现代微分几何学概论

苏 步 青 编 著

現代微分几何学概論

苏步青 編著

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是著者在1959～1961年間在复旦大学开設現代微分几何专門化課程的教材，經几次修改、补充而成。內容共四章。第一章叙述外微分法在李群論和流形論中的应用，作为后面三章的准备。第二章叙述黎曼空間几何学的几个基本問題，包括嘉当的活动标形法、运动群和安裝問題等三方面內容。第三章仿射联絡空間和射影联絡空間，根据嘉当方法介紹了这些空間的基本性质，并討論了仿射运动群和射影运动群。最后一章介紹共形联絡空間的有关問題。

本书供高等学校数学力学系作专业教材，也可供研究工作者作参考。

現代微分几何学概論

苏步青 編著

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行　各地新华书店經售

上海洪兴印刷厂印刷

*

开本850×1168 1/32　印张9 16/32　字数206,000

1961年12月第1版　1961年12月第1次印刷

印数 1—8,000

統一书号：13119·442

定　　价：（十四）1.65元

序　言

本书是1959年到1961年在复旦大学为数学系几何組研究生和五年級学生开設的专业課教材，內容經过好几次的修改、补充，才变成現在的形式。最初，为了要介紹黎曼空間运动群的最近发展，曾經想过以矢野健太郎著《李导数論及其应用》（阿姆斯特丹1955年版）一书为中心进行教学，后来感到我們五年級学生只念过黎曼几何学的一点初步知識和菲尼可夫著《嘉当的外形式法》（莫斯科1948年版；中譯本，北京1956年版）一书的第二、第三和第六章，难以接受这方面的丰富內容，所以改从黎曼几何学中的几个基本問題說起；这样，就形成了現在的第二章，內容包括嘉当的活动标形法、运动群、安装問題等三方面。在本书第三章里，介紹仿射联絡空間和射影联絡空間，根据嘉当的方法引进这些空間的基本性质，为后半章討論仿射运动群和射影运动群做了准备。在一方面，鉴于近年来在微分几何学的一些研究中經常遇到共形联絡空間有关的問題，感到有必要添加一章来介紹盛行于本世紀三、四十年代的共形联絡几何学；这一章即第四章的內容主要是根据佐佐木重夫著《共形接續几何学》（东京1948年版）一书編成的。在另一方面，今年是第三次开設这門課程了，又在原有教材的基础上增加了第一章，即：外微分法在李群論和流形論中的应用，这部分是摘譯了法瓦著《局部微分几何学教程》（巴黎1957年版；俄譯本，莫斯科1960年版）的导論部分，添写的目的是为了叙述李群論的几个基本定理和流形論的基础，使讀者能够把关于外微分形式法和黎曼空間几何学的已有知識进一步巩固和发展起来，以便于

学习以后三章的内容。

在編写本书的过程中，除上述的三本著作外，还参考了外形式法、拓扑学、連續群(特别是，爱里·嘉当著《活动标形法的有限連續群論和微分几何学》，巴黎1951年版)、仿射联絡空間、射影联絡空間、一般空間的微分不变式論等方面的著书和論文。谷超豪、胡和生两位同志給本书的編写和取材提供了許多宝貴意見和倡議，并且为第二章关于安装与变形問題的部分执了笔。对他們的这番协助在这里表示謝意。

从上面所述可以看出，本书是"集腋成裘"的結果；尽管著者在編写时力求說理平易，行文通俗，要使讀者尽快地領会現代微分几何学概論，但是限于著者的学术水平，本书內容一定还有不少欠妥甚至錯誤之处，希望讀者予以指正。

苏步青 1961年在上海

目 录

序言

第一章 外微分法在李群論和流形論中的应用

§1 拓扑学的一些基本概念……1
§2 尺度空間……5
§3 变换、变换群、拓扑群、李群……11
§4 李群的微小变换、相对支量和絕对支量……17
§5 李的第一定理……20
§6 参数群……25
§7 嘉当的結构方程……27
§8 一个流形的接触元素,变换群的拓广……29
§9 子流形概論……38
§10 嘉当的活动标形法……44

第二章 黎曼空間几何学的几个基本問題

§1 黎曼空間和張量分析……49
§2 列維-齐維塔的平行性……56
§3 黎曼曲率……61
§4 比安基的恒等式……72
§5 开玲方程与李导数……76
§6 王宪鍾的定理……85
§7 爱果洛夫的空隙性定理……88
§8 安装与变形問題……96
§9 外形式方法的一些补充知識……98
§10 高維欧氏空間曲面的基本定理和結构方程……103
§11 和乐标形、直交标形、标形的变换……106
§12 結构方程(高斯-柯达齐-利齐方程)……107
§13 曲面的秩数……110

§ 14 关于 $V_m \subset E_{m+1}$ 的研究和毕兹定理……112
§ 15 尺度的秩数……114
§ 16 高斯方程与柯达齐方程的相关性……115
§ 17 尺度秩数大于 2 和阶数等于 1 的黎曼空間 V_m……117
§ 18 E_{m+1} 中的可变形超曲面的分类……120
§ 19 关于阶数大于 1 的安装問題的一些結果……131

第三章 仿射联絡空間和射影联絡空間

§ 1 一般概念……136
§ 2 和乐群……140
§ 3 綫性仿射联絡、等价性……141
§ 4 曲率張量和撓率張量……143
§ 5 張量的共变导数……145
§ 6 比安基恒等式……148
§ 7 平行推移、測地綫……150
§ 8 基本定理……152
§ 9 在点邻域內对联絡的研究……155
§ 10 測地的貼合……157
§ 11 平行的反变向量場……161
§ 12 可分层的空間……164
§ 13 等仿射联絡……169
§ 14 尺度的联絡。爱丁頓、外尔和爱恩斯坦的空間……171
§ 15 射影联絡……174
§ 16 射影張量……178
§ 17 仿射运动群……181
§ 18 有撓率仿射联絡空間所能容許的仿射运动群的最大阶数……184
§ 19 无撓率非平坦仿射联絡空間所能容許的仿射运动群的最大阶数……189
§ 20 某些对称仿射联絡空間……193
§ 21 射影运动群……201
§ 22 容許阶数大于 n^2-2n+5 的射影运动群的对称仿射联絡空間……204

§23 容許阶数大于 n^2-n+1 的仿射运动群的 n 維对称仿射联絡空間……214

第四章 共形联絡空間

§1 麦比烏斯变换和麦比烏斯几何学……221
§2 共形联絡空間的概念……229
§3 魏伯倫的标形……233
§4 共形張量和共形导数……236
§5 自然标形……240
§6 曲率張量……243
§7 滿足結构方程的共形联絡空間……247
§8 黎曼空間的共形几何学……250
§9 法共形联絡空間……255
§10 关于三維法共形联絡空間的嘉当問題……259
§11 平坦的共形联絡空間与麦比烏斯空間的关系……261
§12 亚等价的类型……267
§13 等价問題的解……272
§14 微小共形变换与李导数……280
索引……287

第一章

外微分法在李群論和流形論中的应用*

§1 拓扑学的一些基本概念

設 $E, F, \cdots$ 是一些元素 $(e, e', \cdots)$, $(f, f', \cdots)$, $\cdots$ 的集；我們采用下述的集論中的一些記号和說明：

$e \in E$ 表示元素 e 属于集 E，讀作 e 属于 E；

$E \subset F$ 表示 E 的元素也是 F 的元素，称 E 为 F 的子集；这和 $F \supset E$ 是等价的；

$E \cup F$ 或 E 和 F 的和，表示元素属于 E 或 F 的集；

$E \cap F$ 或 E 和 F 的交集，表示元素同时属于 E 和 F 的集；

对沒有任何元素，或空集，用 $\varnothing$ 来表达；

用 $E-F$ 表示在 E 的元素中不属于 F 的元素的集；如果 $F \subset E$，那末称 $E-F$ 为 F 关于 E 的补集或简称 F 的补集，并記作 CF。

現在，設 E 不是空集且 Ω 是 E 的一組子集，并假定它滿足下列两条件：

1. Ω 的任何多个集的和也属于 Ω；空集也属于 Ω。

2. Ω 的有限个集的交集也属于 Ω；集 E 整个属于 Ω。

我們就說 Ω 的这些集是在 E 上所定义的拓扑的**开集**，称 E 为

---

* 本章的內容是摘譯法瓦(J. Favard)著《局部微分几何讲义》(巴黎 1957 年版)的导論部分。

拓扑空間，E 的元素为点。

对一个不是空集的 E 界定了一組满足条件 1 和 2 的开集以后，点集 E 就具有了一个拓扑結构。比如，Ω 是从整个集 E 和空集所形成的(最弱拓扑)，或者 Ω 是由 E 内仅包含一点的所有集决定起来的(最强拓扑即**离散拓扑**)。

設 H 是 E 内的子集，O 是包含 H 的一个开集；E 内包含开集 O 的所有子集称为集 H 的**邻域**。如果 H 仅由一点 p 形成，就称它的所有邻域为点 p **的邻域**。

任何一个开集是其各点的邻域，并且反过来也成立。

当 H 是一点的邻域时，称这点为 H 的**内点**。集 H 的所有内点的集即 H 的**内域**可以是空集。

当一点是 H 的补集 $CH=E-H$ 的内点时，称这点为关于 H 的**外点**。

如果两个拓扑空間 E 和 E' 之間存在映 E 入 E' 的一对一的映象

$$p'=f(p),\quad p=f^{-1}(p'),$$

使得空間 E 的开集移到 E' 的开集，并且反过来，E' 的开集移到 E 的开集，就称它为**同胚映象**。

开集的补集称为**閉集**。根据补集的定义，从条件 1 和 2 获得：

1° 有限个閉集的交集是閉集；全空間 E 是閉集。

2° 任何多个閉集的和是閉集；空集是閉集。

如果一点 p 的任何邻域包含集 $H(\subset E)$ 的点，那末称 p 为集 H 的**接触点**。集 H 的接触点集称为它的**閉包**，記作 $\overline{H}$；同样可这样說，对于 $\overline{H}$ 的各点存在 H 的一些点，使它們随意接近那一点，因为不属于 $\overline{H}$ 的任何点关于 H 一定是外点的緣故。

集的閉包是閉集；閉集的閉包就是它本身，而且反过来，如果一个集和它的閉包一致，那末一定是閉集。我們还可証明：如果

$H\subset J$，那末 $\overline{H}\subset\overline{J}$；此外，$\overline{H\cup J}=\overline{H}\cup\overline{J}$。

同时属于 $\overline{H}$ 和 $\overline{CH}$ 的点称为集 H 的**边界点**；边界点的集形成边界，从而边界是集 $\overline{H}\cap\overline{CH}$。

如果 $J=\overline{H}$，就称集 H 在闭集 J 中是**稠密的**。如果它在 E 內是稠密的，就說它是处处稠密的。

我們还要指出两个拓扑空間的直积的定义。設 $p_i\subset E_i$ $(i=1,2)$，称点偶 (p_1, p_2) 的集为两集 E_1 和 E_2 的积 $E_1\times E_2$。当 E_1 和 E_2 是拓扑空間时，取 E_i 的开集 O_i 来作具有形式 $O_1\times O_2$ 的和集，并且定义 $E_1\times E_2$ 內的拓扑。容易驗証：这时，条件 1 和 2 都是滿足的。具有这拓扑的集 $E_1\times E_2$ 称为空間 E_1 和 E_2 的**直积**或**拓扑积**。

設 E 是一个拓扑空間，$H\subset E$。現在設想集 H 本身是一个空間。命 O 表示空間 E 的任何开集，而且以集 H 內所有作 $H\cap O$ 型的子集作为集 H 的开集，显然仍旧滿足条件 1 和 2。因此，H 形成一个拓扑空間。这样得到从拓扑空間 E 誘导出的拓扑空間 H，称为**相对拓扑空間**。显然可見，集 A 是相对空間 H 的閉集的充要条件是 $A=H\cap F$，这里 F 是空間 E 的一个閉集。

具有这种拓扑的集 H 称为空間 E 的**子空間**。設 J 是空間 E 的子空間 H 內的一个子集，在 J 內由空間 H 誘导出的拓扑重合于在 J 內由空間 E 直接誘导出的拓扑。

現在考察在空間 E 內定义的函数 $p'=f(p)$，其中 $p\in E$ 而且函数值属于拓扑空間 E' $(p'\in E')$ (E' 也可重合于 E)。如果对点 $p'=f(p)$ 的每个邻域 $V'(p')$ 可以建立这样的对应邻域 $V(p)$，使得

$$q'=f(q)\in V' \quad \text{当} \quad q\in V,$$

从而 $f(V)\subset V'$ [或 $V\subset f^{-1}(V')$]，那末我們說：这函数在点 p 是**連續的**。換言之，无論 V' 是点 p' 的怎样的一个邻域，集 $f^{-1}(V')$ 总是点 p 的邻域。

設 $p\in\overline{H}$ $(\subset E)$ 并且 f 是在点 p 的連續函数，我們容易証明 $f(p)\in\overline{f(H)}$. 实际上，假如不是这样的話，那末至少有一个点 p' 的邻域 V' 不包含 $f(H)$ 的点，于是作为点 p 的邻域的 $f^{-1}(V')$ 将不包含 H 的点，这样就与条件不符。

如果映空間 E 入 E' 的映象 $p'=f(p)$ 在点 p 是連續的，并且映空間 E' 入 E'' 的映象 $p''=g(p')$ 在点 p' 也是連續的，那末这两个映象組合的結果 $p''=h(p)=g[f(p)]$ 在点 p 是連續的。实际上，設 V'' 是点 $p''=h(p)=g(p')$ 的邻域，那末 $V'=g^{-1}(V'')$ 是点 p' 的邻域，而且 $V=f^{-1}(V')=f^{-1}g^{-1}(V'')=h^{-1}(V'')$ 是点 p 的邻域。

如果映象 $p'=f(p)$ 在 E 內是連續的 $(p'\in E')$，那末空間 E' 的所有开集的**完全原象**是空間 E 的开集。这是由于任何开集是它的各点的邻域，从而它具有同一性质的原象，即开集。

反过来，如果在映象 $f(p)$ 之下空間 E' 的任何开集是以 E 的开集为其原象的，那末 f 在 E 內是連續函数。实际上，設 V' 是点 $p'=f(p)$ 的邻域，它包含开集 O' 并且我們有

$$p\in f^{-1}(O')\subset f^{-1}(V').$$

可是集 $f^{-1}(O')$ 是开集而且包括 p，所以 $f^{-1}(V')$ 是点 p 的邻域。

我們轉到补集，就可以这样說：为了函数 $p'=f(p)$ 在 E 內是連續函数的充要条件是 E' 內任何閉集的完全原象必須成为 E 的閉集。

設 H 是空間 E 的子集；如果看作单独在子空間 H 上的函数 $f(p)$ 在点 p 是連續的，就称它**在 H 上是連續的**。以上一切概念和結果都可以用相对拓扑的术語加以敘述。

作为一个应用，将描述以后常要用到的在拓扑空間上的一个运算。

考察一个拓扑空間 E 并假定它的点分布在几个班級里，各个

班級至少包含一点而且任何点只属于一个班級。对包含点$(p, q, \cdots)$的班級 r 作出对应，使 $c=f(p)=f(q)=\cdots$ 而且只有空間 C 的唯一点 c 与之对应（其中两个不同班級对应于两个不同点）；在空間 C 內凡使 $f^{-1}(\Gamma)$ 是 E 的开集的任何集 Γ 都定义为开集，而这样确定 C 的拓扑。容易証明，条件 1 和 2 都成立，并且函数 $c=f(p)$ 是連續的。特别是，任何邻域 $V_C(c)$ 包含 c 在內的一个开集 Γ，而且它的原象是包含 r 的点 $p, q, \cdots$ 在內的一个开集。由此可見，c 的任何邻域包含某些邻域 $V_E(p), V_E(q), \cdots$ 的和的象。我們說，空間 C 是从 E 根据同一班級 r 的一些点的叠合映象得来的。例如，設 E 是实数直綫。設 $x, y\in E$，$x-y$ 是一个整数，那末我們就說 x 与 y 叠合。这样得到的叠合空間 C 称为模 1 实数直綫。

設映空間 E 入 E' 的一对一的映象 $p'=f(p)$ 是互相連續的，就是它和反映象 $p=f^{-1}(p')$ 都是連續的；那末这个映象是同胚的，并且反过来也成立。同胚的概念可以适用于相对拓扑，就是說：如果空間 E 到 E' 的映象 $p'=f(p)$ 建立起子空間 $H\subset E$ 的点与子空間 $H'\subset E'$ 的点間的一对一的对应，而且函数 f 和 f^{-1} 順次在空間 H 和 H' 里是連續的，那末 H 和 H' 是同胚的。容易看出，同胚是可迁的，就是：如果 E 同胚于 E' 且 E' 同胚于 E''，那末 E 也同胚于 E''. 因此，同胚是等价性关系；这是拓扑学中基本的等价性关系。

在空間 E 到 E' 的連續映象 $p'=f(p)$ 中，如果在点 p 存在一个邻域 $V(p)$ 使它同胚于它的象 $V'=f(V)$，那末就說这映象在点 p 是局部同胚的。显然可見，同胚是在任何点局部同胚的，但是映象 $p'=f(p)$ 可以在每一点是局部同胚的，而不是同胚的。

§2 尺度空間

設 E 是一个点集，在 E 內界定了两个不同点或一致点 p 和 q

的一个实函数 $\rho(p, q)$，称为点 p 与点 q 的距离，使满足下列性质：

1° 从 $\rho(p, q)=0$ 得出 p 与 q 一致，且反过来，如果 p 与 q 一致，那末 $\rho(p, q)=0$。

2° 三角形不等式成立：$\rho(p, q) \leqslant \rho(p, r)+\rho(q, r)$，其中 p, q, r 是集 E 的任何三点。当 $p=q$ 时，从 $2\rho(p, r) \geqslant 0$ 得知两点的距离是正的或是 0. 根据第1°性质两个不同点的距离是正的。

在三角形不等式里置 $r=p$，对于任何点 p 和 q 就有 $\rho(p, q) \leqslant \rho(q, p)$. 可是也成立相反的不等式 $\rho(p, q) \geqslant \rho(q, p)$，所以 $\rho(p, q)=\rho(q, p)$. 这样一来，距离是点偶的非負对称函数。对任一正数 ρ 作出满足 $\rho(p, q)<\rho$ 的 E 的点 q，其集称为中心 p 和半徑 ρ 的球。

有了这概念，在集 E 內就可能导入拓扑結构。設 O 是 E 的子集，如果对任何点 $p \in O$ 存在中心 p 的一个球（点 p 的球邻域），使它的所有点都属于 O，就称 O 为开集。

从三角形不等式容易看出，球是开集，并且显然可見，前节的条件 1 成立。关于条件 2，我們考察 n 个开集 O_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 的交集 O，它的任何一点 p 作为属于 O_i 的一点是 O_i 內半徑 ρ_i 的球心。所以，以 p 为中心和最小 ρ_i 为半徑的球被包含在集 O 內，因而 O 是开集，就是說：条件 2 成立。这样一来，集 E 是决定于其尺度即其两点的距离的拓扑空間，从而称为**尺度空間**。一个尺度空間的任何子空間也是尺度空間。

在集 E 上，可以按照两种不同尺度誘导出同一拓扑。为两种尺度誘导出同一拓扑的充要条件是：按第一尺度决定的任何球要包含着按第二尺度决定的同一中心的球，而且反过来也是这样。因为在第一拓扑中的球邻域都是这个拓扑的开集，我們直接看出它們也是第二拓扑中的开集，并且反过来也成立。为树立所述的結果，只須注意无論在这个拓扑或那个拓扑里任何开集都是一些

球的和就够了。

設 A 是尺度空間 E 的一个点集，如果这集的两点 p 和 q 的距离有上限的話，就称它为集 A 的**直徑**。如果这样的上限不存在，就称这集有无穷大直徑。

現在考察尺度空間的一些性质。

1° 取两个不同点 p 和 q，并設 $\rho(p, q)=d$. 中心在 p 和 q 而且半徑是 $d/2$ 的两球沒有共同点，而它們是 p 和 q 的邻域。所以尺度空間的任何两个不同点 p 和 q 有不相交的邻域。滿足这个条件的拓扑空間称为**可分离的空間**或**豪斯道夫**(Hausdorff)**空間**。从可分离性推出一个事实：单由一个点构成的集是閉集。

設 $\{p_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 是一个点叙列，如果存在一点 p，使它的每一邻域 V 有对应的指数 N，而当 $n>N$ 时 $p_n \in V$，我們就說点叙列 $\{p_n\}$ 是收斂的，也說点叙列 $\{p_n\}$ 收斂于点 p，写作

$$\lim_{n\to\infty} p_n=p \quad 或 \quad p_n \to p.$$

不难証明，如果 $p_n \to p$ 且 $\{p_m\}$ 是点叙列 $\{p_n\}$ 的一个子点列，那末 $p_m \to p$.

2° 中心 p 的球 $\rho(p, q)<\rho$ 的閉包是被包含在集 $\rho(p, q)\leqslant\rho$ 之內的。这是由于，以 r 表示 $\rho(p, r)>\rho$ 的一点，那末以 r 为中心且以 $\rho(p, r)-\rho$ 为半徑的球不包含球 $\rho(p, q)<\rho$ 的任何点，所以 r 不属于这球 $\rho(p, q)<\rho$ 的閉包。

因此，尺度空間內一点的任何邻域包含閉邻域。

具有这性质的拓扑空間称为**正則空間**。

3° 設 $p'=f(p)$ 是在尺度空間 E 定义的連續函数，值 p' 也是在尺度空間 E' 的。函数在点 p 的連續性可以表达为下述詞句：对于任何 $\varepsilon>0$ 必有对应的数 $\delta>0$，使得

从 $\rho(p, q)<\delta$ 导出 $\rho(p', q')<\varepsilon$ $(p'=f(p), q'=f(q))$.

方便上，以 $H(p, \delta)$ 表示 $\rho(p, x)<\delta$ 的点 x 組成的邻域。我們容

易証明：設 E 是一个尺度空間，$F\subset E$；則 F 是一个閉集的充要条件是：F 內任意一个收斂点叙列的极限仍属于 F。实际上，設 F 是一个閉集，且 $p_n\in F$，$p_n\to p\in E$。于是任意一个邻域 $H(p,\varepsilon)$ 必含有点叙列 $\{p_n\}$ 的点，也就是含有集 F 的点。因此 $p\in\overline{F}=F$。反之，設 F 內所有的收斂点叙列的极限点都属于 F，$p\in\overline{F}$。对每一个自然数 n 而言，必定存在 $p_n\in H\left(p,\dfrac{1}{n}\right)\cap F$。显然 $\{p_n\}$ 收斂于 p。所以 $p\in F$，即 $F=\overline{F}$。

又可証明：設 E 和 E' 是两个尺度空間，f 是一个映 E 入 E' 的映象。于是 f 是一个連續映象的一个充要条件是：条件 $p_n\in E$，$p\in E$，$p_n\to p$ 蘊涵 $f(p_n)\to f(p)$。

实际上，充分条件：設 F 是空間 E' 的一个閉集，$p_n\in f^{-1}(F)$，$p_n\to p\in E$。于是 $f(p_n)\to f(p)$。但是 $f(p_n)\in F$，所以 $f(p)\in\overline{F}=F$。于是 $p\in f^{-1}(F)$。因此 $f^{-1}(F)$ 是閉的，即 f 是一个連續映象（参閱 §1）。

必要条件：設 f 是一个連續映象，$p_n\in E$，$p_n\to p\in E$。于是对任何一个正数 ε 而言，必存在一个正数 δ 使得 $f(H(p,\delta))\subset H(f(p),\varepsilon)$。又对这个正数 δ 而言，必定存在一个自然数 N，使得当 $n>N$ 时，$p_n\in H(p,\delta)$，即 $f(p_n)\in H(f(p),\varepsilon)$。因此 $f(p_n)\to f(p)$。

4° 如果一个尺度空間里存在稠密的可数集 D，就称这样的空間是**可分离的**。考察以 D 的点 r 为中心且以有理数 σ 为半徑的球 $S(r,\sigma)$；由于正有理数是可数的，这些球集也是可数的。

任何一个开集 O 必定是这种球的和。事实上，集 O 的点 p 是被包含在 O 內的半徑 ρ 的球的中心；因为 D 是稠密的，中心 p 和半徑 $\dfrac{\rho}{3}$ 的球內必有 D 的点 r。当取定有理数 σ，使 $\dfrac{\rho}{3}<\sigma<\dfrac{2\rho}{3}$ 时，中心 r 和半徑 σ 的球被包含在 O 之內而含有 p。因此，集 O 是球

$S(r, \sigma)$的和。

可分离空間 E 的任何子空間 H 是可分离的。实际上，只要作出这样的球 $S(r, \sigma)$ 使它与 H 的交集不是空集，我們就获得在 H 内是稠密的可数集。

以后所論的空間常假定是可分离的。

5° 可分离尺度空間具有下列性质：对于沒有共同点的两个閉集，常可找出包含各个閉集在内而且沒有共同点的两个开集。

具有这些性质的拓扑空間称为**正規空間**。

現在要叙述一种重要的尺度空間即紧致空間的概念。設$\{p_n\}$是可分离尺度空間 E 的一个点叙列；如果它收斂于点 p，就看出：对任何正数 ε 必定可找自然数 N，使得

$$\rho(p_n, p) < \frac{\varepsilon}{2} \quad 当 \quad n > N,$$

所以根据三角形不等式得到

$$\rho(p_m, p_n) < \varepsilon \quad 当 \quad m, n > N.$$

当一个叙列$\{p_n\}$对任何正数 ε 必定有对应的自然数 N，使得最后不等式成立时，我們說它满足**柯西条件**。所有的收斂叙列满足柯西条件，但是反过来却不成立；反之，当在空間 E 满足柯西条件的任何叙列都是收斂叙列时，我們說 E 是**完整空間**。

这个概念并不是拓扑的；反之，在一个空間内如果点的任何一个无限叙列含有收斂的子叙列，这个性质显然对同胚映象是守恒的，因而我們說这空間是**紧致的**。这个事实也可以說成这样：不同点的任何无限叙列至少有一个**極限点或凝聚点**，就是这样的点，它的任何邻域含有叙列的无限个点。

紧致空間是完整的。

当一个空間 E 的子空間 C 是紧致空間时，称这集 C 是紧致的。

我們把有限个点組成的集和空集都算在紧致集之内。