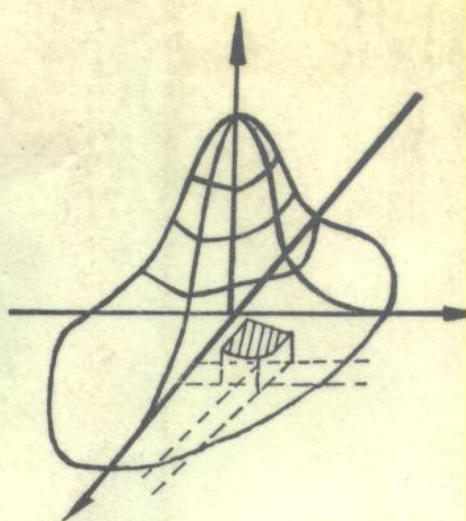




故障诊断 的数学 力学基础

虞和济 傅润兰 李沈 编
冶金工业出版社

机械故障诊断学

00447 C4

机械故障诊断丛书

故障诊断的 数学力学基础

虞和济 傅润兰 李 沈 编

冶金工业出版社

内 容 简 介

本书是《机械故障诊断丛书》之十。本书为机械故障诊断技术提供数学和力学的基本知识,着重介绍新的较深入的数学、力学的原理、概念和方法。供从事设备管理和维修的工程技术人员阅读并可作大专院校有关专业的参考书。

EQ70/15

机 械 故 障 诊 断 丛 书

故障诊断的数学力学基础

虞和济 傅润兰、李 沈 编

冶金工业出版社出版发行

(北京北河沿大街嵩祝院北巷39号)

新华书店总店科技发行所经销

冶金工业出版社印刷厂印刷

850×1168 1/32 印张 9 5/8 字数 247 千字

1991年1月第一版 1991年1月第一次印刷

印数00,001~5,000册

ISBN 7-5024-0755-3

TH·44 定价6.30元

前 言

机械故障诊断丛书共十本包括故障诊断的基本原理、故障诊断的振动理论基础、故障诊断的振动测试技术、故障诊断中的信号处理与应用、失效分析与故障预防、振动诊断的工程应用、故障诊断的声学方法、故障诊断的热象技术、故障诊断的专家系统和故障诊断的数学力学基础。本书是第十本。这套丛书是为大学本科或专科毕业后在工厂从事设备管理和维修工作的工程技术人员学习故障诊断这门新学科而编写的。本书为故障诊断技术提供数学和力学的基本知识，着重叙述新的较深入的数学力学的原理、概念和方法。

本书的第1、2、4章由虞和济编写，第3章由胡伽罗和虞和济编写，第5章由傅润兰编写，第6、7章由李沈编写，全书由虞和济主编。

编者

1989.7

目 录

1 积分变换	1
1.1 傅里叶变换	1
1.1.1 傅里叶变换对	1
1.1.2 傅里叶变换的实部和虚部	2
1.1.3 傅里叶变换的性质	3
1.2 拉普拉斯变换	5
1.2.1 拉普拉斯变换对	5
1.2.2 拉普拉斯变换存在的条件	5
1.2.3 拉普拉斯变换的性质	6
1.2.4 拉普拉斯变换和傅里叶变换的关系	6
1.2.5 拉普拉斯变换对表	8
1.3 Z 变换	8
1.3.1 Z 变换的定义	8
1.3.2 Z 变换的性质	9
1.3.3 典型 Z 变换对	10
2 概率统计及随机过程	12
2.1 概率论的一些基本知识	12
2.1.1 随机事件与样本空间	12
2.1.2 事件的关系和运算	12
2.1.3 频率与概率	13
2.1.4 条件概率	15
2.2 随机变量	15
2.3 概率函数、概率分布函数、概率密度函数	16

2.3.1	离散型随机变量的概率函数	16
2.3.2	连续型随机变量的概率分布函数	16
2.3.3	概率密度函数	17
2.3.4	随机变量的函数的概率密度函数	18
2.3.5	正态分布	19
2.4	数学期望	19
2.4.1	离散的随机变量的均值	19
2.4.2	连续的随机变量的均值	19
2.4.3	随机变量的函数 $Y=f(X)$ 的均值	20
2.4.4	常数的均值	21
2.5	方差、均方值	21
2.5.1	偏离估计	22
2.5.2	几种重要的随机变量的均值和方差	23
2.6	物理意义和矩	26
2.7	二维随机变量及其分布	26
2.7.1	概率分布函数	26
2.7.2	二维概率密度函数	26
2.8	随机过程	28
2.8.1	随机过程的概率密度函数及概率分布函数	29
2.8.2	随机过程的数字特征	29
2.8.3	平稳随机过程	30
2.9	相关函数	32
2.9.1	自相关函数	32
2.9.2	自协方差函数	32
2.9.3	自相关系数	33
2.9.4	互相关函数	34
2.9.5	互协方差函数	34
2.9.6	协方差矩阵	34
2.10	功率谱密度函数	36

2.10.1	自功率谱密度函数	36
2.10.2	过程导数的自谱	37
2.10.3	互功率谱密度函数	37
2.10.4	相干系数(函数)	38
2.11	大数定律和中心极限定理	39
2.11.1	大数定律	39
2.11.2	中心极限定理	40
3	数值计算	44
3.1	函数的插值方法与逼近方法	44
3.1.1	插值问题	44
3.1.2	函数逼近	52
3.2	数值积分与数值微分	56
3.2.1	数值积分	56
3.2.2	牛顿-柯特斯公式	57
3.2.3	龙贝格算法	58
3.2.4	数值微分	59
3.3	方程的求根	61
3.3.1	二分法	61
3.3.2	迭代法	62
3.3.3	牛顿迭代法	65
3.3.4	弦截法	65
3.4	线性方程组的求解	67
3.4.1	直接法与矩阵的初等变换	67
3.4.2	矩阵的三角分解	69
3.4.3	向量和矩阵的范数	70
3.4.4	线性方程组的性态与误差分析	70
3.4.5	迭代方法	71
3.4.6	逐次超松弛迭代法	73
3.5	矩阵特征值问题的数值解法	74

3.5.1 乘幂法	74
3.5.2 反幂法	75
4 运 筹 学	77
4.1 数学规划与优化设计	77
4.1.1 基本概念	77
4.1.2 单纯形法	78
4.2 动态规划	84
4.2.1 动态规划的基本概念	84
4.2.2 设备更新问题	85
4.3 决策论	88
4.3.1 决策结构	88
4.3.2 决策过程	89
4.3.3 决策中的几个问题	89
4.4 模型论	91
4.4.1 引言	92
4.4.2 建立模型的方法	94
5 刚 体 力 学	105
5.1 静力学的基本概念和公理	105
5.1.1 基本概念	105
5.1.2 静力学公理	106
5.1.3 约束和约束反力	108
5.1.4 摩擦	108
5.1.5 力的投影和力矩	112
5.1.6 力偶	114
5.1.7 力系的合成结果和平衡方程	114
5.1.8 举例	116
5.2 运动学	119
5.2.1 点的运动方程、速度和加速度	120

5.2.2	点的合成运动	121
5.2.3	应用点的合成运动求解问题的步骤	123
5.2.4	刚体的基本运动	126
5.2.5	刚体的平面运动	131
5.3	动力学	139
5.3.1	动力学基本定律及微分方程	139
5.3.2	动力学普遍定理	140
5.3.3	非自由质点动力学系的研究方法	160
5.3.4	虚位移原理	165
5.3.5	动力学普遍方程和拉格朗日方程	168
6	固体力学	175
6.1	基本概念与材料力学性质	175
6.1.1	基本概念	175
6.1.2	应力与应变	178
6.1.3	材料力学性质	183
6.2	应力状态分析、强度理论	197
6.2.1	应力状态概念	197
6.2.2	平面应力状态下的应力计算	198
6.2.3	三向应力状态	200
6.2.4	广义胡克定律	202
6.2.5	强度理论	204
6.3	构件强度、刚度计算	206
6.3.1	轴向拉压问题	206
6.3.2	剪切问题	208
6.3.3	扭转问题	210
6.3.4	弯曲应力	212
6.3.5	弯曲变形	221
6.3.6	不对称截面梁的弯曲	223
6.3.7	组合变形	227

6.4 压杆稳定	228
6.4.1 压杆稳定概念	228
6.4.2 压杆临界力欧拉公式	229
6.4.3 临界应力图	230
6.4.4 压杆稳定校核	232
6.5 弹性力学基本方程	233
6.5.1 概论	233
6.5.2 空间问题的基本方程	237
6.5.3 平面问题的基本方程	244
6.5.4 轴对称问题的基本方程	245
6.5.5 球对称问题的基本方程	247
7 有限单元法	250
7.1 概述	250
7.2 有限单元法基本概念及分析过程	250
7.2.1 结构的离散化	250
7.2.2 选择位移模式	252
7.2.3 单元力学特性分析	254
7.2.4 建立整体结构平衡方程	255
7.2.5 系统载荷与约束条件的处理	255
7.2.6 求解结点位移和单元应力	256
7.3 平面问题的单元分析	256
7.3.1 平面问题的离散化	256
7.3.2 单元位移模式	257
7.3.3 单元应变	260
7.3.4 单元应力	261
7.3.5 单元刚度矩阵及刚度方程	262
7.4 平面问题的整体分析	264
7.4.1 整体刚度矩阵与平衡方程	264
7.4.2 整体载荷列阵的形成	270

7.4.3	边界条件处理	272
7.4.4	应力计算结果的处理	274
7.4.5	热应力计算	276
7.4.6	解题实施步骤及简例	278
7.5	空间问题	282
7.5.1	四面体的划分法	282
7.5.2	四面体常应变单元分析	286
7.5.3	整体结构分析	290
参 考 文 献		293

1 积分变换

在故障信号的处理中，经常要对波动的数据或随时间变化的一些波形进行谱分析，即表示为不同频率、不同振幅的简谐波的线性叠加，也就是从时域分析变换为频域分析，对于无限区间上的函数用某种特殊的积分形式来表示，最常用的几种积分变换是傅里叶变换、拉普拉斯变换和Z变换，本章介绍这三种变换。

1.1 傅里叶变换

通常，首先介绍用于周期函数的傅里叶级数，然后把它引伸到非周期函数，从而推导出傅里叶变换或傅里叶积分，在本丛书的第五本中已介绍过。但是傅里叶变换对周期的和非周期的函数都是有效的，实际上傅里叶级数可以看作傅里叶变换的特例，这里直接从傅里叶变换出发来讨论。

1.1.1 傅里叶变换对

下列关系式被称为傅里叶变换对：

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-1)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1-2)$$

式1-1叫做傅里叶变换，它表示给定时间函数 $f(t)$ 来求频率谱 $F(j\omega)$ ，这就是时域到频域的变换；式1-2叫做傅里叶逆变换，它表示时间函数 $f(t)$ 是频率分量的无限和，这就是又从频域变换到时域，是由频谱重新组成时间函数。 $F(j\omega)$ 是 ω 的复函数（复数的不变量用大写黑体字表示，是矢量），时间函数（时间历程）可以直接测量，而频谱则不能测量，但可以通过傅里叶变换得到。

傅里叶变换存在的条件:

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \quad \text{存在}$$

(2) $f(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上满足狄利克雷条件: $f(t)$ 只有有限个极值点, 只有有限个第一类间断点。

傅里叶变换的记号:

$F(j\omega)$ 是 $f(t)$ 的傅里叶变换写作

$$F(j\omega) = \mathcal{F} f(t) \quad (1-3)$$

$f(t)$ 是 $F(j\omega)$ 的傅里叶逆变换写作

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1} F(j\omega) \quad (1-4)$$

$f(t)$ 与 $F(j\omega)$ 构成傅里叶变换对写作

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \quad (1-5)$$

1.1.2 傅里叶变换的实部和虚部

一般, $F(j\omega)$ 为 $j\omega$ 的复函数, 可写成实部和虚部之和:

$$F(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (1-6)$$

式中 $R(\omega)$ 和 $X(\omega)$ 都是 ω 的实函数, 利用欧拉公式可把式 1-1 写成

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt \quad (1-7)$$

一般, $f(t)$ 是时间的实函数, 所以有

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt \quad (1-8)$$

$$X(\omega) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt \quad (1-9)$$

$R(\omega)$ 是 ω 的偶函数, $X(\omega)$ 为 ω 的奇函数。把式 1-6 代入式 1-2, 再引用欧拉公式可得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [R(\omega) + jX(\omega)] (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega \quad (1-10)$$

由于奇函数积分为零, 可得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (1-11)$$

对于实时间函数 $f(t)$ ，式1-8、1-9和1-11是傅里叶变换对的另一种形式。函数 $F(j\omega)$ 称为傅里叶谱，它给出在各个频率分量上的相对幅值 $\sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)}$ 和相角 $\tan^{-1}[X(\omega)/R(\omega)]$ 。

1.1.3 傅里叶变换的性质

若 $f_1(t)$ 、 $f_2(t)$ 的傅里叶变换是 $F_1(j\omega)$ 、 $F_2(j\omega)$

1.1.3.1 线性

傅里叶变换的运算是线性的，即

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega) \quad (1-12)$$

其中 a_1 和 a_2 是常数

1.1.3.2 褶积（或卷积）

定义卷积为 $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$ 则其傅里叶变换为

$F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega)$ 简记为

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) \cdot F_2(j\omega) \quad (1-13)$$

1.1.3.3 时间平移（延迟）

$$f(t-\tau) \leftrightarrow e^{-j\omega\tau} F(j\omega) \quad (1-14)$$

1.1.3.4 频移（调频）

在频率上移动时， $F(j\omega)$ 变为 $F[j(\omega-\omega_0)]$ ，可以证明它是 $f(t)e^{-j\omega_0 t}$ 的傅里叶变换，简记为

$$f(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow F[j(\omega-\omega_0)] \quad (1-15)$$

若 $f(t)$ 是时间的实函数，则 $f(t)e^{j\omega_0 t}$ 就不是实函数了。

1.1.3.5 时间或频率的标度变化

在时域中改变标度时有

$$f(bt) \leftrightarrow \frac{1}{|b|} F\left(\frac{\omega}{b}\right) \quad (1-16)$$

在频域中改变标度时有

$$\frac{1}{|b|} f\left(\frac{t}{b}\right) \leftrightarrow F(b\omega) \quad (1-17)$$

1.1.3.6 对称性

若有

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

则有

$$F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \quad (1-18)$$

注意, $F(jt)$ 是时间的复函数

1.1.3.7 时间微分

若有 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ 则有

$$\frac{df(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega F(j\omega) \quad (1-19)$$

并有

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega) \quad (1-20)$$

同样, 从式1-1, 可得

$$\frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n} \leftrightarrow (-jt)^n f(t) \quad (1-21)$$

1.1.3.8 矩

首先定义 $f(t)$ 的 n 阶矩 m_n

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t) dt \quad (1-22)$$

由式1-21, 有

$$\frac{d^n F(j\omega)}{d\omega^n} = \int_{-\infty}^{\infty} (-jt)^n f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1-23)$$

若 $F(j\omega)$ 在原点 ($\omega=0$ 处) 可展开为泰勒级数, 则得

$$F(j\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} (-j)^k m_k \frac{\omega^k}{k!} \quad (1-24)$$

可见, 只要能展开成为泰勒级数, 就能用 $f(t)$ 的矩来展开傅里叶谱。

1.2 拉普拉斯变换

拉普拉斯变换是把一个比较复杂的问题变换成为一个简单的问题, 然后解出这个简单问题并进行逆变换来得到原来问题的解答。这一方法常用来求解初值问题, 也就是求解由一组已知的初始条件和在 $t > 0$ 的全部时间内都满足的常微分方程所确定的系统的性能问题。经过这个变换之后, 将得到能够把初始条件自动考虑进去的代数表达式。

1.2.1 拉普拉斯变换对

函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 $L(S)$ 定义为

$$L(S) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (1-25)$$

式中 e^{-st} 称为变换的核, 变量 S 是复数 $S = \sigma + j\omega$, 称为辅助变量。复平面 $S = \sigma + j\omega$ 叫拉普拉斯平面。

拉普拉斯变换 $L(s)$ 的逆变换 $f(t)$ 定义为

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[L(S)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} L(S) e^{st} dS \quad (1-26)$$

$(t \geq 0, \sigma \geq 0)$

积分沿着任一直线 $Re s = \sigma > a$ 来取, a 是 $f(t)$ 的增长指数, 同时, 积分理解为在主值意义下的。

式1-25和1-26构成拉普拉斯变换对。

1.2.2 拉普拉斯变换存在的条件

函数 $f(t)$ 必须满足下列三个条件, 它的拉普拉斯变换才存在:

(1) 实变量 t 的复值函数 $f(t)$ 和它的导数 $f'(t)$ 在 $t \geq 0$ 上除掉有第一类间断点(在任一有限区间上至多有有限多个)外连续;

(2) 当 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$;

(3) $f(t)$ 是有限阶的, 也就是说, 可以找到常数 $a \geq 0$ 和 $A > 0$, 使得

$$|f(t)| \leq Ae^{at} \quad (t \geq 0) \quad (1-27)$$

这里数 a 就是上面提到的 $f(t)$ 的增长指数, $f(t)$ 有界时可取 $a = 0$ 。

如果满足上面三个条件, 那末 $L(S)$ 是半平面 $\text{Res} > a$ 上的解析函数, 而逆变换公式 1-26 在 $f(t)$ 的连续点处成立。

1.2.3 拉普拉斯变换的性质

$$\mathcal{L}[af(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] \quad (a \text{ 是常数}) \quad (1-28)$$

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)] \quad (1-29)$$

(a, b 是常数)

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = -f(0) + SL(S) \quad (1-30)$$

式中 $f(0)$ 是 $t=0$ 时 $f(t)$ 的值

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = -\dot{f}(0) - Sf(0) + S^2L(S) \quad (1-31)$$

式中 $\dot{f}(0)$ 是 $t=0$ 时 $\frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t)$ 的值

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)] \quad (1-32)$$

式中 $f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du$

$$= \int_0^t f(t-u)g(u)du \quad (1-33)$$

称为 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的褶积或卷积。

1.2.4 拉普拉斯变换和傅里叶变换的关系

拉普拉斯变换对可以写为

$$f(t) \leftrightarrow L(S) \quad \text{Res} = \sigma > a \quad (1-34)$$

(1) 若 $a > 0$ $f(t)$ 没有傅里叶变换

(2) 若 $a < 0$ 当 $\sigma = 0$ 时, 拉普拉斯变换就成为傅里叶变换

$$L(S) \Big|_{\sigma=0} = F(j\omega) \quad (1-35)$$