内容提要

本习题集包括关于集论初步、测度论、可测函数、勒贝格积分以及微分理论的习题。习题集的主要内容由中等难度和稍高难度的习题组成。习题集适于学习实变函数论的大学生作课堂讨论和独立作业之用。

实变函数论习题集

〔苏〕C.A.捷利亚柯夫斯基

周晓中 等译

*

吉林人民出版社出版 吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 4½印张 85,000字

1982年5月第1版 1982年5月第1次印刷

印数：1—16,230册

书号：13091·109 定价：0.38元

前　　言

实变函数论是数学的重要分支，在现代数学的各分支中有着广泛而深刻的应用．学习实变函数论，是掌握近代数学的必由之路．

目前，在我国综合性大学和师范学院，实变函数论是数学专业的一门独立学科；对数学知识有较高要求的专业，也学习它的某些专题．

本习题集包括通常实变函数论教本所述的基本内容．习题的大部分是中等难度和稍高难度的，可供学习实变函数论时上习题课之用和学生的独立作业之用．少量很难的习题，应当作为专修班的作业．

习题集中也有一部分习题是较简单的，它们可供初次接触这门课程的非数学专业的大学生以及中学教师进修时选用．

本书由周晓中、孙广成翻译，周晓中定稿．本书译文难免有不周之处．谨希读者不吝指正．

译　者

1981年5月于齐齐哈尔

原　　序

实变函数论在综合性大学和师范学院是作为数学专业学生的一门独立学科或者作为函数论与泛函分析、分析学Ⅲ等课的组成部分来学习的.

实变函数论的一些个别论题，首先是勒贝格积分，也为一些大学的力学和理论物理专门化的学生以及某些对数学知识有较高要求的高等技术学校的学生所学习.

这是由于在现代水平上研究广义分析学的一些分支时（指的是概率论、微分方程等的某些部分），需要勒贝格积分的知识.

近些年来，形成了一种把勒贝格积分同黎曼积分一起列入数学分析教程的趋势．例如，С.М.Никольский的〔8〕，В.А.Ильин和Э.Г.Позняк的〔4〕等数学分析的教科书就包括讲述勒贝格积分的章节.

勒贝格积分在分析学中之所以起着重要作用，是由于它能很好地处理极限过程的运算，加之，由勒贝格可积函数所形成的空间是完备空间.

在编写本习题集时，我们让勒贝格积分占据中心位置．并且，首先定义可测集合和可测函数，然后采取最常用的传统方法引进勒贝格积分.

本习题集的材料安排如下.

前两章是预备知识，涉及的是集合理论，因为为了学习实变函数论必须掌握集论的基础部分.

第三章先在集合的环上引进测度，然后进行测度的勒贝格扩张并研究了可测集的性质.

第四章讨论可测函数，特别讨论了可测函数列的收敛问题.

第五章给出勒贝格积分的定义，研究可积函数的性质和可积函数空间的性质，比较勒贝格积分和黎曼积分.

最后，在第六章考察勒贝格积分法和函数微分法之间的关系，研究黎曼-斯吉尔吉斯积分.

本习题集可供学习实变函数论时上习题课之用和学生的独立作业之用. 考虑到本习题集主要供读者初次接触实变函数论课程时使用，所以，在许多情形下，习题不是在最一般形式下提出的.

例如，从第二章开始，就假定所考虑的集合是处于有限维欧氏空间E_n中，虽然在需要利用集合拓扑性质的大多数习题中可以将所论集合代之以任意完备可分度量空间中的集合. 习题集中给出了E_n中集合的测度以及勒贝格积分的一般性定义，但是当需要测度的某种补充性质时，我们则限于古典的勒贝格测度. 在第六章，以及当比较勒贝格积分和黎曼积分时，仅考察一元函数.

要想简化与测度有关的习题时，可假定这些习题所涉及的乃是勒贝格测度. 此时，当然应去掉某些习题.

习题集中有一部分习题是十分简单的，但大部分则是中等难度和较高难度的习题. 也有一些很难的习题，它们的解答可以作为专修班作业.

大多数习题是要求证明某一断言. 仅当最终结果在习题的陈述中没有指明时，才在书后给出答案.

编写本习题集时主要利用了书末文献目录中的专著和习

题集. 许多习题取自И.П.Натансон的〔7〕和П.Халмош的〔12〕中所选配的练习题. 这两本书以及教科书С.В.Фомин的〔6〕,У.Рудин的〔11〕主文中的许多命题也被用来作为习题. 此外, 还用到习题集〔3〕和〔9〕.

有一部分习题是专为本习题集而编的. 编写本习题集时, 作者利用了自己在莫斯科物理技术学院讲授分析学Ⅲ和讲授实变函数论(勒贝格积分)的经验.

本习题集的习题包括通常实变函数论教本所述的基本内容, 但是在任何体系的教程中, 无论是简明的, 还是详尽的, 仍会有相当数量各种难度的习题其解答未被列入讲课中去, 而这些题的解答能使学生获得灵活掌握对象所必需的技能.

定理的发明者仅在下述情形下才予指出: 为了以后一提到发明者的姓名时就知道是指何断言而言.

各章节均从简短的引言开始, 在引言中给出必要的定义和记号. 有些定义是在习题正文中引进的. 第一次提到术语时, 该术语用斜体字标出. 在书末附有内容索引.

最后, 我要高兴地提到对本书编写工作有所帮助的下列诸位.

几年前我按照В.С.Владимир院士的建议开始了习题集的编写工作.我的学生К.И.Осколков和В.Н.Темляков随着书写读了手稿各章并提出了很多对改进本书有价值的建议.此外,К.И.Осколков提出了一些新颖的习题,它们已被列入本习题集.В.Л.Великин和В.И.Рубан向我介绍了由他们所编的在德聂伯罗彼特罗夫斯克国立大学习题课上使用的函数论与泛函分析习题集. 我从该习题集中选取了一些习题. 个别习题是Л.Д.Кудрявцев和Ю.Э.Липпус提供的.

目　　录

第一章　集合论初步

§1　集合运算

我们利用下列定义和记号.

$x\in A$　这记号表示元素x属于集合A，$x\,\overline{\in}\,A$　表示元素x不属于集合A*).

如果集合A的每一个元素都属于集合B，则A称为集合B的**子集**，并记为$A\subset B$或$B\supset A$.

如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称集合A和B相等，并记为$A=B$.

一个元素也不包含的集合称为空集并记为ϕ.

集合A和B的**并集**，是由属于至少A和B中之一的所有元素所组成的集合. 并集用$A\cup B$表示.

设$\{A_\alpha\}$是任意的有穷或无穷集合族，由至少属于族$\{A_\alpha\}$中一个集的所有元素组成的集合称为这集族的并集. 集合$A_1,\cdots,A_n$的并集记为$\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$，无穷集合序列$A_1,A_2,\cdots$的并集记为$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$. 集族$\{A_\alpha\}$的并集，其中指标$\alpha$取遍某一集合$\mathfrak{A}$，记为$\bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}}A_\alpha$，或者简单地记成$\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha$.

---

*)　为说话方便起见，集合有时说成集（译者注）

同时属于两个集合A和B的所有元素的集合，称为这两个集合的交集，交集用$A\cap B$表示。

对于任意的集合族，由属于族中所有集合的元素所组成的集合称为这一集合族的交集。集合$A_1, \cdots, A_n$的交集用$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$表示，无穷集合序列$A_1, A_2, \cdots$的交集记为$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$。集合族$\{A_\alpha\}$的交集，其中指标$\alpha$取遍某一集合$\mathfrak{A}$，记为$\bigcap_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_\alpha$或者$\bigcap_{\alpha} A_\alpha$。

由运算$\cup$和$\cap$的定义，可以直接推出它们的交换性和结合性：

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A,$$
$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C,$$
$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C.$$

如果集合A和B没有公共元素，亦即如果$A\cap B=\phi$，则称这两个集合是不相交的。

集合A中所有不属于集合B的元素所成的集合，称为A和B的差。这个集合记为$A\setminus B$。

属于集合A和B中任何一个而不属于另一个的所有元素的集合，称为集合A与B的对称差。对称差记为$A\triangle B$。由定义可以直接推出运算$\triangle$的交换性：$A\triangle B=B\triangle A$。

如果$A\subset X$，则称集合$X\setminus A$为集合A对于X的余集。有时，当明确所考虑的只是集合X的子集时，就略去《对于X》一词。

对于X的子集，引进定义在X上的特征函数如下：函数

$$\chi_A(x)=\chi(A, x)=\begin{cases}1, & 当\ x\in A,\\ 0, & 当\ x\overline{\in} A,\end{cases}$$

称为集合$A\subset X$的特征函数.

集合序列$A_1, A_2, \cdots$的上极限,是指由属于无穷多个A_n的所有元素所组成的集合;而属于从某个序号开始(因元素而异)的所有的A_n的元素所组成的集合,称为这个集合序列的下极限.上极限用$\overline{\lim\limits_n} A_n$表示,下极限用$\underline{\lim\limits_n} A_n$表示.显然,总有$\underline{\lim\limits_n} A_n \subset \overline{\lim\limits_n} A_n$.如果$\underline{\lim\limits_n} A_n = \overline{\lim\limits_n} A_n$,则称之为序列$A_1, A_2, \cdots$的极限,记为$\lim\limits_n A_n$.

如果对于所有的n,$A_n \subset A_{n+1}$,则称集合序列$A_1, A_2, \cdots$是递增的;如果对于所有的n,$A_n \supset A_{n+1}$,则称为递减的.

如无预先声明,本章习题中的集合均假定为任意集合.

1.1. 证明运算$\cup$和$\cap$的分配性:

(1) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

(2) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

1.2. 证明对于任意的集合族$\{A_\alpha\}$成立以下等式:

(1) $(\bigcup\limits_\alpha A_\alpha)\cap B=\bigcup\limits_\alpha(A_\alpha\cap B)$,

(2) $(\bigcap\limits_\alpha A_\alpha)\cup B=\bigcap\limits_\alpha(A_\alpha\cup B)$.

1.3. 证明: $(A\cup B)\setminus B=A$当且仅当$A\cap B=\phi$.

1.4. 证明: $(A\setminus B)\cup B=A$ 当且仅当$B\subset A$.

1.5. 证明: $A\cap B=A\setminus(A\setminus B)$.

1.6. 证明: $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$.

1.7. 证明: $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$.

1.8. 证明: $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.

1.9. 证明：$A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

1.10. 证明：$(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cap D)$.

1.11. 证明：$A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

1.12. 证明：如果$C=A\triangle B$，则$A\triangle C=B$.

1.13. 证明：$(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$. 这一性质允许去掉表明运算次序的括号而写成$A\triangle B\triangle C$.

1.14. 证明：集合X的一切子集所成的集合，关于运算$\triangle$组成一个群.

1.15. 试用集合的特征函数表达下列关系：

（1）$A=\phi$，（2）$A\subset B$，（3）$A=B$.

1.16. 利用集合A，B和A_α的特征函数表示下列各集合的特征函数：

（1）$A\cap B$，（2）$\bigcap\limits_{\alpha}A_\alpha$，（3）$A\cup B$，

（4）$\bigcup\limits_{\alpha}A_\alpha$，（5）$A\setminus B$，（6）$A\triangle B$.

将集合的运算用它们的特征函数来表达，而解习题1.1—1.3.

1.17. 证明：对于任意的集合A,B,C，下列等式成立(关于运算$\cap$和$\setminus$的分配性)：

（1）$(A\setminus B)\cap C=(A\cap C)\setminus(B\cap C)$,

（2）$(A\triangle B)\cap C=(A\cap C)\triangle(B\cap C)$,

（3）$(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$,

（4）$(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$,

（5）$(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$,

(6) $(A\triangle B)\setminus C=(A\setminus C)\triangle(B\setminus C)$.

1.18. 证明：下列等式在一般情况下是不对的：

(1) $A\cup(B\setminus C)=(A\cup B)\setminus(A\cup C)$,

(2) $A\cup(B\triangle C)=(A\cup B)\triangle(A\cup C)$,

(3) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$,

(4) $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$,

(5) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus(A\setminus C)$,

(6) $A\setminus(B\triangle C)=(A\setminus B)\triangle(A\setminus C)$,

(7) $A\triangle(B\cup C)=(A\triangle B)\cup(A\triangle C)$,

(8) $A\triangle(B\cap C)=(A\triangle B)\cap(A\triangle C)$,

(9) $A\triangle(B\setminus C)=(A\triangle B)\setminus(A\triangle C)$,

(10) $A\triangle(B\triangle C)=(A\triangle B)\triangle(A\triangle C)$.

能否断定这些关系式一端的集合包含另一端的集合？求使这些等式成立集合A,B,C所应满足的充分必要条件.

1.19. 令A_{kn}是依赖于两个下标的一组集合. 证明：总有

$$\bigcup_k\left(\bigcap_n A_{kn}\right)\subset\bigcap_n\left(\bigcup_k A_{kn}\right),$$

且在一般情况下不可以写等号.

1.20. 对于给定于$(-\infty,\infty)$上的非负函数$f(x)$和$g(x)$，在平面上作如下的集合$A(f)$和$A(g)$：坐标(x,y)是分别满足条件$0\leqslant y\leqslant f(x)$和$0\leqslant y\leqslant g(x)$的点的集合. 问：集合$A(f)\cup A(g)$和$A(f)\cap A(g)$对应于什么函数？

1.21. 令Γ_λ是平面上属于函数$x^{-\lambda}$，$0<x<\infty$，的图形的点集合. 求下列各集合：

（1） $\bigcap_{\lambda\geq 1}\Gamma_\lambda$；

（2） $\bigcup_{\lambda\geq 1}\Gamma_\lambda$；

（3） $\Gamma_\lambda\triangle\Gamma_\mu$，其中$\lambda\neq\mu$；

（4） $\Gamma_{\lambda_1}\triangle\Gamma_{\lambda_2}\triangle\Gamma_{\lambda_3}$，其中$\lambda_\kappa$不同．

1.22．给定集合A，B，C．利用集合论的运算写出下列元素所组成的集合：

（1）属于所有三个集合；

（2）至少属于其中的两个集合；

（3）属于这三个集合中的任何两个，但不属于所有的这三个；

（4）至少属于其中的一个集合；

（5）属于这三个集合中的任何一个，但是不属于其余两个．

1.23．由集合组成的非空类R称为环，如果该类关于运算$\triangle$和$\cap$是封闭的，亦即：如果对于R中的任何集合A和B，集合$A\triangle B$和$A\cap B$也属于R．证明：环关于运算$\cup$和$\setminus$也是封闭的．

1.24．证明：如果关于以下运算

（1）$\cup$和$\setminus$，（2）$\cup$和$\triangle$，（3）$\setminus$和$\triangle$

要求封闭性，我们得到集合环的等价定义．

1.25．证明：关于运算

（1）$\cup$和$\cap$，

（2）$\cap$和$\setminus$

封闭的集类可能不是环．

1.26．对于已给定的集合序列A_1，A_2，…作一个两两不

相交的集合序列$B_1, B_2, \cdots$，使得

$$B_n \subset A_n \quad 且 \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

1.27. 令$\{A_\alpha\}$是集X的任意子集族. 证明集合的余集的下列性质（对偶定律）：

$$(1)\ X - \left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) = \bigcap_\alpha (X - A_\alpha),$$

$$(2)\ X - \left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right) = \bigcup_\alpha (X - A_\alpha).$$

1.28. 证明：如果A和B都是集X的子集，则

（1）$A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$,

（2）$X \setminus (A \setminus B) = (X \setminus A) \cup B$,

（3）$(X \setminus A) \triangle (X \setminus B) = A \triangle B$.

1.29. 在以下各条件下，分别求集列（集合序列）A_1, $A_2, \cdots$的上极限和下极限：

（1）当n是偶数时，$A_n = B$，当n是奇数时，$A_n = C$；

（2）A_n是分母为n的所有有理数的集合，亦即形式为k / n的数的集合，其中k是任意的整数；

（3）A_n是满足条件$|x - v_n| \leqslant 1$的数x的集合，其中$\{v_n\}$是区间$(0,1)$中全体有理数的任意序列.

1.30. 证明：如果集列$\{A_n\}$是单调的，亦即集合A_n是递增的或递减的，则

$$\varliminf_n A_n = \varlimsup_n A_n.$$

同时，如果A_n递增，则$\lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，而如果$A_n$递减，

则$\lim\limits_{n} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

1.31．证明：恒有

(1) $\overline{\lim\limits_{n}} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$,

(2) $\underline{\lim\limits_{n}} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

1.32．令$A_1, A_2, \cdots$是集X的子集序列．证明集合的余集的下列性质：

(1) $X \setminus \overline{\lim\limits_{n}} A_n = \underline{\lim\limits_{n}} (X \setminus A_n)$,

(2) $X \setminus \underline{\lim\limits_{n}} A_n = \overline{\lim\limits_{n}} (X \setminus A_n)$.

1.33．令在集A上给定了取有限值的函数$f(x)$．对于每个数t，我们定义集合A_t为那些使$f(x) \leqslant t$的点$x \in A$所成的集合．证明：

(1) 如果$s < t$，则$A_s \subset A_t$;

(2) $\bigcup\limits_{t} A_t = A$, $\bigcap\limits_{t} A_t = \phi$;

(3) $\bigcap\limits_{t>s} A_t = A_s$.

证明：对具有这三条性质的集$A_t \subset A$的每一个集族而言，存在A上的唯一的一个函数$f(x)$，使得对于所有的t，集合A_t就是使$f(x) \leqslant t$的点x的集合.

§2 集合的势

两个集合称为等价的或者有相同的势，如果在它们的元

素之间可以建立一对一的对应．如果集合A和B等价，则记成$A \sim B$．

从定义直接推出：有限集合（亦即有有限个元素的集合）是等价的当且仅当它们有同样多个元素．

与自然数的集合等价的集合称为**可列集**．换言之，集合称为可列的，如果它的所有元素可以表为无穷序列的形式a_1，a_2，…．

如果集合是有限的或可列的，则说它不多于可列（或不大于可列）．

说一个集合有**连续统的势**，是指它等价于闭区间$[0,1]$的所有点的集合，或者，换言之，如果该集等价于满足条件$0 \leqslant x \leqslant 1$的所有实数$x$的集合．

如果集A等价于集B的某一子集，而集A和B本身并不等价，则说B的势比A的势大．

下面所提习题的解答应该与连续统假设无关，亦即与是否存在如下的集合无关：这集合的势大于可列集的势但是小于连续统的势．

1.34．令集合A有n个元素，$n=1,2,3,\cdots$．在A的子集和这些子集（对于A）的余集之间建立一对一对应后，证明：

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n,$$

其中C_n^k是从n个元素中取k个元素的组合数．

1.35．令集合A有n个元素，$n=0,1,2,\cdots$（如果$n=0$，则$A=\phi$）．证明：集A的一切子集的集合有2^n个元素．利用这一结果证明：

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$, $n = 1, 2, \cdots$.

1.36. 证明：每一个无限集均包含可列子集.

1.37. 在闭区间$[0,1]$和开区间$(0,1)$之间建立一对一的对应.

1.38. 证明：如果集A是无限集，而B可列，则$(A \cup B) \sim A$.

1.39. 证明：一集合当且仅当它与自己的某一真子集等价时是无限集（真子集即不与它本身重合的子集）.

1.40. 证明：两两不相交的有限集的可列并是可列的.

1.41. 证明：有限个或可列个可列集的并是可列的.

1.42. 证明：全体有理数的集合是可列的.

1.43. 证明：所有以有理数a和b为端点的区间(a, b)的集合是可列的.

1.44. 证明：有限维欧几里得空间中所有坐标均为有理数的所有点的集合是可列的.

1.45. 证明：所有代数数的集合是可列的（一数如果它是整系数代数多项式的根，则称之为代数数）.

1.46. 证明：单调函数$f(x)$的间断点的集合至多是可列集.

1.47. 任意两两不相交区间(a, b)的类至多是可列集.

1.48. 在闭区间$[0,1]$上定义的函数$f(x)$在每一点有局部极小值（亦即对每个$x_0 \in [0,1]$，可找到ε，对于满足条件$|x - x_0| < \varepsilon$的所有x都有$f(x) \geqslant f(x_0)$）. 证明：函数f取值的集合不大于可列集.

1.49. 设一集合中任何两点之间的距离都超过某一固定数$a > 0$. 证明：平面上任意的此种集合不大于可列集.

1.50. 设A是$(-\infty, \infty)$上的点的可列集. 证明：存

在数α，使得集A与集$\{x+\alpha\}$，$x\in A$，没有公共点（后一集即A平移α所得之集）.

1.51. 设A是$(-\infty,\infty)$上点的可列集. 证明：对每个$\alpha>0$可以选到点x，使得初始点为x步长为α的均匀网亦即集合$\{x+\alpha m\}$，$m=0,\pm1,\pm2,\cdots$，不包含集A的任何一个点.

1.52. 在集A上给定一致有界的无限函数族$\{f(x)\}$. 证明：对于每一个可列集$B\subset A$，从这族中可以选出一函数列，这函数列在每一点$x\in B$收敛.

1.53. 证明：如果$A\setminus B\sim B\setminus A$，则$A\sim B$.

1.54. 证明：如果$A\subset B\subset C$且$A\sim C$，则$A\sim B$.

1.55. 证明：如果两个集合中的每一个都有与另一个集合等价的子集，则这两个集合本身是等价的.

1.56. 证明：连续统是不可列的.

1.57. 证明：任一区间$(a,\ b)$，$-\infty\leqslant a<b\leqslant\infty$的点所成的集合有连续统的势.

1.58. 证明：可列个具有连续统势的集的并集仍有连续统的势.

1.59. 证明：单位正方形$\{0\leqslant x\leqslant1,\ 0\leqslant y\leqslant1\}$的点$\{x,y\}$的集合有连续统的势.

1.60. 证明：有限维欧几里得空间的所有点的集合有连续统的势.

1.61. 证明：连续统个有连续统的势的集合的并集仍有连续统的势.

1.62. 设序列由0和1组成. 证明所有这种序列所成的集合有连续统的势.

1.63. 证明（0，1）中如下之数所成的集合：在该数的