 .....        | (1)  |
| 1.2 矢量代数 .....            | (7)  |
| 1.3 标量函数的梯度 .....         | (8)  |
| 1.4 矢量函数的散度 .....         | (13) |
| 1.5 矢量函数的旋度 .....         | (18) |
| 本章小结 .....                | (25) |
| 习题 .....                  | (26) |
| <b>2 静电场</b> .....        | (28) |
| 2.1 库仑定律与电场强度 .....       | (28) |
| 2.2 电位 .....              | (32) |
| 2.3 静电场中的导体与电介质 .....     | (36) |
| 2.4 高斯通量定理 .....          | (40) |
| 2.5 泊松方程和拉普拉斯方程 .....     | (46) |
| 2.6 分界面上的边界条件 .....       | (49) |
| 2.7 唯一性定理 .....           | (53) |
| 2.8 镜像法 .....             | (55) |
| 2.9 导体系统的电容 .....         | (63) |
| 2.10 静电场能量 静电力 .....      | (69) |
| 本章小结 .....                | (74) |
| 习题 .....                  | (75) |
| <b>3 恒定电场</b> .....       | (78) |
| 3.1 电流密度 .....            | (78) |
| 3.2 欧姆定律和焦耳定律 .....       | (80) |
| 3.3 恒定电场的基本方程 .....       | (82) |
| 3.4 恒定电场的边界条件 .....       | (84) |
| 3.5 恒定电场与静电场的比拟 .....     | (86) |
| 3.6 接地电阻 .....            | (87) |
| 本章小结 .....                | (88) |
| 习题 .....                  | (88) |
| <b>4 恒定磁场</b> .....       | (91) |
| 4.1 恒定磁场的实验定律和磁感应强度 ..... | (91) |
| 4.2 磁场的散度和磁通连续性原理 .....   | (95) |

|      |                           |       |
|------|---------------------------|-------|
| 4.3  | 真空中的安培环路定律和恒定磁场的旋度 .....  | (96)  |
| 4.4  | 矢量磁位和矢量泊松方程 .....         | (98)  |
| 4.5  | 媒质的磁化和安培环路定律 .....        | (102) |
| 4.6  | 标量磁位 .....                | (105) |
| 4.7  | 恒定磁场的基本方程 分界面上的边界条件 ..... | (107) |
| 4.8  | 电感 .....                  | (110) |
| 4.9  | 磁场能量 磁场力 .....            | (115) |
|      | 本章小结 .....                | (120) |
|      | 习题 .....                  | (122) |
| 5    | 静态场的边值问题 .....            | (125) |
| 5.1  | 静态场边值问题的基本概念 .....        | (125) |
| 5.2  | 分离变量法 .....               | (126) |
| 5.3  | 有限差分法 .....               | (138) |
|      | 本章小结 .....                | (145) |
|      | 习题 .....                  | (146) |
| 6    | 时变电磁场 .....               | (149) |
| 6.1  | 法拉第电磁感应定律与麦克斯韦第二方程 .....  | (149) |
| 6.2  | 位移电流和全电流定律 .....          | (152) |
| 6.3  | 麦克斯韦方程组 .....             | (153) |
| 6.4  | 分界面上的边界条件 .....           | (155) |
| 6.5  | 坡印亭定理和坡印亭矢量 .....         | (158) |
| 6.6  | 标量位和矢量位 .....             | (160) |
| 6.7  | 时谐变电磁场 .....              | (163) |
|      | 本章小结 .....                | (169) |
|      | 习题 .....                  | (170) |
| 7    | 平面电磁波 .....               | (173) |
| 7.1  | 波动方程 .....                | (173) |
| 7.2  | 理想介质中的均匀平面波 .....         | (174) |
| 7.3  | 平面波的极化 .....              | (180) |
| 7.4  | 导电媒质中的均匀平面波 .....         | (184) |
| 7.5  | 平面边界上均匀平面波的垂直入射 .....     | (189) |
| 7.6  | 沿任意方向传播的平面电磁波 .....       | (196) |
| 7.7  | 平面边界上均匀平面波的斜入射 .....      | (198) |
| 7.8  | 相速与群速 .....               | (207) |
|      | 本章小结 .....                | (208) |
|      | 习题 .....                  | (210) |
| 附录 1 | 物理量的符号与单位 .....           | (213) |
| 附录 2 | 常用物理常数 .....              | (215) |
| 附录 3 | 国际单位制(SI)中的词头 .....       | (216) |

---

|                              |       |
|------------------------------|-------|
| 附录 4 常用公式 .....              | (217) |
| 矢量代数 .....                   | (217) |
| 矢量恒等式 .....                  | (217) |
| 积分变换 .....                   | (217) |
| 直角坐标系 .....                  | (218) |
| 圆柱坐标系 .....                  | (218) |
| 球面坐标系 .....                  | (219) |
| 特殊函数积分公式 .....               | (219) |
| 附录 5 亥姆霍兹定理 .....            | (220) |
| 附录 6 某些金属导体材料的电特性(20℃) ..... | (221) |
| 附录 7 某些电介质材料的电特性 .....       | (221) |
| 主要参考文献 .....                 | (223) |

# 1 矢量分析

## 1.1 三种常用的坐标系

为了考察某一物理量在空间的分布和变化规律,必须引入坐标系。而且,常常根据被研究物体的几何形状不同而采用不同的坐标系。在电磁场理论中,用得较多的是直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系。

任何描述三维空间的坐标系都要有三个独立的坐标变量  $u_1, u_2, u_3$  (如直角坐标系中的  $x, y, z$ ), 而  $u_1, u_2, u_3$  均为常数时, 就代表三组曲面(或平面), 称为坐标面。若三组坐标面在空间每一点正交, 则坐标面的交线(一般是曲线)也在空间每点正交, 这种坐标系叫做正交曲线坐标系。直角坐标系、圆柱坐标系和球坐标系是许多正交曲线坐标系中较常用的三种。

空间任一点  $M$  沿坐标面的三条交线方向各取的单位矢量, 称为坐标单位矢量。它的模等于 1, 并以各坐标变量正的增加方向作为正方向。一个正交曲线坐标系的坐标单位矢量相互正交并满足右手螺旋法则。

### 1.1.1 直角坐标系

直角坐标系中的三个坐标变量是  $x, y, z$ 。它们的变化范围是

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty$$

点  $M(x_1, y_1, z_1)$  是三个平面  $x = x_1, y = y_1$  和  $z = z_1$  的交点, 如图 1-1 所示。过空间点  $M(x_1, y_1, z_1)$  的坐标单位矢量记为  $a_x, a_y, a_z$ 。它们相互正交, 而且遵循右手螺旋法则:

$$\left. \begin{aligned} a_x \times a_y &= a_z \\ a_y \times a_z &= a_x \\ a_z \times a_x &= a_y \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

$a_x, a_y, a_z$  是常矢量, 其方向不随  $M$  点位置的变化而变化, 这是直角坐标系的一个很重要的特征。在直角坐标系内的任一矢量  $A$  可以表示为

$$A = a_x A_x + a_y A_y + a_z A_z \quad (1-2)$$

式中,  $A_x, A_y, A_z$  分别是矢量  $A$  在  $a_x, a_y, a_z$  方向上的投影。

在图 1-2 中, 由点  $M(x, y, z)$  沿  $a_x, a_y, a_z$  方向分别取微分长度元  $dx, dy, dz$ 。由  $x, x+dx, y, y+dy, z, z+dz$  这六个面决定一个直角六面体, 它的各个面的面积元是:

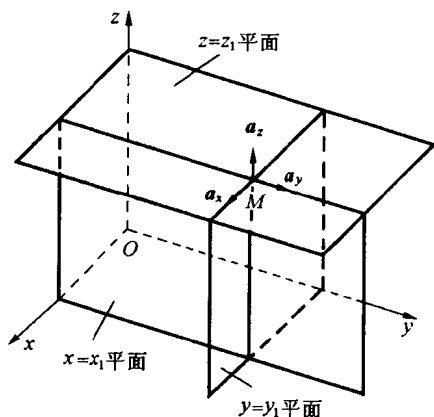


图 1-1 直角坐标系

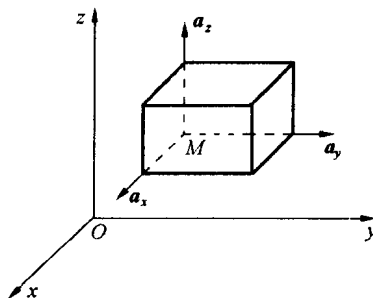


图 1-2 直角坐标系中的单位矢量、长度元、面积元和体积元

$$\left. \begin{aligned} dS_x &= dydz && (\text{与 } a_x \text{ 垂直}) \\ dS_y &= dxdz && (\text{与 } a_y \text{ 垂直}) \\ dS_z &= dxdy && (\text{与 } a_z \text{ 垂直}) \end{aligned} \right\} \quad (1-3)$$

六面体的体积元是:

$$dV = dxdydz \quad (1-4)$$

### 1.1.2 圆柱坐标系

圆柱坐标系中的三个坐标变量是  $r$ ,  $\varphi$ ,  $z$ 。与直角坐标系相同, 也有一个  $z$  变量。各变量的变化范围是:

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$$

在图 1-3 所示的坐标系中, 点  $M(r_1, \varphi_1, z_1)$  是以下三个面的交点:

- ①  $r = r_1$ , 这是以  $z$  轴为轴线, 以  $r_1$  为半径的圆柱面。 $r_1$  是  $M$  点到  $z$  轴的垂直距离。
- ②  $\varphi = \varphi_1$ , 这是以  $z$  轴为界的半平面。 $\varphi_1$  是  $xOz$  平面与通过  $M$  点的半平面之间的夹角。
- ③  $z = z_1$ , 这是与  $z$  轴垂直的平面。 $z_1$  是点  $M$  到  $xOy$  平面的垂直距离。

过空间点  $M(r, \varphi, z)$  的坐标单位矢量记为  $a_r$ ,  $a_\varphi$ ,  $a_z$ 。它们相互正交, 而且遵循右手螺旋法则:

$$\left. \begin{aligned} a_r \times a_\varphi &= a_z \\ a_\varphi \times a_z &= a_r \\ a_z \times a_r &= a_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

在柱坐标系中, 除  $a_z$  外,  $a_r$ ,  $a_\varphi$  的方向都随  $M$  点位置的变化而变化, 但三者之间总是保持上述的正交关系。在  $M$  点的任一矢量  $A$  可表示为:

$$A = a_r A_r + a_\varphi A_\varphi + a_z A_z \quad (1-6)$$

式中,  $A_r$ ,  $A_\varphi$ ,  $A_z$  分别是矢量  $A$  在  $a_r$ ,  $a_\varphi$ ,  $a_z$  方向上的投影。

如图 1-4 所示, 在点  $M(r, \varphi, z)$  处沿  $a_r$ ,  $a_\varphi$ ,  $a_z$  方向的长度元分别是

$$dl_r = dr, \quad dl_\varphi = r d\varphi, \quad dl_z = dz$$

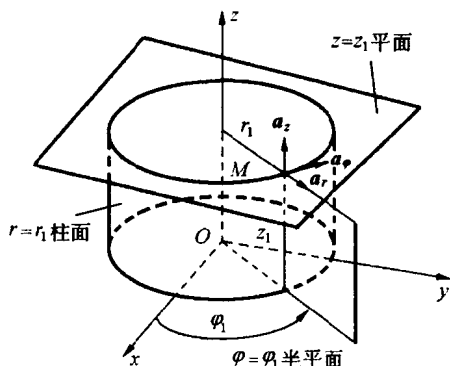


图 1-3 圆柱坐标系

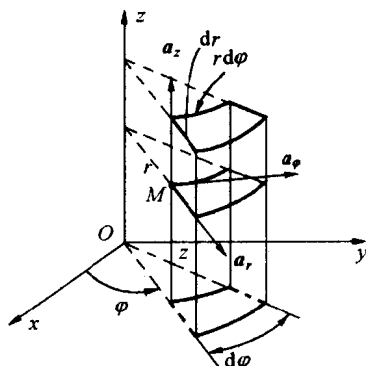


图 1-4 圆柱坐标系中的单位矢量、长度元、面积元和体积元

由  $r$ 、 $r+dr$ 、 $\varphi$ 、 $\varphi+d\varphi$ 、 $z$ 、 $z+dz$  六个坐标曲面决定的六面体上的面积元为：

$$\left. \begin{aligned} dS_r &= dl_\varphi dl_z = r d\varphi dz && (\text{与 } \mathbf{a}_r \text{ 垂直}) \\ dS_\varphi &= dl_r dl_z = dr dz && (\text{与 } \mathbf{a}_\varphi \text{ 垂直}) \\ dS_z &= dl_r dl_\varphi = r dr d\varphi && (\text{与 } \mathbf{a}_z \text{ 垂直}) \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

这个六面体的体积元是：

$$dV = dl_r dl_\varphi dl_z = r dr d\varphi dz \quad (1-8)$$

### 1.1.3 球坐标系

球坐标系中的三个坐标变量是  $r$ 、 $\theta$ 、 $\varphi$ 。与柱坐标系相似，也有一个  $\varphi$  变量。它们的变化范围是：

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

在球坐标中，点  $M(r, \theta, \varphi)$  由下述三个面的交点所确定：

- ①  $r = r_1$ ，这是以原点为中心，以  $r_1$  为半径的球面。 $r_1$  是点  $M$  到原点的直线距离。
- ②  $\theta = \theta_1$ ，这是以原点为顶点，以  $z$  轴为轴线的圆锥面。 $\theta_1$  是正向  $z$  轴与连线  $OM$  之间的夹角。

③  $\varphi = \varphi_1$ ，这是以  $z$  轴为界的半平面。 $\varphi_1$  是  $xOz$  平面与通过  $M$  点的半平面之间的夹角。坐标变量  $\varphi$  称为方位角，如图 1-5 所示。

在图 1-6 中，过空间任意点  $M(r, \theta, \varphi)$  的坐标单位矢量记为  $\mathbf{a}_r$ 、 $\mathbf{a}_\theta$ 、 $\mathbf{a}_\varphi$ 。它们相互正交，而且遵循右手螺旋法则：

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a}_r \times \mathbf{a}_\theta &= \mathbf{a}_\varphi \\ \mathbf{a}_\theta \times \mathbf{a}_\varphi &= \mathbf{a}_r \\ \mathbf{a}_\varphi \times \mathbf{a}_r &= \mathbf{a}_\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

在球坐标系中， $\mathbf{a}_r$ 、 $\mathbf{a}_\theta$ 、 $\mathbf{a}_\varphi$  的方向都因  $M$  点的位置变化而变化，但三者之间始终保持正交关系。在  $M$  点的任一矢量  $\mathbf{A}$  可表示为：

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_r A_r + \mathbf{a}_\theta A_\theta + \mathbf{a}_\varphi A_\varphi \quad (1-10)$$

式中,  $A_r$ 、 $A_\theta$ 、 $A_\varphi$  分别是矢量  $\mathbf{A}$  在  $\mathbf{a}_r$ 、 $\mathbf{a}_\theta$ 、 $\mathbf{a}_\varphi$  方向上的投影。

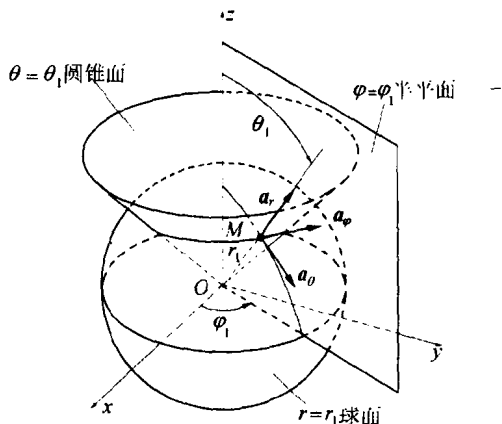


图 1-5 球坐标系

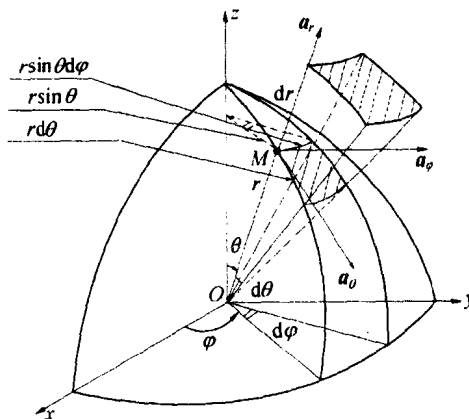


图 1-6 球坐标系的单位矢量、长度元、面积元、体积元

在点  $M(r, \theta, \varphi)$  处沿  $\mathbf{a}_r$ 、 $\mathbf{a}_\theta$ 、 $\mathbf{a}_\varphi$  方向的长度元分别是:

$$\left. \begin{aligned} dl_r &= dr \\ dl_\theta &= r d\theta \\ dl_\varphi &= r \sin \theta d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

由  $r$ 、 $r+dr$ 、 $\theta$ 、 $\theta+d\theta$ 、 $\varphi$ 、 $\varphi+d\varphi$  六个坐标面决定的六面体上的面积元是:

$$\left. \begin{aligned} dS_r &= dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi & (\text{与 } \mathbf{a}_r \text{ 垂直}) \\ dS_\theta &= dl_r dl_\varphi = r \sin \theta dr d\varphi & (\text{与 } \mathbf{a}_\theta \text{ 垂直}) \\ dS_\varphi &= dl_r dl_\theta = r dr d\theta & (\text{与 } \mathbf{a}_\varphi \text{ 垂直}) \end{aligned} \right\} \quad (1-12)$$

这个六面体的体积元是:

$$dV = dl_r dl_\theta dl_\varphi = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (1-13)$$

#### 1.1.4 三种坐标系的坐标变量之间的关系

为了区别球坐标系与柱坐标系中  $r$  变量及单位矢量  $\mathbf{a}_r$ , 下面球坐标中的变量  $r$  及单位矢量  $\mathbf{a}_r$  暂用  $R$  及  $\mathbf{a}_R$  代替。

由图 1-7 的几何关系, 可以直接写出三种坐标系的坐标变量之间的关系。

(1) 直角坐标系与柱坐标系的关系

$$\left\{ \begin{aligned} x &= r \cos \varphi & (1-14a) \\ y &= r \sin \varphi & (1-14b) \\ z &= z & (1-14c) \end{aligned} \right.$$

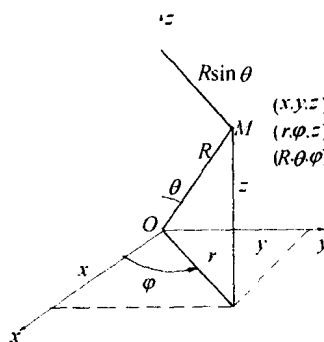


图 1-7 三种坐标系的坐标变量之间的关系

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} & (1-15a) \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (1-15b) \\ z = z & (1-15c) \end{cases}$$

## (2) 直角坐标系与球坐标系的关系

$$\begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi & (1-16a) \\ y = R \sin \theta \sin \varphi & (1-16b) \\ z = R \cos \theta & (1-16c) \end{cases}$$

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1-17a)$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \arcsin \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (1-17b)$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1-17c)$$

## (3) 柱坐标系与球坐标系的关系

$$\begin{cases} r = R \sin \theta & (1-18a) \\ \varphi = \varphi & (1-18b) \\ z = R \cos \theta & (1-18c) \end{cases}$$

$$R = \sqrt{r^2 + z^2} \quad (1-19a)$$

$$\theta = \arcsin \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \arccos \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad (1-19b)$$

$$\varphi = \varphi \quad (1-19c)$$

## 1.1.5 三种坐标系的坐标单位矢量之间的关系

由于直角坐标系及柱坐标系都有一个  $z$  变量, 因而有一个共同的坐标单位矢量  $a_z$ , 因此, 这两种坐标系的坐标单位矢量及其关系可以用图 1-8 表示出来。它们的坐标单位矢量之间的相互转换关系见表 1-1。

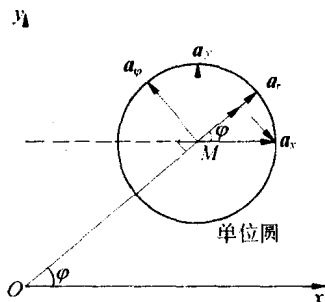


图 1-8 直角坐标系和柱坐标系中的坐标单位矢量及其关系

表 1-1 直角坐标系与柱坐标系坐标单位矢量之间的转换关系

|             | $a_x$           | $a_y$          | $a_z$ |
|-------------|-----------------|----------------|-------|
| $a_r$       | $\cos \varphi$  | $\sin \varphi$ | 0     |
| $a_\varphi$ | $-\sin \varphi$ | $\cos \varphi$ | 0     |
| $a_z$       | 0               | 0              | 1     |

例如, 由柱坐标单位矢量求直角坐标单位矢量  $\mathbf{a}_x$ , 可用下式表示:

$$\mathbf{a}_x = \mathbf{a}_r \cos \varphi - \mathbf{a}_\varphi \sin \varphi$$

反之, 求  $\mathbf{a}_r$  可用下式表示:

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_x \cos \varphi + \mathbf{a}_y \sin \varphi$$

由于柱坐标系和球坐标系都有一个  $\varphi$  变量, 因而有一个共同的坐标单位矢量  $\mathbf{a}_\varphi$ 。这两种坐标系的坐标单位矢量及其关系可用图 1-9 表示出来。它们的坐标单位矢量之间的相互转换关系见表 1-2。

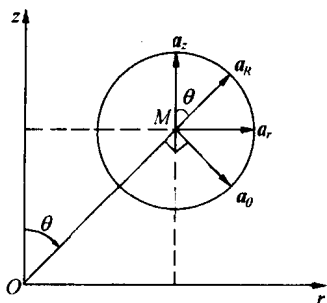


图 1-9 柱坐标系和球坐标系中的坐标单位矢量及其关系

表 1-2 柱坐标系和球坐标系坐标单位矢量之间的转换关系

|                      | $\mathbf{a}_r$ | $\mathbf{a}_\varphi$ | $\mathbf{a}_z$ |
|----------------------|----------------|----------------------|----------------|
| $\mathbf{a}_R$       | $\sin \theta$  | 0                    | $\cos \theta$  |
| $\mathbf{a}_\theta$  | $\cos \theta$  | 0                    | $-\sin \theta$ |
| $\mathbf{a}_\varphi$ | 0              | 1                    | 0              |

例如, 求  $\mathbf{a}_r$  或  $\mathbf{a}_R$  可分别表示为

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_R \sin \theta + \mathbf{a}_\theta \cos \theta, \quad \mathbf{a}_R = \mathbf{a}_r \sin \theta + \mathbf{a}_z \cos \theta$$

在直角坐标系和球坐标系中, 空间任一点  $M$  的坐标单位矢量及其关系要用立体图形才能表示出来。它们的坐标单位矢量之间的相互转换关系见表 1-3。

表 1-3 直角坐标系与球坐标系坐标单位矢量之间的转换关系

|                      | $\mathbf{a}_x$             | $\mathbf{a}_y$             | $\mathbf{a}_z$ |
|----------------------|----------------------------|----------------------------|----------------|
| $\mathbf{a}_R$       | $\sin \theta \cos \varphi$ | $\sin \theta \sin \varphi$ | $\cos \theta$  |
| $\mathbf{a}_\theta$  | $\cos \theta \cos \varphi$ | $\cos \theta \sin \varphi$ | $-\sin \theta$ |
| $\mathbf{a}_\varphi$ | $-\sin \varphi$            | $\cos \varphi$             | 0              |

例如, 求  $\mathbf{a}_x$  或  $\mathbf{a}_R$  可分别表示为:

$$\mathbf{a}_x = \mathbf{a}_R \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{a}_\theta \cos \theta \cos \varphi - \mathbf{a}_\varphi \sin \varphi$$

$$\mathbf{a}_R = \mathbf{a}_x \sin \theta \cos \varphi + \mathbf{a}_y \sin \theta \sin \varphi + \mathbf{a}_z \cos \theta$$

## 1.2 矢量代数

### 1.2.1 矢量加法和减法

矢量有大小和方向。例如矢量  $A$  可以写成

$$A = a_A A \quad (1-20)$$

式中,  $A$  是  $A$  的大小(也称模或长度), 而  $a_A$  是沿  $A$  方向且大小为 1 的无量纲单位矢量, 因此

$$a_A = \frac{A}{|A|} = \frac{A}{A} \quad (1-21)$$

任一矢量  $A$  在三维正交曲线坐标系中, 都可以给出三个分量。例如, 在直角坐标系中, 矢量  $A$  的三个分量分别是  $A_x$ 、 $A_y$ 、 $A_z$ 。

利用单位矢量  $a_x$ 、 $a_y$ 、 $a_z$  可以把矢量  $A$  分解为它的分量, 即

$$A = A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z \quad (1-22)$$

矢量  $A$  是三个模为  $A_x$ 、 $A_y$ 、 $A_z$  且分别平行于  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的矢量的和。

$A$  的模是

$$A = (A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)^{1/2} \quad (1-23)$$

任何两个矢量相加, 只要把两个矢量的相应分量相加, 就能得到它们的和:

$$A + B = (A_x + B_x)a_x + (A_y + B_y)a_y + (A_z + B_z)a_z \quad (1-24)$$

任何两个矢量相减, 只要把其中一个矢量变号后, 再相加就得到它们的差:

$$A - B = A + (-B) = (A_x - B_x)a_x + (A_y - B_y)a_y + (A_z - B_z)a_z \quad (1-25)$$

### 1.2.2 矢量的乘积

#### (1) 标量积或点积

任何两个矢量  $A$  和  $B$  的标量积是一个标量, 它的大小等于两个矢量的模与它们的夹角的余弦之乘积。标量积用记号  $A \cdot B$  表示, 则

$$A \cdot B = |A| |B| \cos(A, B) \quad (1-26)$$

标量积服从乘法交换律和分配律, 即

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (1-27)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (1-28)$$

对于坐标单位矢量有下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} a_x \cdot a_x &= a_y \cdot a_y = a_z \cdot a_z = 1 \\ a_x \cdot a_y &= a_y \cdot a_x = a_x \cdot a_z = a_z \cdot a_x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1-29)$$

标量积用矢量的分量表示的表达式为:

$$A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-30)$$

也就是说, 两个矢量的标量积等于这两个矢量对应的坐标分量相乘积之和。

#### (2) 矢量积或叉积

矢量  $A$  与  $B$  的矢量积记为  $A \times B$ 。

任何两个矢量  $A$  和  $B$  的矢量积是一个矢量, 它的大小等于这两个矢量作成的平行四边形的面积, 方向与这个平行四边形所在的平面的垂线方向平行, 且  $A$ 、 $B$ 、 $A \times B$  符合右手螺旋定则。即

$$|A \times B| = |AB \sin(A, B)| \quad (1-31)$$

矢量积不服从交换律, 但服从分配律, 即

$$A \times B = -B \times A \quad (1-32)$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C \quad (1-33)$$

对于坐标单位矢量有下列关系式:

$$\left. \begin{aligned} a_x \times a_y &= a_z \\ a_y \times a_z &= a_x \\ a_z \times a_x &= a_y \end{aligned} \right\} \quad (1-34)$$

$$a_x \times a_x = a_y \times a_y = a_z \times a_z = 0 \quad (1-35)$$

矢量积可以用下面的行列式来表示:

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) a_x + (A_z B_x - A_x B_z) a_y + (A_x B_y - A_y B_x) a_z \end{aligned} \quad (1-36)$$

### 1.3 标量函数的梯度

为了考察标量场在空间的分布和变化规律, 引进等值面、方向导数和梯度的概念。

#### 1.3.1 标量场的等值面

一个标量场可以用一个标量函数来表示。例如, 在直角坐标系中, 某标量  $u$  是场中点  $M$  的单值函数  $u = u(M)$ , 它可表示为

$$u = u(x, y, z)$$

而  $u(x, y, z)$  是坐标变量的连续可微函数,

$$u(x, y, z) = C \quad (C \text{ 为任意常数}) \quad (1-37)$$

随着  $C$  的取值不同, 得到一组曲面。在每一个曲面上的各点, 虽然坐标值  $x, y, z$  不同, 但函数值均为  $u = C$ 。这样的曲面称为标量场  $u$  的等值面。例如, 温度场中的等值面, 就是由温度相同的点所组成的等温面; 电位场中的等值面, 就是由电位相同的点所组成的等位面。式(1-37)称为等值面方程。

由等值面方程可知, 当  $C$  为一系列不同的数值时, 就得到一系列不同的等值面, 这簇等值面充满了整个标量场所在的空间, 而且互不相交。通过标量场的每一点有一个等值面; 任一点只在一个等值面上。

如果某一标量物理函数  $v$  仅是两个坐标变量  $x, y$  的函数, 这种场称为平面标量场, 则

$$v(x, y) = C \quad (C \text{ 为任意常数})$$

称为等值线方程，它在几何上一般表示一组等值曲线。场中的等值线互不相交。如地图上的等高线，地面气象图上的等温线、等压线等等都是平面标量场的等值线的例子。

标量场的等值面或等值线，可以直观地帮助我们了解物理量在场中的分布情况。例如，根据地形图上等高线及其所标出的高度，就能了解到该地区的高低情况；根据等高线分布的疏密程度可以判定该地区各个方向上地势的陡度。

### 1.3.2 方向导数

在标量场中，等值面和等值线可以形象地表示物理量  $u$  在场中的总的分布状况，这是一个整体性的了解。研究标量场的另一个重要方面，还要对它作局部的了解，如考察标量  $u$  在场中各个方向上的变化情况，为此，我们引入方向导数的概念。

#### (1) 方向导数的定义

设  $M_0$  为标量场  $u = u(M)$  中的一点，从  $M_0$  点出发引出一条射线  $l$ ，如图 1-10 所示。在  $l$  上  $M_0$  点邻近取一动点  $M$ ，记为  $\overline{M_0M} = \Delta l$ ，则

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{u(M) - u(M_0)}{\Delta l} = \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} \quad (1-38)$$

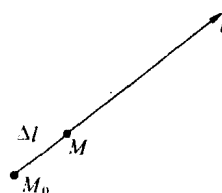


图 1-10 方向导数表示图

称为函数  $u(M)$  在点  $M_0$  处沿  $l$  方向的方向导数。 $\frac{\partial u}{\partial l} > 0$  时，

函数  $u(M)$  沿  $l$  方向是增加的； $\frac{\partial u}{\partial l} < 0$  时，函数  $u(M)$  沿  $l$  方

向是减小的； $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$  时，函数  $u(M)$  沿  $l$  方向无变化。在直角坐标系中，偏导数  $\frac{\partial u}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 、 $\frac{\partial u}{\partial z}$  就是函数  $u(M)$  沿三个坐标轴方向的方向导数。

#### (2) 方向导数的计算公式

在直角坐标系中，设函数  $u = u(x, y, z)$  在点  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  处可微；在射线  $l$  上  $M_0$  点邻近取一动点  $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ ，函数  $u$  从  $M_0$  点至  $M$  点的增量  $\Delta u$  为

$$u(M) - u(M_0) = \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z \quad (1-39)$$

$M_0$  点至  $M$  点的距离矢量  $\Delta l$  为

$$\Delta l = a_x \Delta x + a_y \Delta y + a_z \Delta z$$

若  $\Delta l$  与  $x$ 、 $y$ 、 $z$  轴的夹角分别为  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$ ，则

$$\Delta x = \Delta l \cdot a_x = \Delta l \cos \alpha$$

同理有

$$\Delta y = \Delta l \cos \beta, \quad \Delta z = \Delta l \cos \gamma$$

式中， $\cos \alpha$ 、 $\cos \beta$  和  $\cos \gamma$  也称为  $l$  的方向余弦。由方向导数定义式(1-38)及式(1-39)，略去下标  $M_0$  即得到直角坐标系中任意点沿  $l$  方向的方向导数表达式：

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \quad (1-40)$$