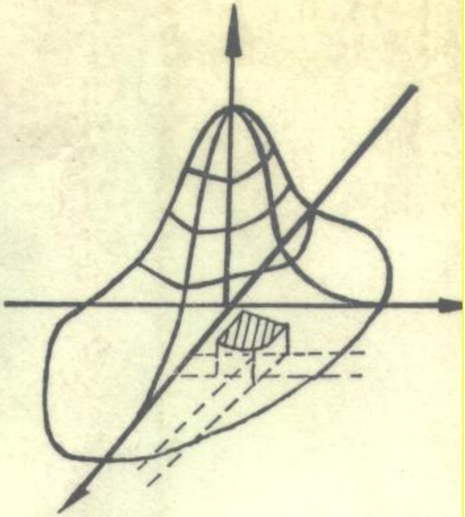

机械故障诊断丛书

故障诊断的数学力学基础

虞和济　傅润兰　李沈

冶金工业出版社

机 械 故 障 诊 断 丛 书

故障诊断的
数学力学基础

虞和济　傅润兰　李　沈　编

冶 金 工 业 出 版 社

内 容 简 介

本书是《机械故障诊断丛书》之十。本书为机械故障诊断技术提供数学和力学的基本知识，着重介绍新的较深入的数学、力学的原理、概念和方法。供从事设备管理和维修的工程技术人员阅读并可作大专院校有关专业的参考书。

机 械 故 障 诊 断 丛 书

故障诊断的数学力学基础

虞和济 傅润兰 李 沈 编

冶金工业出版社出版发行

（北京北河沿大街嵩祝院北巷39号）

新华书店总店科技发行所经销

冶金工业出版社印刷厂印刷

850×1168 1/32 印张 9 5/8 字数 247 千字

1991年1月第一版 1991年1月第一次印刷

印数00,001～5,000册

ISBN 7-5024-0755-3

TH·44 定价6.30元

前　言

机械故障诊断丛书共十本包括故障诊断的基本原理、故障诊断的振动理论基础、故障诊断的振动测试技术、故障诊断中的信号处理与应用、失效分析与故障预防、振动诊断的工程应用、故障诊断的声学方法、故障诊断的热象技术、故障诊断的专家系统和故障诊断的数学力学基础。本书是第十本。这套丛书是为大学本科或专科毕业后在工厂从事设备管理和维修工作的工程技术人员学习故障诊断这门新学科而编写的。本书为故障诊断技术提供数学和力学的基本知识，着重叙述新的较深入的数学力学的原理、概念和方法。

本书的第1、2、4章由虞和济编写，第3章由胡伽罗和虞和济编写，第5章由傅润兰编写，第6、7章由李沈编写，全书由虞和济主编。

编者

1989.7

目　录

1 积分变换

在故障信号的处理中，经常要对波动的数据或随时间变化的一些波形进行谱分析，即表示为不同频率、不同振幅的简谐波的线性叠加，也就是从时域分析变换为频域分析，对于无限区间上的函数用某种特殊的积分形式来表示，最常用的几种积分变换是傅里叶变换、拉普拉斯变换和**Z**变换，本章介绍这三种变换。

1·1 傅里叶变换

通常，首先介绍用于周期函数的傅里叶级数，然后把它引伸到非周期函数，从而推导出傅里叶变换或傅里叶积分，在本丛书的第五本中已介绍过。但是傅里叶变换对周期的和非周期的函数都是有效的，实际上傅里叶级数可以看作傅里叶变换的特例，这里直接从傅里叶变换出发来讨论。

1·1·1 傅里叶变换对

下列关系式被称为傅里叶变换对：

$$\boldsymbol{F}(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t \tag{1-1}$$

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{F}(j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1-2}$$

式1-1叫做傅里叶变换，它表示给定时间函数$f(t)$来求频率谱$\boldsymbol{F}(j\omega)$，这就是时域到频域的变换；式1-2叫做傅里叶逆变换，它表示时间函数$f(t)$是频率分量的无限和，这就是又从频域变换到时域，是由频谱重新组成时间函数。$\boldsymbol{F}(j\omega)$是ω的复函数（复数的不变量用大写黑体字表示，是矢量），时间函数（时间历程）可以直接测量，而频谱则不能测量，但可以通过傅里叶变换得到。

傅里叶变换存在的条件：

（1）　　$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt$　存在

（2）$f(t)$ 在（$-\infty$，∞）上满足狄利克莱条件：$f(t)$ 只有有限个极值点，只有有限个第一类间断点。

傅里叶变换的记号：

$\boldsymbol{F}(j\omega)$ 是 $f(t)$ 的傅里叶变换写作

$$\boldsymbol{F}(j\omega)=\mathscr{F}f(t) \tag{1-3}$$

$f(t)$ 是 $\boldsymbol{F}(j\omega)$ 的傅里叶逆变换写作

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}\boldsymbol{F}(j\omega) \tag{1-4}$$

$f(t)$ 与 $\boldsymbol{F}(j\omega)$ 构成傅里叶变换对写作

$$f(t)\leftrightarrow\boldsymbol{F}(j\omega) \tag{1-5}$$

1·1·2　傅里叶变换的实部和虚部

一般，$\boldsymbol{F}(j\omega)$ 为 $j\omega$ 的复函数，可写成实部和虚部之和：

$$\boldsymbol{F}(j\omega)=R(\omega)+jX(\omega) \tag{1-6}$$

式中 $R(\omega)$ 和 $X(\omega)$ 都是 ω 的实函数，利用欧拉公式可把式 1-1 写成

$$\boldsymbol{F}(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)(\cos\omega t-j\sin\omega t)\mathrm{d}t \tag{1-7}$$

一般，$f(t)$ 是时间的实函数，所以有

$$R(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t \tag{1-8}$$

$$X(\omega)=-\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t \tag{1-9}$$

$R(\omega)$ 是 ω 的偶函数，$X(\omega)$ 为 ω 的奇函数。把式 1-6 代入式1-2，再引用欧拉公式可得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[R(\omega)+jX(\omega)](\cos\omega t+j\sin\omega t)\mathrm{d}\omega \tag{1-10}$$

由于奇函数积分为零，可得

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega \qquad (1-11)$$

对于实时间函数$f(t)$，式1-8、1-9和1-11是傅里叶变换对的另一种形式。函数$\boldsymbol{F}(j\omega)$ 称为傅里叶谱，它给出在各个频 率分量上的相对幅值$\sqrt{R^2(\omega)+X^2(\omega)}$和相角$\tan^{-1}[X(\omega)/R(\omega)]$。

1·1·3 傅里叶变换的性质

若$f_1(t)$、$f_2(t)$ 的傅里叶变换是$\boldsymbol{F}_1(j\omega)$、$\boldsymbol{F}_2(j\omega)$

1·1·3·1 线性

傅里叶变换的运算是线性的，即

$$a_1f_1(t)+a_2f_2(t)\leftrightarrow a_1\boldsymbol{F}_1(j\omega)+a_2\boldsymbol{F}_2(j\omega) \qquad (1-12)$$

其中a_1和a_2是常数

1·1·3·2 褶积（或卷积）

定义卷积为$f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 则其傅里叶变换为

$$\boldsymbol{F}_1(j\omega)\cdot\boldsymbol{F}_2(j\omega)$$ 简记为

$$f_1(t)*f_2(t)\leftrightarrow\boldsymbol{F}_1(j\omega)\cdot\boldsymbol{F}_2(j\omega) \qquad (1-13)$$

1·1·3·3 时间平移（延迟）

$$f(t-\tau)\leftrightarrow e^{-j\omega\tau}\boldsymbol{F}(j\omega) \qquad (1-14)$$

1·1·3·4 频移（调频）

在频率上移动时，$\boldsymbol{F}(j\omega)$ 变为$\boldsymbol{F}[j(\omega-\omega_0)]$，可以证明它是$f(t)e^{-j\omega_0t}$的傅里叶变换，简记为

$$f(t)e^{j\omega_0t}\leftrightarrow\boldsymbol{F}[j(\omega-\omega_0)] \qquad (1-15)$$

若$f(t)$ 是时间的实函数，则$f(t)e^{j\omega_0t}$就不是实函数了。

1·1·3·5 时间或频率的标度变化

在时域中改变标度时有

$$f(bt)\leftrightarrow\frac{1}{|b|}\boldsymbol{F}\left(\frac{\omega}{b}\right) \qquad (1-16)$$

在频域中改变标度时有

$$\frac{1}{|b|}f\left(\frac{t}{b}\right)\leftrightarrow \boldsymbol{F}(b\omega) \tag{1-17}$$

1·1·3·6　对称性

若有

$$f(t)\leftrightarrow \boldsymbol{F}(j\omega)$$

则有

$$\boldsymbol{F}(jt)\leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \tag{1-18}$$

注意，$\boldsymbol{F}(jt)$ 是时间的复函数

1·1·3·7　时间微分

若有　$f(t)\leftrightarrow \boldsymbol{F}(j\omega)$ 则有

$$\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\leftrightarrow j\omega \boldsymbol{F}(j\omega) \tag{1-19}$$

并有

$$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\leftrightarrow (j\omega)^n \boldsymbol{F}(j\omega) \tag{1-20}$$

同样，从式1-1，可得

$$\frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{F}(j\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}\leftrightarrow (-jt)^n f(t) \tag{1-21}$$

1·1·3·8　矩

首先定义$f(t)$ 的n阶矩m_n

$$m_n=\int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)\mathrm{d}t \tag{1-22}$$

由式1-21，有

$$\frac{\mathrm{d}^n \boldsymbol{F}(j\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}=\int_{-\infty}^{\infty}(-jt)^n f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t \tag{1-23}$$

若$\boldsymbol{F}(j\omega)$ 在原点（$\omega=0$处）可展开为泰勒级数，则得

$$\boldsymbol{F}(j\omega)=\sum_{k=0}^{\infty}(-j)^k m_k \frac{\omega^k}{k!} \tag{1-24}$$

可见，只要能展开成为泰勒级数，就能用$f(t)$的矩来展开傅里叶谱。

1·2 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换是把一个比较复杂的问题变换成为一个简单的问题，然后解出这个简单问题并进行逆变换来得到原来问题的解答。这一方法常用来求解初值问题，也就是求解由一组已知的初始条件和在$t>0$的全部时间内都满足的常微分方程所确定的系统的性能问题。经过这个变换之后，将得到能够把初始条件自动考虑进去的代数表达式。

1·2·1 拉普拉斯变换对

函数$f(t)$的拉普拉斯变换$L(S)$定义为

$$\boldsymbol{L}(S)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{1-25}$$

式中e^{-st}称为变换的核，变量S是复数$S=\sigma+j\omega$，称为辅助变量。复平面$S=\sigma+j\omega$叫拉普拉斯平面。

拉普拉斯变换$\boldsymbol{L}(s)$的逆变换$f(t)$定义为

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[L(S)]=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}\boldsymbol{L}(S)\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}S \tag{1-26}$$

$$(t\geqslant 0,\ \sigma\geqslant 0)$$

积分沿着任一直线$Res=\sigma>a$来取，a是$f(t)$的增长指数，同时，积分理解为在主值意义下的。

式1-25和1-26构成拉普拉斯变换对。

1·2·2 拉普拉斯变换存在的条件

函数$f(t)$必须满足下列三个条件，它的拉普拉斯变换才存在：

（1）实变量t的复值函数$f(t)$和它的导数$\dot{f}(t)$在$t\geqslant 0$上除掉有第一类间断点（在任一有限区间上至多有有限多个）外连续；

（2）当$t<0$时，$f(t)=0$；

（3）$f(t)$ 是有限阶的，也就是说，可以找到常数 $a\geqslant 0$ 和 $A>0$，使得

$$|f(t)|\leqslant A\mathrm{e}^{at}\quad(t\geqslant 0)\tag{1-27}$$

这里数 a 就是上面提到的 $f(t)$ 的增长指数，$f(t)$ 有界时可取 $a=0$。

如果满足上面三个条件，那末 $\boldsymbol{L}(S)$ 是半平面 $Res>a$ 上的解析函数，而逆变换公式1-26在 $f(t)$ 的连续点处成立。

1·2·3 拉普拉斯变换的性质

$$\mathscr{L}[af(t)]=a\mathscr{L}[f(t)]\quad(a\text{是常数})\tag{1-28}$$

$$\mathscr{L}[af(t)+bg(t)]=a\mathscr{L}[f(t)]+b\mathscr{L}[g(t)]\tag{1-29}$$

（a，b是常数）

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right]=-f(0)+S\boldsymbol{L}(S)\tag{1-30}$$

式中 $f(0)$ 是 $t=0$ 时 $f(t)$ 的值

$$\mathscr{L}\left[\frac{\mathrm{d}^2f(t)}{\mathrm{d}t^2}\right]=-\dot{f}(0)-Sf(0)+S^2\boldsymbol{L}(S)\tag{1-31}$$

式中 $\dot{f}(0)$ 是 $t=0$ 时 $\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}=\dot{f}(t)$ 的值

$$\mathscr{L}[f(t)*g(t)]=\mathscr{L}[f(t)]\cdot\mathscr{L}[g(t)]\tag{1-32}$$

式中 $$f(t)*g(t)=\int_0^t f(u)g(t-u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^t f(t-u)g(u)\mathrm{d}u\tag{1-33}$$

称为 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的褶积或卷积。

1·2·4 拉普拉斯变换和傅里叶变换的关系

拉普拉斯变换对可以写为

$$f(t)\leftrightarrow\boldsymbol{L}(S)\qquad Res=\sigma>a\tag{1-34}$$

（1）若 $a>0$ $f(t)$ 没有傅里叶变换

（2）若 $a<0$ 当 $\sigma=0$ 时，拉普拉斯变换就成为傅里叶变换

$$\boldsymbol{L}(S)\Big|_{\sigma=0}=\boldsymbol{F}(j\omega)\tag{1-35}$$