SQC-3

统计质量控制

STATISTICAL QUALITY CONTROL

估计和检验

Estimation and Test

陈国铭 主编
李世英 编

中国石化出版社

SQC-3

统计质量控制

STATISTICAL QUALITY CONTROL

估计和检验

Estimation and Test

陈国铭 主编
李世英 编

中国石化出版社

（京）新登字 048 号

内 容 提 要

本册在简要回顾了前册书中已论及的抽样分布常用公式后，比较详细地讲述了参数的点估计和参数的区间估计以及参数的假设检验，最后对涉及面广泛的非参数假设检验作为单独一章作了讲述。由于本书重在实用，故略去了对一些公式的艰深推证，而尽可能在阐明基本原理的前提下做到浅出深入。

本书可供企业质量管理干部和工作人员、有关工程技术人员及高校师生阅读和使用。

SQC-3
统计质量控制
STATISTICAL QUALITY CONTROL
估计和检验
Estimation and Test
陈国铭　主编
李世英　　编
*
中国石化出版社出版发行
（北京朝阳区太阳宫路甲 1 号　邮政编码：100029）
煤炭工业出版社印刷厂排版
中国纺织出版社印刷厂印刷
新华书店北京发行所经销
*
850×1168 毫米 大 32 开本 8½ 印张 223 千字 印 1—6400
1995 年 3 月北京第 1 版 1995 年 3 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-80043-556-3/O・021　定价：9.50 元

中国石油化工总公司质量管理协会组织编写

生产技术顾问：张德义
统计技术审核：王经涛

主　编：陈国铭
副主编：张祖荫　郭耀曾
编　委（按姓氏笔划）：李世英　陈国铭　杨丽春
张祖荫　饶上建　郭耀曾　崔廷铨
其他编辑校核人员：万　涛　刘秋萍　吕巧云
邱以玲　田从金

序　言

为了适应国际贸易往来和经济合作的要求，国际标准化组织经过十多年的努力，于 1986 年和 1987 年相继正式发布 ISO8402《质量——术语》标准和 ISO9000 质量管理和质量保证系列标准，将世界多年质量管理的经验进行了标准化。ISO9000 系列标准的基本点是要求企业在生产过程中建立有效的质量保证体系，并对质量体系中相互关联、相互作用的若干要素进行有效的控制。在过程质量控制中，科学、有效方法之一就是数理统计方法。因此在 ISO9000 系列标准的各个模式中以及质量管理和质量体系要素指南中都要求在市场分析、产品设计、工序控制、性能评定、数据分析等方面广泛使用统计技术，其范围包括实验设计、方差分析、显著性检验、累积和控制图、抽样检验等技术。因此，研究学习统计质量控制技术对于贯彻 ISO9000 质量保证系列标准，提高科学管理水平是非常必要的。

回顾世界质量管理的发展史，可以看出，数理统计技术在质量管理中发挥了重要作用。从 19 世纪末到现在，质量管理在历史上经过了检验质量管理、统计质量控制和全面质量管理三个阶段。单纯检验质量管理的严重缺点：一是只能从产品中发现和挑出废品，事前预防功能不强，二是由于检验人员的差错，即使全数检验也可能漏检或错检；三是至关重要的破坏性试验不可能全数进行。产品是生产出来的，单靠检验是不能防止产生废品的。1924 年美国贝尔研究所的休哈特（W. A. Shewhart）运用数理统计的原理提出了控制生产过程中的“6σ”方法，即后来发展的质量控制图和预防缺陷的概念。与此同时，同属贝尔研究所的道奇（H. E. Dodge）和罗米格（H. G. Romig）联合提出了在破坏性试验情况下采用的“抽样检验表”。二次大战初期，美国大批民用品转入军

工生产，由于事先无法控制废品而不能满足交货期要求，又由于军工生产多属破坏性试验，全数检验不可能也不允许。美国国防部为了解决这一难题，邀集休哈特、道奇、罗米格以及美国材料与试验协会、美国标准协会、美国机械工程师协会等有关人员研究，于 1941～1942 年先后公布一系列“美国战时质量管理标准”，要求各公司普遍实行统计质量控制方法，结果半年内取得显著成效。后来统计质量控制取得了很大发展。

我国自从 1978 年从日本引进全面质量管理十多年取得了显著成效。纵观我国的质量管理发展历史，是由检验质量管理直跃全面质量管理，对数理统计方法的运用远不是像当年美国那样深入广泛，不少决策、设计、科研、生产、销售、服务部门在提出问题、解决问题、检查结果时有些人还不习惯于进行科学的数理解析。

为了普及数理统计基本知识并在生产实际中发挥作用，我们组织石化行业中具有实践经验的质量管理专家编写了这套《统计质量控制》系列丛书。本书共分十册，第一册是数据收集和整理，第二册概率和数理统计基础，第三册估计和检验，第四册控制图，第五册方差分析，第六册实验设计，第七册相关和回归分析，第八册抽样检验，第九册统计方法应用演示 50 例，第十册数表。

数理统计方法就是通过对生产实践中大量数据的收集、整理、解析，研究生产实际中的内在规律的数学方法。和目前国内其它有关数理统计的书籍相比，本系列丛书的显著特点：一是它不同于一般的数学教科书，特别突出了实际应用，因此在编写中尽量减少不必要的公式推导，是一本实用性较强的书籍；第二个特点是书中列举了大量社会和生产（特别是石油化工生产）实例，文章从实例引出理论，又从理论回到实例，便于读者理解和应用，适合于工业企业特别是石油化工等流程型行业设计、研究、生产、销售、辅助等系统技术人员和管理干部学习参考；第三是语言既通俗易懂，又有一定深度和广度，既可用于中等水平人员学习应用，又可适用于高等水平技术人员研究参考。

为了更好应用本书，建议学习中注意几点：一是随着计算机的高度发展，许多数理统计方法可完全不需用手工计算，即可很快得出结果，已经掌握了统计方法的人可直接借助计算机，但对于初学之人，还是先用手算为好，防止知其然而不知其所以然，不利于在实践中灵活运用；二是对于现场技术人员，不要去深究公式推导，只要求会实际灵活运用；三是统计方法只提供解决问题的手段，必须和固有技术相结合才能解决问题，因此要使读者学会用数学的思维考虑专门技术问题；四是质量管理所用的方法不限于数理统计方法，还包括许多其它方法，如价值分析（VA）、生产工学（IE）、操作研究（OR）、价值工程（VE）、可靠性工程(RE)等，本书这次没有列入，读者可根据需要深入研究，灵活运用。

侯英生

1995 年 1 月

目　　录

1 数理统计的基本概念及抽样分布

1.1 引言

数理统计（*Mathematical statistics*）的研究对象也是随机现象。概率论指出，对随机现象进行大量的试验，即可揭示出它的概率规律。但在客观上，却只允许我们对随机现象进行有限次且为数不多的试验。例如，某化肥厂的仓库里有 2000 袋合成尿素产品，需要我们对其质量做出判断，限于人力、物力，我们不可能对 2000 袋产品逐一测试。这样全数测试不仅不经济，而且在有些情况下（例如对那些属于破坏性的试验）也是不可能的。可行的办法是从 2000 件产品中随机抽取出一部分，例如 50 袋，对这 50 袋进行有关的试验，尔后根据对试验数据的分析、整理，运用概率论的知识，对整个库房的产品质量做出推断，这个过程实质上便体现了数理统计的基本思想和内容。总而言之，数理统计就是研究如何有效地收集、整理和分析受随机因素影响的数据，并应用概率论的理论和方法对所研究的问题做出预示和判断，这一用局部推断整体的过程即称为统计推断（*Statistical inference*）。

随着生产力的发展和社会的进步，数理统计的应用已越来越广泛。当今，它几乎遍及生产、科研、管理以及国民经济的各个领域，为正确地预测和决策提供可靠的依据。

统计推断包括两个主要部分。第一部分是总体参数估计（*Estimate of population parameter*），简称为参数估计（*Estimate of parameter*）；第二部分是假设检验（*Tests of hypothese*）。除此尚有非参数检验（*Nonparametic test*），尽管从本质上讲它仍属于假设检验的范畴，但由于其特殊性，可自成章节，本书将在最后一章进行叙述。

前二分册书中已提到质量数据可分为计量值数据和计数值数

值。凡可连续取值的数据都属于计量值，统计推断中涉及的均值及均值之差、方差及方差之比，还有偏度和峰度等都是计量值。凡是不能连续取值的数据都属于计数值，例如不合格品率及不合格品率之差、缺陷数及缺陷数之差都是计数值。本册书在内容上对此二类数据不再区分，但读者阅读完本册全部内容后，不难看出，计量值的统计推断多属于正态总体的推断类型，计数值的统计推断则多属于非正态总体在大样本条件下的推断类型。

1.2 基本概念

1.2.1 总体、个体和样本

1）总体和个体

关于总体、个体和样本的概念在前二册中已作了大量论述，在此只简单进行回顾。

我们把所研究对象的全体称为总体（*Population*）。例如在上节的例中，库房里的 2000 袋产品即构成这个问题的总体。总体中的每一个对象称为个体（*Unit*，*sample piece*），在本例中，每一袋尿素即为个体。

当总体中个体的数量有限时，这类总体便称为有限总体（*Finite population*），上例中，库房里的 2000 袋产品是有限的，所以它就是一个有限总体。

当总体中个体的数量无限多时，这类总体称为无限总体（*Infinite population*）。

尽管总体有这两种类型，但在实际的应用中并无区分的必要。

在对总体的研究中，最后总要归结到对个体某些数量指标的研究。例如，在对汽油产品质量的考察中，我们总是要考察其辛烷值的大小、馏程的范围、硫含量以及酸度等项技术指标。对这些性能指标而言，都有一定的数值相对应，但在测试之前是无法预知的，因此，我们可以把总体与某一数量指标的全体取值构成的集合等同起来。这样，总体就可以看作是某一个随机变量 X 的全部取值，而每一个个体便是一个试验的观察值。例如在对 2000 袋尿素进行含氮量的考察中，总体就是 2000 袋产品每袋含氮量的

全部数值集合，而每一袋产品的含氮量便是一个观察值。

2）样本

在对 2000 袋尿素产品的质量研究中，我们可以随机地抽取一部分，例如抽取 50 袋，然后通过对这一部分某项性能指标的测试来推断总体的相应性能，我们把这一部分称为样本（*Sample*）。此外，对样本中的个体而言，在抽取之前，究竟抽到哪一个也是事先无法预知的，因此它也是随机变量，通常记为 X_1，X_2，…。而把抽取之后确定的观测值称为样本值（*Sample value*），记为（x_1，x_2，…，x_n，…）。样本中个体的数目称为样本容量（*Sample size*）。

为了保证从样本推断总体时使抽取的样本具有代表性，在抽取样本时，应满足以下两个条件：

（1）随机性：要求每个个体被抽取的可能性相同，这就是随机性（*Randomness*）要求。它要求对总体的每一次观察都是在同一条件下进行的，从而每个 X_i 都与总体具有相同分布。

（2）独立性：独立性（*Independence*）要求每次的抽取都不影响其它任何一次的抽取，即每一次抽样后，总体的成分都应保持不变。换言之，对总体的每次观察应是独立进行的，从而保证 X_1，X_2，…，X_n 相互独立。

满足以上两个条件的样本称为来自总体的简单随机样本（*Simple random sample*），简称样本（*Sample*）。以后，本书提到的样本均指简单随机样本。

综上所述，样本（X_1，X_2，…，X_n）是一组独立同分布的随机变量。

若总体 X 的分布函数为 $F(x)$，则样本（X_1，X_2，…，X_n）的联合分布函数为：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\prod_{i=1}^{n}F(x_i) \tag{1-1}$$

它由总体的分布函数 $F(x)$ 唯一地确定。

由于样本在抽取之前，是无法预知的，所以它是一组随机变

量（X_1，X_2，…，X_n），当抽取并测定之后，即成为 n 个数值（x_1，x_2，…，x_n），即样本的一组观测值（*Observed Value*）。我们把样本（X_1，X_2，…，X_n）所可能取值的全体称为样本空间（*Sample space*）。这样，一个样本的观测值（x_1，x_2，…，x_n）就是样本空间中的一个点，称为样本点（*Sample point*）。

1.2.2 统计量

1）统计量和总体参数

设（X_1，X_2，…，X_n）是总体 X 的一个容量为 n 的样本，样本函数 θ（X_1，X_2，…，X_n）中若不含未知参数，则称 θ（X_1，X_2，…，X_n）为统计量（*Statistic*）。

所以，统计量就是不含任何未知参数的样本函数（*Sample function*）。

由总体计算出来的数值称为总体参数（*Population parameter*）。最重要的两个总体参数是总体均值（*Population mean*）和总体方差（*Population Variance*），分别以 μ 和 σ^2 表示。

由于样本的抽取是随机进行的，我们抽到的一个样本是下列所有可能样本中的一个。

第一个样本 X'_1，X'_2，…，X'_n

第二个样本 X''_1，X''_2，…，X''_n

……

……

所以，样本函数，即对这些随机变量经某种运算得出的统计量也是随机变量，它们具体的取值，将随抽样的不同而异。若样本的一个观测值为（x_1，x_2，…，x_n），则 θ（x_1，x_2，…，x_n）即为统计量的一个观测值。

按以上定义，统计量仅和样本有关，而不涉及任何未知参数，例如，设（X_1，X_2，…，X_n）是来自总体 N（μ，σ^2）的一个样本，若 μ 和 σ^2 是未知参数，则：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i;\quad \sum_{i=1}^{n}X^2;$$

$$\frac{1}{2}(3X_1+7X_8)+9$$

等都是统计量。而

$$(X_1+X_2)-\mu,$$

$$\sum_{i=1}^{7}\frac{X_i^2}{\sigma},$$

$$\mu X_1^2$$

由于含未知参数，都不是统计量。

2）常见的统计量

统计推断中，常用到的统计量有以下几个：

设容量为 n 的样本表示为（X_1，X_2，…，X_n），则定义：

（1）样本均值（*Sample mean*）$\overline{X}$

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \tag{1-2}$$

（2）样本方差（*Sample variance*）V

$$V=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \tag{1-3}$$

（3）样本标准差（*Sample standard deviation*）$\sqrt{V}$

$$\sqrt{V}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2} \tag{1-4}$$

（4）样本的 k 阶原点矩（*Moment of order k about the orgin*）A_k

$$A_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^k=\frac{1}{n}(X_1^k+X_2^k+\cdots+X_n^k) \tag{1-5}$$

显然，样本均值 $\overline{X}$ 即样本的一阶原点矩。

（5）样本的 k 阶中心矩（*Centred moment of order k*）B_k

$$B_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k \tag{1-6}$$

显然样本的二阶中心矩

$$V_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \tag{1-7}$$

与样本方差V有如下关系

$$V=\frac{n}{n-1}V_n \tag{1-8}$$

（6）样本极差（*Sample range*）R

$$R=\max(X_1, X_2, \cdots, X_n)-\min(X_1, X_2, \cdots, X_n) \tag{1-9}$$

即样本中的极大值与极小值之差。

（7）样本中位数（*Sample median*）$\widetilde{x}$

将样本的观测值由小到大重新排列，使之成为$(x_{(1)}, x_{(2)}, \cdots, x_{(n)})$，满足

$$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n-1)}\leqslant x_{(n)}$$

当样本容量n为奇数时，中间的数值即称为中位数；当n为偶数时，则取中间相邻两个数值的平均值做为中位数，即：

$$\widetilde{x}=\begin{cases}x_{(k)} & \text{当 } n=2k+1 \text{ 时}\\ \frac{1}{2}(x_{(k)}+x_{k+1}) & \text{当 } n=2k \text{ 时}\end{cases} \tag{1-10}$$

1.3 抽样分布

由于统计量是随机变量，所以它必然服从某一确定的分布，我们首先给出以下定义：

定义：统计量的概率分布称为抽样分布（*Sampling distribution*）。

在统计推断中，我们总是以样本提供的信息去推断总体的相关信息，例如用样本均值去推断总体的均值，用样本方差去推断总体的方差等，为了做到这一步，首要的任务就是要明确这些统计量的分布，尔后才能通过一定的运算，得出推断的结果。一般而言，统计量分布的确定是十分复杂和困难的，往往涉及较为艰深的数学理论，例如中位数$\widetilde{X}$，看似简单，但要确定它的分布，并不容易。下面仅从实用角度出发，引用概率论与数理统计中的某

些结论，而略去繁难的推导。

1.3.1 正态总体的抽样分布

当总体 X 服从正态分布（*Normal distribution*）时，即称之为正态总体（*Normal Population*）。从概率论知，许多随机现象的概率分布都是正态分布，所以来自正态总体的抽样分布是人们研究得最多也是研究得最为深入的一部分，同时也是最主要的内容。本节亦将对其重点讨论。

1）样本均值 $\overline{X}$ 与样本方差 V 的性质

我们首先给出 $\overline{X}$ 与 V 的一个不依赖于总体分布的普适性质，对此有以下定理：

定理 1-1：设（X_1，X_2，…，X_n）是来自总体 X 的一个样本，总体的均值为 μ，方差为 σ^2 且有限，则

$$E(\overline{X})=\mu \tag{1-11}$$

$$D(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n} \tag{1-12}$$

证：

$$\begin{aligned} E(\overline{X}) &= E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right]=E\left[\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)\right] \\ &= \frac{1}{n}E[X_1+X_2+\cdots,+X_n] \\ &= \frac{1}{n}[E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)] \end{aligned}$$

由于 X_i（$i=1$，2，…，n）来自总体 X，故与 X 同分布，所以 $E(X_i)=E(X)$，

$$\begin{aligned} \therefore\quad E(\overline{X}) &= \frac{1}{n}[nE(X)] \\ &= E(X)=\mu \\ D(\overline{X}) &= D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2}D[X_1+X_2+\cdots+X_n] \\ &= \frac{1}{n^2}[D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)] \end{aligned}$$

$$=\frac{1}{n^2}\cdot nD(X)$$

$$=\frac{1}{n}\cdot D(X)$$

$$=\frac{\sigma^2}{n}$$

定理 1-2：设 $(X_1, X_2, \cdots X_n)$ 为来自总体 X 的一个样本，总体均值为 μ，方差为 σ^2 且有限，如果总体的四阶中心矩 $\mu_4=E(X-\mu)^4$ 存在，则

$$E(V)=\sigma^2 \tag{1-13}$$

$$D(V)=\frac{\mu_4}{n}-\frac{n-3}{n(n-1)}\cdot\sigma^4 \tag{1-14}$$

证：

$$E(V)=E\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2)\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-2\overline{X}\sum_{i=1}^{n}X_i+n\overline{X}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2\right]$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[D(X_i)+(E(X_i))^2\right]-\right.$$

$$\left.-n\left[D(\overline{X})+(E(\overline{X}))^2\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{n\sigma^2+n\mu^2-n\cdot\frac{\sigma^2}{n}-n\mu^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\{n\sigma^2-\sigma^2\}$$

$$=\sigma^2$$

以上推导中，利用了

$$D(X^2)=D(X)+(E(X))^2$$

$$D(\overline{X}^2)=D(\overline{X})+(E(\overline{X}))^2 \quad 及$$

$$D(X_i)=D(X),\ i=1,2,\cdots,n$$

(1-14) 式的证明比较繁杂，故略。当样本来自正态总体时，(1-14) 式具有简洁的形式

$$D(V)=\frac{2\sigma^4}{n-1} \tag{1-15}$$

在以上两个定理的推导中，均未考虑总体的分布，所以此二定理对正态总体和非正态总体都成立。这一结论将在本书中多次引用。

2) 样本均值 $\overline{X}$ 的分布

定理 1-3：设总体 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，μ 和 σ^2 均已知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的一个样本，则

$$\overline{X}\sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \tag{1-16}$$

即 $\overline{X}$ 服从于以 μ 为均值、$\frac{\sigma^2}{n}$ 为方差的正态分布。

证：

$$\because \quad \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

其中每个 X_i $(i=1, 2, \cdots, n)$ 都来自总体 X，所以它们都服从正态分布。依正态分布的可加性知，其线性组合 $\overline{X}$ 亦服从正态分布。再依定理 1-1 知：$E(\overline{X})=\mu$，$D(X)=\frac{\sigma^2}{n}$，所以 $\overline{X}\sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$。

将 $\overline{X}$ 标准化，便得到以下重要推论：

推论：

$$u_0=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0, 1) \tag{1-17}$$

定理 1-4：设总体 $X\sim N(\mu, \sigma^2)$，其中 μ 已知，而 σ^2 未知。$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的一个样本，则统计量

$$t_0=\frac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{V}/\sqrt{n}}$$

服从自由度为 $(n-1)$ 的 t 分布 (*t-distribution*)，即