

[美] R. Bellman 著

控制过程的数学理论引论

第 一 卷

蒲富全 邵明锋 姜启源 译

人 民 教 育 出 版 社

57.93
285
3:1

控制过程的 数学理论引论

第一卷

线性方程和二次判据

[美] R. Bellman 著

蒲富全 邵明锋 姜启源 译

人民教育出版社

本书论述了控制过程理论的数学理论。原书共三卷，本书根据第一卷译出。

书中一、三两章概述了控制理论的思想。二、六两章分别复习了二阶线性微分方程和向量、矩阵的一些基本性质。在四、五、七、八各章着重介绍了变分法、动态规划，并把它应用于研究一维和多维的控制过程。第九章介绍了泛函分析的某些基本内容，并应用它去解决前面各章中的基本变分问题。

本书可作为应用数学、自动控制及其它有关专业的教师、研究生和高年级大学生的教学参考书。

控制过程的数学理论引论

第一卷

线性方程和二次判据

[美] R. Bellman 著

蒲富全 邵明铎 姜启源 译

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

开本 850×1168 1/32 印张 7.75 字数 180,000

1981年12月第1版 1983年5月第1次印刷

印数 00,001—7,700

书号 13012·0709 定价 1.05 元

译者的话

众所周知, R. Bellman 首先总结出动态规划原理。用动态规划研究控制过程, 已经解决了大量理论及计算问题。R. Bellman 的动态规划原理与苏联 Л. С. Понтрягин 的极大值原理是现代控制论中两个重要的基本理论。我们翻译这本书的目的是想借此机会把 R. Bellman 在控制论方面的一些工作介绍给广大读者。本书作为了解用变分法和动态规划研究控制过程的一本入门书, 将会开阅读者的思路, 启发读者深入研究问题。本书内容叙述得简明扼要, 这是作者的写作风格。书中大量练习及综合练习是正文的延续和补充, 读者会从中获得许多新知识。

这部书共分三卷, 本书是第一卷, 主要研究线性系统和二次判据。

由于我们的水平有限, 翻译中错误及不妥之处在所难免, 希望读者随时指出, 我们十分欢迎。

参加本书翻译工作的还有陈水莲以及陈凯、刘坤林、葛玉安、金善银等。

1981 年 12 月

序 言

近十五年来，在科学的蓬勃发展中出现了一门新的数学学科——控制过程理论。它的数学前景无限宽广，它的应用范围和重要性在逐年增加。因此我们确信，控制理论的初级课程对于培养纯粹数学、应用数学、工程、数学物理、经济、生物、运筹学及有关领域的新一代研究生是必须的。

与自动化不断发展的趋势有紧密联系的理论在飞速发展，使得这类课程必须建立在广阔的基础上。在这第一卷里将要涉及包括变分法、动态规划、离散控制过程、数字计算机的应用和泛函分析的基本内容。

介绍这些内容的根本课题是要提供一种严格的、又是初等的叙述，使之适合于仅仅具有微积分、微分方程和矩阵论课程训练的大学生。只要仔细安排课文的讲授次序，并且把注意力集中到恰如其分的问题上，我们的目的是能够达到的。

在第一、三章中，我们要对系统和稳定性研究中的一些问题作纯属叙述性的讨论，它们将作为纯理论分析的背景。第二章复习二阶线性微分方程的一些性质，这些将在第四、五章中用到。

在第四章，我们开始从数学上讲述二次泛函

$$J(u, v) = \int_0^T (u^2 + v^2) dt$$

的极小问题，式中 u 和 v 由线性微分方程

$$\frac{du}{dt} = au + v, \quad u(0) = c$$

相联系。

我们将寻求一种间接的方法，以使用简单的方式严格地处理这个问题。首先，用形式的方法得到 Euler 方程，这是一个基本的必要条件。然后我们用一种简单的直接计算来证明这个方程有唯一的解，并且这个解就是要求的二次泛函的极小值。

所用的分析方法是经过仔细选择的，以便在第七章中能推广到处理多维问题。

第五章包括动态规划的初步介绍，并应用于前章已解决的问题。利用变分法所得到的显式解答，容易说明动态规划方法给出了有效的结果。我们再次沿同样的途径：首先形式地导出所要求的结果，然后证明用这个方式得到的结果是正确的。

这一章对离散控制过程也作简要的讲述。动态规划方法特别适用于这种重要类型的过程。并且，如果从一开始就以严格的方式应用动态规划来处理这些问题，也不会有困难。

在叙述了标量情形下的变分法和动态规划这两种对偶性的方法之后，我们就可着手处理多维最优化问题。为此，必须使用某些向量-矩阵符号和矩阵的一些基本性质，在第六章，我们复习矩阵论的有关内容，它们将用于如下形式的微分方程

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^N a_{ij} x_j, \quad x_i(0) = c_i, \quad i=1, 2, \dots, N.$$

紧接着将研究二次泛函

$$J(x, y) = \int_0^T [(x, x) + (y, y)] dt$$

的极小问题，其中 x 和 y 由微分方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax + y, \quad x(0) = c$$

相联系，这里 x 和 y 是 N 维向量。

借助于矩阵分析这一有力工具，使得我们能把第四、五章中的方法在第七、八章中直接加以推广，即分别用变分法和动态规划方

法来处理多维问题。

这里的新问题是，要得到高维最优化问题的有效数字解是困难的。这个问题在标量的情形中完全被掩盖了。在每一章中，将对属于这方面的某些数值分析问题作简短的讨论。

最后一章(第九章)中，我们用泛函分析方法直接对原始变分问题进行研究。本书中只有这部分内容是不独立的，因为这一章的第一部分需要 Hilbert 空间的基本知识，并且本章的最后部分需要得更多些。

每章内各节的末尾有一些说明课文的习题。在各章的最后附有一些问题，它们或者是一些比较难的练习，或者是牵涉到一些为了避免过分增加数学难度而不得不从课文中略去的题目。对这些习题，我们给出了原始出处和较详细结果的参考文献。如果教师认为该班级具有与此相当的水平，很多这样的资料可以在课堂介绍。

这部书的第二卷将用解析的方法和计算的方法专门讨论更一般的确定型的最优问题。这里包含有非线性微分方程和更一般类型的泛函。

第三卷将开始讨论随机控制过程，重点放在 Markov 决策过程和具有二次判据的线性方程的控制过程。

洛杉矶，加利福尼亚。R. Bellman

目 录

序言	1
第一章 什么是控制理论	1
1.1 引言	1
1.2 系统	1
1.3 示意图	2
1.4 数学系统	4
1.5 系统的性能	4
1.6 改进系统的性能	5
1.7 更详细的分解图	5
1.8 不确定性	6
1.9 结论	7
文献与注释	7
第二章 二阶线性微分方程和差分方程	9
2.1 引言	9
2.2 二阶常系数线性微分方程	9
2.3 非齐次方程	10
2.4 两点边界条件	11
2.5 一阶变系数线性微分方程	13
2.6 Riccati 方程	14
2.7 变系数线性方程	15
2.8 非齐次方程	16
2.9 Green 函数	18
2.10 线性方程组	20
2.11 差分方程	21
综合练习	23
文献与注释	25

第三章 稳定性和控制	26
3.1 引言	26
3.2 稳定性	27
3.3 数值解与稳定性	30
3.4 摄动法	31
3.5 稳定性的基本定理	32
3.6 稳定设计	33
3.7 稳定控制	34
3.8 比例控制	35
3.9 讨论	37
3.10 问题的解析提法	37
3.11 一维系统	39
综合练习	40
文献与注释	42
第四章 连续变分过程;变分法	45
4.1 引言	45
4.2 极小值是否存在?	46
4.3 Euler 方程	48
4.4 一个不可靠的论证	49
4.5 Haar 方法	49
4.6 Euler 方程的解	50
4.7 解的极小性质	51
4.8 另一种方法	52
4.9 渐近控制	52
4.10 无限控制过程	54
4.11 $J(u)$ 的极小值	55
4.12 两点约束	57
4.13 终端控制	58
4.14 Courant 参数	59
4.15 逐次逼近	60

4.16	$\min \int_0^T [u'^2 + g(t)u^2] dt$	61
4.17	讨论	63
4.18	控制过程的简化	63
4.19	讨论	65
4.20	$J(u)$ 的极小值	66
4.21	修匀过程 (A Smoothing Process)	67
4.22	Green 函数的变号-递减性质	68
4.23	约束	69
4.24	极小性质	71
4.25	关于 λ 的单调性	71
4.26	单调性的证明	72
4.27	讨论	73
4.28	更普遍的二次变分问题	73
4.29	变分方法	74
4.30	极小性质的证明	75
4.31	存在性与唯一性	75
4.32	伴随算子	76
4.33	Sturm-Liouville 理论	78
4.34	利用不等式求极小	80
4.35	多重约束	82
4.36	未知的外力	83
	综合练习	84
	文献与注释	92
第五章	动态规划	94
5.1	引言	94
5.2	控制——多级决策过程	94
5.3	预备概念	96
5.4	形式推导	97
5.5	最优原理	99
5.6	讨论	100

5.7 简化	101
5.8 证实	101
5.9 无限过程	102
5.10 $T \rightarrow \infty$ 时的极限性态	102
5.11 两点边值问题	103
5.12 时变的控制过程	104
5.13 整体约束	105
5.14 离散控制过程	107
5.15 准备工作	108
5.16 递推关系式	109
5.17 递推显式	109
5.18 r_N 的性态	110
5.19 趋于稳态的性态	111
5.20 等价线性关系	111
5.21 局部约束	112
5.22 连续作为离散的极限	114
5.23 开关式控制	114
5.24 存在未知影响时的控制	116
5.25 变分法与动态规划的对比	117
综合练习	118
文献与注释	125

第六章 矩阵理论和线性微分方程组复习 128

6.1 引言	128
6.2 向量-矩阵表示法	129
6.3 逆矩阵	130
6.4 两个矩阵的乘积	131
6.5 内积和范数	133
6.6 正交矩阵	135
6.7 标准形	135
6.8 $\text{Det } A$	137

6.9 对称矩阵函数	137
6.10 正定矩阵	139
6.11 A^{-1} 的表示法	140
6.12 向量与矩阵的微分和积分	140
6.13 矩阵指数	142
6.14 存在性与唯一性的证明	142
6.15 Euler 方法和渐近性态	145
6.16 $x'' - A(t)x = 0$	146
6.17 $x' = Ax + By, y' = Cx + Dy$	147
6.18 矩阵 Riccati 方程	148
6.19 $dX/dt = AX + XB, X(0) = C$	148
综合练习	149
文献与注释	153
第七章 用变分法研究多维控制过程	155
7.1 引言	155
7.2 Euler 方程	156
7.3 A 为定常的情况	157
7.4 $\text{ch } ST$ 的非奇异性	159
7.5 极小值	159
7.6 渐近性态	159
7.7 A 为时变的情形	160
7.8 $X'_2(T)$ 的非奇异性	161
7.9 极小值	161
7.10 计算问题	162
7.11 $\min_y \int_0^T [(x, x) + (y, y)] dt, x' = Bx + y, x(0) = c$	163
综合练习	164
第八章 用动态规划研究多维控制过程	167
8.1 引言	167
8.2 $\int_0^T [(x', x') + (x, Ax)] dt$	168

8.3 相应的 Riccati 方程	169
8.4 渐近性态	169
8.5 严格性	170
8.6 时变情形	171
8.7 计算	172
8.8 逐次逼近	173
8.9 策略空间中的逼近	173
8.10 收敛的单调性	174
8.11 分块	175
8.12 幂级数展开	176
8.13 外推	177
8.14 用不等式求极小	179
8.15 离散控制过程	181
8.16 病态线性方程组	183
8.17 Lagrange 乘子	186
8.18 维数的降低	186
8.19 逐次逼近法	189
8.20 分布参数	191
8.21 轻微纠缠系统	192
综合练习	194
文献与注释	200
第九章 泛函分析	204
9.1 起因	204
9.2 Hilbert 空间 $L^2(0, T)$	205
9.3 内积	206
9.4 线性算子	206
9.5 向量 Hilbert 空间	207
9.6 二次泛函	208
9.7 极小函数的存在性与唯一性	209
9.8 极小函数方程	211

9.9 在微分方程中的应用	213
9.10 数值解法	214
9.11 一个简单的代数例子	215
9.12 方程 $x + \lambda Bx = c$	216
9.13 积分方程 $f(t) + \lambda \int_0^T K(t, t_1)f(t_1)dt_1 = g(t)$	217
9.14 Lagrange 乘子	218
9.15 算子 R_a	219
9.16 有约束的控制	220
9.17 $\varphi(c)$ 和 $\psi(c)$ 的性质	223
9.18 小结	223
综合练习	224
文献与注释	227
名词索引	228

第一章 什么是控制理论

1.1 引言

这部书是专门讲述一门新的数学理论——控制过程理论的书的第一卷。这儿虽然不预备讨论后面将要讲述的方法和概念的许多可能的应用，但是给读者提供一些数学理论的科学背景还是有好处的。这样做有很多理由。首先，一个学生如果对他正在从事的研究工作的总的方向没有一个清楚的认识，就很容易被形式的分析推导弄得不知所措；其次，控制理论仍是一个正在飞速发展的领域，其中大部分尚待开拓。我们希望读者勇敢地踏入新的领域，而不要在已开拓好了的领域中跋涉，因为我们深深地感到，最有意义和最引人入胜的数学将会从研究当代需要控制和决策的那些重要的领域中产生出来。

最后，还有一个求知欲的问题。一个人想具有受过很好教育的声望，他就应当通晓他所专长的领域中的原始知识及其应用。

1.2 系统

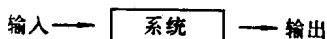
控制论的中心问题是研究系统。控制论实际上可以说是对系统的“照管”和“哺养”。从直观上，我们可以把系统看成是一组相互作用的元件，它们取决于各个输入，并且产生一系列输出。在发展的现阶段，包括系统的任何正式定义在内，都还没有多少成果。

许多不同类型的系统我们都是熟悉的：如钟表这样的机械系统，收音机这样的电系统，汽车这样的电—机械—化学系统，工厂这样的工业系统，医院这样的医疗系统，大学这样的教育系统，人体这样的生命系统，计算机这样的信息过程系统以及尚可列举众多的其它系统。从所列的这一串简例中就已足可说明，“系统”是当

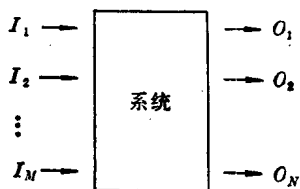
今文化中最深邃的概念之一。人类文化所产生的这个分支将在很长一段时期内支配未来的文明世界。特别，它是发展丰富多采的数学概念的无限泉源。

1.3 示意图

从直观或描述的角度看，用方块图来表示一个系统是很方便的。初步的想法是：



通常认为这个图示太粗了，我们喜欢用下面的图来表示这样一个事实：一个系统具有各式各样输入和输出^①。



有时还必须用更完善的表示法来代替这样的图。譬如在化学疗法中，我们常常用下面的图来研究注入到血液中去药物及其副产品的的时间过程。这里 S_1 表示心脏，它象一支唧筒，通过两个不同

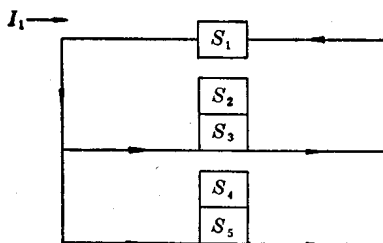
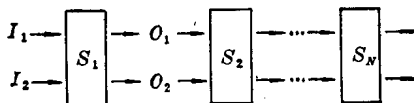


图 1.1

① 以后图中常用 S 表示系统(System), I 表示输入(Input), O 表示输出(Output)。——译者

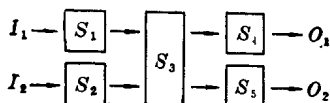
的器官—— $[S_2, S_3]$ 和 $[S_4, S_5]$ 的细胞外组织和细胞内组织输送血液。

在多级生产过程或化学分离过程中，我们通常使用如下的示意图：



它表示 I_1, I_2 输入子系统 S_1 ，产生输出 O_1, O_2 ； O_1, O_2 又是子系统 S_2 的输入，如此下去，直到最后的输出为止。

在大气物理、地质勘探和心病学中，我们常常用如下的图：



它清楚地表明，在内部有我们既不能直接考查，也不能直接影响的子系统。与 S_3 的控制与辨识相关的问题是十分有前途的课题。

上面这些类型的示意图是为了帮助我们思考而设计的。我们这么说的意思是，必须注意不要对它们太看重了。在某一种情形下有用的表示法，在另一种情形下完全可能把人引入歧途。例如一个集中参数的电系统，在某一个频率范围内可以确切地用电阻、电感和电容表示出来，而在另外的频率范围却需要用完全不同的表示法。

简明性对科学的进步是不可少的，但是系统基本上都是不简单的，系统的控制同样也是不简单的。因此有必要经常检查我们的概念和方法，以便断定我们确实没有采纳自以为是的预言，和使问题得不到解决的简化假设。

数学模型一经建立，方程式便是问题的全部，由于它已处于主