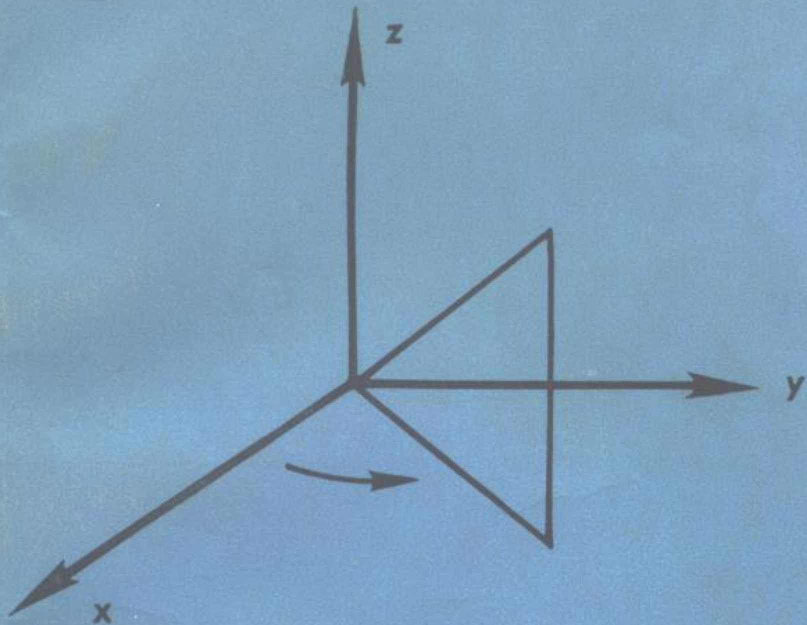

有限单元法

——基本方法与实施

国防工业出版社

有限单元法
—基本方法与实施

〔美〕董 平 J.N.罗赛托斯 著
张圣坤、钱仍勍、杨文华、朱福根 译
潘介人 校

国防工业出版社

内容简介

本书是关于有限单元法的基本教材。书中阐述了有限单元法的数学力学基础，着重于变分法的描述和应用。本书重点放在位移模型上，但也论述了杂交模型。

本书从数学归类出发对泊松方程、一般的斯图谟—刘维尔问题和双调和方程等作出了详细的例解，讨论了插值函数的选取及有限单元法在高速数字计算机上的实施，并对有限单元法在弹性力学、梁和板的弯曲中应用作了详细的讨论，也讨论了弹性振动、断裂力学、传热学和流体流动等领域中的问题，最后叙述了有限单元法最近的发展。

本书可供力学、数学科技工作者和工程技术人员阅读，也可作为高等院校研究生教材及高年级学生的参考书和高校教师的教学参考书。

Finite-Element Method Basic Technique and Implementation
〔美〕 Pin Tong and John N. Rossettos
Massachusetts Institute of Technology 1977年

*

有限单元法
——基本方法与实施
张圣坤、钱仍勐、杨文华、朱福根 译
潘介人 校

*

国防工业出版社 出版
北京市书刊出版业营业許可証出字第074号
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印装

*

$787 \times 1092^{1}/_{16}$　印张$13^{1}/_{2}$　311千字
1979年10月第一版　1979年10月第一次印刷　印数：00,001—23,000册
统一书号：15034·1826　定价：1.50元

译　　者　　序

由于一些物理问题的控制微分方程求解上的困难，以致长期来在弹性力学、结构力学以及其他连续体力学等方面的问题只能解决一些严格理想化的情形。而有限单元法对于完成复杂结构或多自由度系统的分析来说却是一种十分有效的方法。这个方法首次应用于工程问题是在二十世纪五十年代中期。然而，直到 1960 年才正式命名为“有限单元法”。至今，这一方法解决问题的能力和适用范围都有了极大的发展。除了在结构力学领域中充分显示出它的实用性外，这一方法也已经用于研究诸如断裂力学、传热学和流体力学、电磁学等连续介质力学的问题中。有限单元法已经引起各个有关领域的工程技术人员、专家、应用数学家和力学工作者的极大兴趣。它已经成为高等学校力学、应用数学以及有关工程专业的必修课。

有限单元法用数学术语来说，就是从变分原理出发，通过分区插值，把二次泛函（能量积分）的极值问题化为一组多元线性代数方程来求解。作者在全书中强调变分方法的应用，并充分阐述了有限单元法和数学基础，书中以深入浅出的方式从一开始就引入这些基础并严密地予以发展，使读者能看到这一方法广泛的适用性，并提高对有限单元法的数学本质的认识，以致能灵活地应用到自己的研究工作中去。

本书对位移模型（displacement modal）作了充分的讨论，而且对具有较大灵活性的杂交模型（hybrid modal）以适当篇幅作了独到的论述。因为作者董平博士本身就是这一模型的创始人之一。

由于数字计算机的迅速发展，计算机性能的不断提高，这就为有限单元法的应用和发展提供了充分的条件。本书对获得计算机解的方法进行了简明实用的讨论。因此读者能按此对特定的研究课题或设计任务编制自己的程序。

本书是关于有限单元法的基本教材，着重于清晰、牢固地建立有限单元法的数学、力学基础，因而在阐述连续体力学的应用时主要限于线性的情况，对非线性问题涉及不多，如果读者要了解有限单元法在非线性问题及其他领域中的应用尚需参考有关书籍。然而一旦具备了本书所介绍的有限单元法的知识后，读者很容易举一反三，阅读较深的专门论文和著作。

在译校过程中，对原书一些错误之处作了订正。限于水平，译文中难免还有错误、不妥之处，欢迎读者批评指正。

本书前言、第一章、第八章及附录由张圣坤同志译；第五章、第六章及第九章由钱仍勣同志译；第三章及第七章由杨文华同志译；第二章和第四章由朱福根同志译；全书由潘介人副教授审校。翻译过程中得到罗祖道教授的支持和指导，谨表谢意。

前　言

虽然有限单元法原先就是用来求解在结构力学与弹性力学这些特殊领域中的问题，但是这种方法的数学基础使它适用于求解全部应用数学、连续体力学、工程和物理中的问题。这个方法特别适于用现代电子计算机作数值解。本书的目的在于清楚地说明有限单元法广泛的应用范围以及计算的实际情况。这就弥合了这种方法严格的数学基础与实际应用之间的不足。

本书打算供学生、实践工程师与科学家们使用，因此就写得使它能为应用数学系和其它工程系的学生们采用。本书提供了有限单元法入门课程的材料，使刚入学的研究生与某些本科学生可循此前进。书中的示例和家庭作业使本书能作自学之用。作为前提来说，典型的大学工程教育，其中包括一般的矩阵代数、方程组、数值方法、常微分方程和偏微分方程基础，这些都必须得到满足（本书包含矩阵符号和矩阵代数的附录）。虽然在这本著作中处理实际课题的方法旨在使数学专业的学生也能懂得诸如固体力学、流体力学和传热学的课题，但在这些方面大学本科的工程基础是很有帮助的。因此数学系也能用这本教材在解析与数值近似方法的专题中获得收益。

本书的初稿是作者为麻省理工学院开设的第一学年研究生课程而撰写的。在这一经验的基础上，我们决定开设一门既强调有限单元法的一般方法，同时又注重这种方法用高速计算机付诸实施的课程。这是由于必须涉及现代科技中出现的复杂问题而引起的。因为数值法往往是复杂问题的“最后一着的解”，因而对应用数学家、工程师与科学家来讲，重要的是不仅要具备关于这些方法的基本原理的知识，而且要能使计算在尽可能大的范围内得到应用，这就是说，要有最大的效率。

因此在这本教材中，我们试图用显然可懂的陈词，从开拓这一技术的数学基础出发来提出这种方法合理的发展。由于懂得了每一步的基础，读者就能用这个方法解决应用数学、工程与科学方面的问题。为了促进熟练程度，我们一开始就展示了边值问题的变分法，而有限单元法就是从这个方法发展起来的。这样就在书中提供关于必要的变分计算的附录。有几章详细叙述了讨论如何解大型代数方程组、如何编排数值计算的顺序以节省上机时间、以及如何存取信息以减少计算机内存要求的计算机技术的执行过程。

第一章是引言，它包括这种方法的历史和物理数学基础。基本哲理的一般观察提出了这个方法的重要的远景。位移模型的初步讨论、插值函数概念与收敛性后面都跟有示例，这些算例把有限单元法应用于和斯图谟-刘维尔问题（Sturm-Liouville problem）有关的常微分方程的解，而斯图谟-刘维尔问题则是在弹性力学、流体力学、传热学中极其频繁地出现的问题。在第二章中，除了泊松方程的精确的有限元解析外，还介绍了含有偏微分方程的一些问题的解。特别是阐明用三角形和矩形单元来求得单元矩阵。指出由单元矩阵组成主矩阵的根据，接着就是一个以实际的编码来说明每一步运算的简单而又完整的例子（利用三角形单元）。组成主矩阵的一步一步的过程（这过程特别适用于大型系统，而且对

计算机的实施是特别理想的）在第三章中作了详细的阐述，并且再次用一个算例来加以说明。同时还对边界条件或约束条件如何加于主矩阵作了示范；得出示例最终的解，并与精确解进行比较。在第四章中叙述大型方程组求解的各种数值方法，其目的在于确立哪一种计算机算法是最有效的和精确的；由于采用有限单元法，从而就最大限度地用上了矩阵的稀疏性。在第四章中，我们还讨论了信息存贮的技巧，其结果是减少了内存的需求，并且导致使计算机运算次数为最小的计算程序。

第五章、第七章给出在弹性力学以及在梁和板的弯曲问题中的应用；这里还附带地揭露了前几章中已经讨论过的一些概念以及在弯曲问题中所固有的某些新的特点。第六章专门讲一般的插值函数、有代表性的有限单元应用的数值积分和高阶单元。第八章的内容是杂交单元模型在二阶和四阶偏微分方程中的应用。第九章则从弹性振动、传热学和流体流动的领域中挑选几个题目，同时也叙述有限单元法最近的发展，例如超单元之应用于那些涉及奇异性的问题，以及可以用无限域来描述的一些问题。在教材的各章中有意作了一些重复，并全部写出关键矩阵的某些运算，为的是使每一章有适当的独立性。这种详细的讲解将会增进本书自学的特点。

教材的重点放在位移模型上，但也引进了杂交模型的概念，并且表明它是从有限单元法的数学基础自然地演化出来的。这本教材是包含杂交有限元模型及其应用这个题目有完整一章的唯一的一本书。

目　录

第一章 有限单元法

1.1 引言。有限单元法的历史

有限单元法最初是在五十年代作为处理固体力学问题的方法出现的。它是所谓的结构分析矩阵方法〔阿吉里斯（Argyris）1955，1958；列维斯雷(Livesley)1964〕的一个分枝。而矩阵法本身又是在1945～1955这十年中由于研究那些分析包含有大量构件的复杂结构的系统的方法而发展起来的。

对所有的结构分析的矩阵法而言，其方法的基本点在于把许多单一构件节点上的位移和内力之间的关系用代数方程组的形式表达出来，而以节点位移、或节点内力、或是把节点位移和节点内力一起作为未知量。根据未知量选择的不同，矩阵法又可分别称为位移法、力法或混合法。方程组又可以十分方便地以矩阵形式表示，并且这些方程的解可有效地由高速数字计算机得到。

“有限单元法”这一名称是克拉夫（Clough）在1960年首次引用的。对于飞机结构分析，在1956年特纳（Turner），克拉夫，马丁（Martin）和托普（Topp）把位移法应用到平面应力问题中去，他们把结构划分成一个个三角形和矩形的“单元”。在他们的公式中，每一单元的特性是用一个单元节点上的力使之与节点位移相联系的单元刚度矩阵来表示的。与一般的矩阵分析相比，在矩阵分析中每一结构构件的力与位移之间的关系式是精确推导出来的，而把结构划分成一个个单元的解则仅仅是利用每一单元中近似的位移函数。关于能量原理和矩阵方法的综合性的论述已由阿吉里斯在1955年详细地，一字不漏地写出了在平面应力状态下矩形板格的单元刚度矩阵的推导。在这以前很久，库兰特（Courant）于1943年也应用了“单元”法则，假设翘曲函数在一个集合体的三角形单元中呈线性分布而得到了圣文南（St-Venant）扭转问题的近似解。这些初期的有限单元法是建立在虚功原理或最小势能原理上的；它们可看作为雷利-李兹（Rayleigh-Ritz）法的一种推扩，其中假设了分片的线性函数，它仅仅对近似解是连续的。但是，作为有限单元法本身来说，它比一般的雷利-李兹法要来得更灵活、易变。

在1960～1970这十年中，以各种不同变分原理的有限单元法公式由贝塞林(Besseling 1963)、梅劳歇（Melosh 1963)、约内士（Jones 1964）、格拉菲尔（Gallagher 1964)、卞学璜（Pian 1964 a）、维别克（Fraeijs de Veubeke 1964)、赫尔曼（Herrmann 1965)、普拉格（Prager 1967，1968)、董平和卞学璜(1969）和董平（1970）作了发展。诚然，由于对场变量所假设的函数仅仅是分片连续的，这就需要考虑到单元边界间的不连续性去发展新的和修正的变分原理。

然而有限单元法的公式不一定要建立在变分途径的基础上。奥登（Oden）在1969年从所谓的能量-平衡法出发成功地写出了热弹性问题有限单元解析的方程组。斯查白(Szabo)和李(Lee)在1969年利用迦辽金(Galerkin)法得到了平面弹性问题的有限单元解。

对某些边值问题，其中包括可用规则有限单元排列组成的规则多边形边界，最终的方程组和一般的有限差分公式往往是一致的（卞学璜1971 b）。然而，有限单元法在用于不规则区域和非均匀介质问题中时则总是更有利的。

在十五年这样短的时间内，由于“有限单元”这一概念在结构力学中出了名，因此在这一领域中的研究和发展便骤然崛起。有限单元法已经在连续体力学的一些问题中得到了应用，如等直杆的扭转、稳态热传导、理想流体中的势流等。有限单元法的使用者已从原先航空结构分析的少数人增长到土木、机械、造船和核工程的大多数工程人员。

1.2 物理概念

有限单元法一开始就对一个连续体用有限个（然而是大量的）座标或自由度来近似地（然而是系统地）加以描绘的。有限单元法的概念源出于结构理论。一个物理上的结构一般由许多结构单元所组成。但是，这些单元仅在有限个节点上彼此相连结。对每一个单元来说，像力和位移关系这样一些结构的特性都用节点上和在单元内部某些其他特定点上所确认的自由度来唯一地给以规定。这个组合结构的特性就能用各种众所周知的方法来加以描述。例如在图 1.1 中，一个铰接的桁架是由二个单元组成的，其中每一个单元都只能

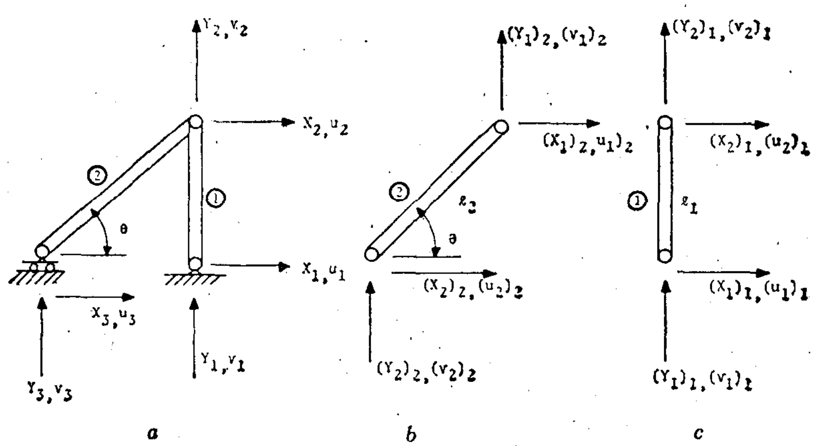

图1.1 铰接桁架

(*a*)组合体；(*b*)，(*c*)桁架单元

承受轴向力。令这些单元具有相等的截面积A和弹性模量E。二个单元的长度分别为l_1和l_2。对单元 1（图1.1 *c*）的力和位移关系以矩阵形式给出如下：

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix}_1 = \frac{AE}{l_1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}_1, \tag{1.1}$$

而对于单元 2 是

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{Bmatrix}_2 = \frac{AE}{l_2}\begin{pmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{pmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix}_2, \tag{1.2}$$

其中 $c=\cos\theta$； $s=\sin\theta$。

为了澄清这些关系式的物理含义，我们以单元2上在节点1那里作用的力的水平分量，即 $(X_1)_2$ 为例来考虑，这个力在（1.2）式中给出。由虎克（Hooke）定律，这个分量等于

$$(X_1)_2=F_a\cos\theta=\frac{AE}{l_2}\delta_a\cos\theta,$$

其中 F_a 是轴向力，δ_a 为单元2的轴向伸长。

$$\delta_a=(u_1)_2\cos\theta+(v_1)_2\sin\theta-(u_2)_2\cos\theta-(v_2)_2\sin\theta,$$

所以这些关系式导至为

$$(X_1)_2=\frac{AE}{l_2}\{[(u_1)_2-(u_2)_2]\cos^2\theta+[(v_1)_2-(v_2)_2]\cos\theta\sin\theta\},$$

而这个式子正是（1.2）式所给出的方阵第一行与位移分量矢列的乘积。(1.1)和(1.2)式中其他力的分量可由相同方式得到。

二个单元可如下述那样组合起来。我们首先导出图1.1中所谓的总体位移分量 u_1，v_1，u_2，v_2，u_3，v_3 和对每一单元局部位移分量之间的关系式，局部位移分量以 $(u_1)_i$，$(v_1)_i$，$(u_2)_i$，$(v_2)_i$ 表示，其中 $i=1, 2$ 为单元的编号。则

$$\begin{aligned} u_1&=(u_1)_1, & v_1&=(v_1)_1,\\ u_2&=(u_2)_1=(u_1)_2, & v_2&=(v_2)_1=(v_1)_2,\\ u_3&=(u_2)_2, & v_3&=(v_2)_2, \end{aligned}$$

节点上的平衡条件要求所施加的载荷分量等于每个单元在那个节点上载荷分量之和。当同时考虑到总体与局部位移分量之间的关系式和方程（1.1），（1.2）时，此时平衡条件要求为

$$\begin{aligned}
X_1&=(X_1)_1=0,\\
Y_1&=(Y_1)_1=\frac{AE}{l_1}v_1-\frac{AE}{l_1}v_2,\\
X_2&=(X_2)_1+(X_1)_2=(X_1)_2=\frac{AE}{l_2}[c^2u_2+csv_2-c^2u_3-csv_3],\\
Y_2&=(Y_2)_1+(Y_1)_2=\frac{AE}{l_1}(v_2-v_1)+\frac{AE}{l_2}[csu_2+s^2v_2-csu_3-s^2v_3],\\
X_3&=(X_2)_2=\frac{AE}{l_2}[-c^2u_2-csv_2+c^2u_3+csv_3],\\
Y_3&=(Y_2)_2=\frac{AE}{l_2}[-csu_2-s^2v_2+csu_3+s^2v_3],
\end{aligned}$$

这些方程可写成矩阵形式，给出组合结构的以矩阵表示的力和位移关系式：

$$\begin{Bmatrix} X_1\\ Y_1\\ X_2\\ Y_2\\ X_3\\ Y_3 \end{Bmatrix}=AE\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/l_1 & 0 & -1/l_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & c^2/l_2 & cs/l_2 & -c^2/l_2 & -cs/l_2\\ 0 & -1/l_1 & cs/l_2 & 1/l_1+s^2/l_2 & -cs/l_2 & -s^2/l_2\\ 0 & 0 & -c^2/l_2 & -cs/l_2 & c^2/l_2 & cs/l_2\\ 0 & 0 & -cs/l_2 & -s^2/l_2 & cs/l_2 & s^2/l_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3 \end{Bmatrix}。\qquad(1.3)$$

将这个方法推扩到连续体时，我们把连续体划分成有限个被称作为**单元**的小的、不相叠盖的区域（图1.2）。各个单元之间的公共边界称为**单元间边界**。我们可以想象这些单

元仅在它们公共边界上某些离散的点上被联结起来。这些点再加上一些在单元内特别选定的点统称为节点。每个节点都附有有限个自由度，而单元的特性由这些自由度来表征，这些自由度就是力学中的广义座标。它们一般都表示某些物理量，如节点上的位移、应力等等。图 1.3 展示了一个对平面弹性力学问题的典型三角形单元，取其三个角点为节点。

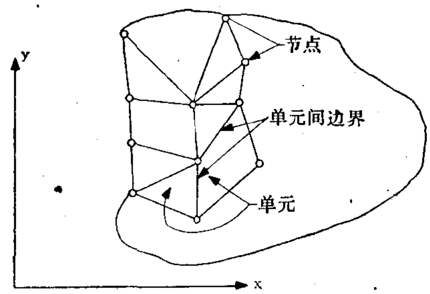

图1.2 连续体中的单元

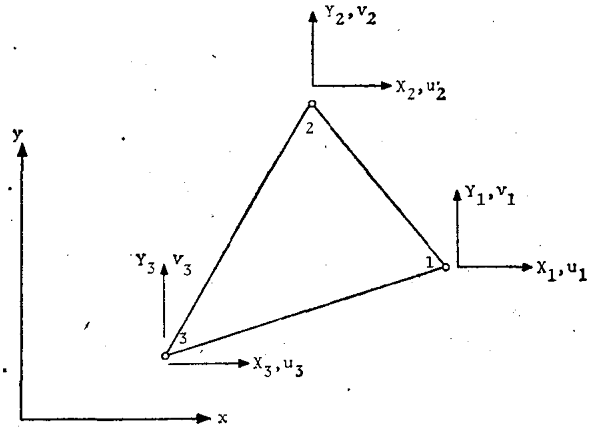

图1.3 三角形单元

三角形区域 1 2 3 的平面应力变形特性是由它们顶点的位移(u, v)和广义 力(X,Y)之间的关系来表征的，也即

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & & & & & \\ k_{21} & k_{22} & & \text{对称} & & \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & & & \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & & \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}。 \tag{1.4}$$

而求得 k_{ij} 就是有限单元法的基本任务之一。各个单元通常在它们的公共节点上有相同的广义座标。用单元的组合来近似地表达的连续体的特性可由整个广义座标的列阵加以研究。

要强调的是，在（1.1）式或（1.2）式中表征桁架单元的力和位移关系式是精确的。然而用（1.4）式来表征平面弹性体的三角形区域则仅仅是近似的。

1.3 数学概念

在经典的连续力学中，场问题通常是由一组微分方程和相应的边界条件，或者，如果存在的话，由变分原理的极值条件（大多数情况下是极大或极小）或由变分陈述的某些形式（不完全变分原理）来描绘的。例如，在张力N作用下绳索的变形 u 可用二阶微分方程来描述

$$N\frac{d^2u}{dx^2} = p(x),$$

而边界条件为

$$u = 0，在 x = 0，L 处；$$

或者它可由泛函的极小值来写出公式

$$\Pi=\int_0^L\left[\frac{1}{2}N\left(\frac{du}{dx}\right)^2+p\ (x)u\right]dx, \tag{1.5}$$

其中 u 是连续的，并且在 $x=0$，L 处等于零。作为另一个例子，对温度分布 T 的一维瞬时热传导问题可以用微分方程

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

来描述，其中 α 是热传导率，边界条件为

$$T(0,\ t>0)=1,\qquad \frac{\partial T}{\partial x}(L,\ t)=0,$$

其初始条件为

$$T(x,\ 0)=0,$$

或者它能以变分形式来建立公式

$$\delta\Pi=\int_0^L\left[\frac{\partial T}{\partial t}\ \delta T+\alpha\ \frac{\partial T}{\partial x}\ \frac{\partial\delta T}{\partial x}\right]dx=0 \text{●} \tag{1.6}$$

或者写成这样的形式

$$\delta\Pi=\int_0^L\left[\frac{\partial T}{\partial t}\ \delta T+\frac{\alpha}{2}\ \delta\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2\right]dx=0 \tag{1.7}$$

其中当 $t>0$ 时在 $x=0$ 处的 $\delta T=0$，$T(x,0)=0$ 和 $T(0,t>0)=1$。在适当的约束下，这二种方法在数学上是等价的。

在连续体力学中所寻求的解一般要具有高阶的可微性，要处处满足微分方程，并且要精确地满足所有边界条件。甚至在经典近似理论中（雷利-李兹法或迦辽金法）也只考虑十分光滑的函数。然而，在有限单元法中情况却有所不同。它的解与众不同的是用有限个自由度来决定，而且是分片光滑函数。这些函数的可微性一般要低于场方程组中导数的最高阶数。

例如，上面提到的二个问题都是由二阶微分方程组所控制的。有限单元的解一般都是连续的，它们的一次偏导数将是分片连续的，而它们的二次偏导数在许多节点上将在数学上没有定义。对图 1.4 所示的绳索问题，这典型的一维有限元解就是一个简单的分片线性函数。任意两点 $x=x_i$ 和 $x=x_{i+1}$ 间的解 u 可由下式来近似

$$u=u_i\left[1-\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right]+u_{i+1}\ \frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}。 \tag{1.8}$$

u 的一阶导数在 $x=x_i$ 处不连续〔在这里 u_i 有着物理含义，就是在 $x=x_i$ 处 u 的值。u_i 为这个问题的广义座标；它们可由（1.5）式的极小化来决定〕。

对于控制方程是四阶的情况（例如梁或板的弯曲，或双调和方程），有限单元的解一般仅具有连续的一阶偏导数。这一情况将在第七章中详细讨论。

我们能够想像一个连续体是由许多单元组合成的（对一个二维域如图 1.2，或对一个一维域如图 1.4）。每一单元本身都是一个连续体。当规定了一组相应的边界条件后，在每一单独的单元中的解就唯一地被决定了。作为一个例子来说，对于绳索问题，使定义域

● 原文误为 $\delta\Pi=\int_0^L\left[\frac{\partial T}{\delta t}\ \delta T+\alpha\frac{\partial T}{\partial x}\ \frac{\partial\delta T}{\partial x}\right]dx=0$。——译注

$0 \leqslant x \leqslant L$ 在节点 x_i, $i=1,2,\cdots\cdots,n$ 上划分成若干段(图 1.4)。如果给出了在 x_i 和 x_{i+1} 处的挠度，则整个一段 $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ 的挠度就唯一地被确定了。现在，如果对一个单元所规定的挠度正好与原连续体的这一区域的解是一样的话，则在这个单元中的解当然和连续体这一区域中的解是一样的。这样，在寻求连续体的解时，我们首先要用它们相应的边值来找到在这些单独单元中的解。对决定单元内部的解来说，单元的这些边值可作为假想的边界条件（就这些值取决于整个场问题的解这个意义而言）。就象以后将看到的那样，在单元内这些因变量的值是由单元边界上的节点值用插值方式来表示的。

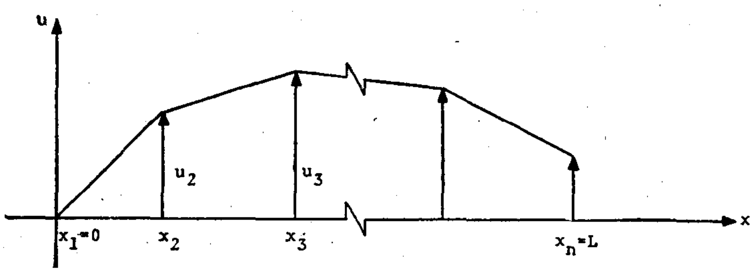

图1.4　二阶微分方程的一维有限单元解

在建立绳索问题解时，单元体的假想边界条件可取作为在节点上的挠度值 u_i。这样，在每个单元 $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ 内的解就能以二个节点的挠度 u_i 和 u_{i+1} 来构成。最后，所有节点的挠度便由这样的条件决定，即在 $x=x_1=0$ 和 $x=x_n=L$ 上，节点挠度为零，并且每一单元与相邻单元一起处于平衡状态之中。

作为另一个例子，在一个弹性力学问题中假想的边界条件可取为位移场在每一单元边界上的值，以及要求相邻单元在它们的公共边界上具有相同的位移。对任何一组假想的边界位移来说，在每个单元内就存在相应的一组位移、应力等的解。把所有单元的解合在一起，就将明确地给出在整个域中连续的位移场，这是因为对每个单元的位移解在单元内是连续函数，而且根据解释将与相邻单元的解在所有公共边界上相配合。但是，由有限单元解所得到的应力（或应变）场（它们是与位移的一次偏导数成正比的）一般地在单元间边界上是不连续的。所以，要求得相应的边界位移值就必须要求所有单元与它们相邻单元一起处于平衡状态（即要求一阶偏导数在边界上相配合）。对于有部分边界与原连续体的边界相重合的一个单元来说，在那一部分上的边界值必须和连续体规定的条件相一致。例如，在解中原先规定的条件是位移的那部分边界上，边界位移应当和规定的位移一样。如果原先规定的条件是边界力，则由单元解所导得的边界力应当具有和规定的力相同的值。

作为另一个例子，假定我们希望求解势的问题，它是由拉普拉斯（Laplace）方程 $\nabla^2\phi=0$ 来表示的。对单元体整个边界上为连续的 ϕ 来说，我们能够在每一个单元内找到相应的解 ϕ。在边界上的相应值可由二相邻单元函数的法向梯度在公共边界上一样，以及单元的解要满足原连续体边界条件这二个条件来决定。在用给定的一组假想边界条件对每个单元建立解时，或者要满足用假想的边界条件来求值所要求的法则时，我们可以尝试一下，或者是直接去满足这个微分方程，或者去寻找相应泛函的极值。

构成有限单元的解也遵循这一相似的过程。我们用有限个未知参数来近似地表达一个单元假想的边界条件组的值，这些未知参数一般是涉及单元边界上的节点的广义座标。各个单元的广义座标当它们共属于一个公共节点时一般是相同的。我们也力图做到相邻单元的边值在它们整个公共边界上相一致（那时，所有单元的解就叫做相容的)。这样，每一

单元的解（也称作为局部解），就可解析地求得，或者是精确的，或者是近似的。换言之，这个单元就可用有限个未知广义座标来表征，而它们相应的值就是我们所要求得的。实际上，最常用的方法中包含了变分原理。也就是说，在每个单元内的近似解是由单元的某一个用节点广义座标来表示的泛函对它求极值而得到的。而这些未知量则由整个定义域的另一个泛函的极值求得（或者由一个不完全泛函的一阶变分为零来得到）。整个定义域的泛函一般是这样建立的，即泛函的极值条件与决定假想边界条件的值所要求的条件是等价的。这样，由泛函的极值条件来求取未知广义座标就等价于在原来连续体问题中的这些条件近似地得到满足。显然，在单元间边界上近似解一般只有很低价的连续性；亦即在这里它的高阶导数没有定义。

例如在绳索问题中，单元 $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ 内的近似解首先就能由以下形式的插值用它的节的挠度来构成

$$u = u_i\left(1-\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)+u_{i+1}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}+\alpha\frac{(x_{i+1}-x)(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_i)^2}, \tag{1.9}$$

其中 u_i 和 u_{i+1} 分别为节点 x_i 和 x_{i+1} 处的节点挠度。未知量 α 马上就能根据泛函

$$\pi_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}}\left[\frac{1}{2}N\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + p(x)\ u\right]dx$$

对 α 的极小化通过 u_i 和 u_{i+1} 来决定（对第一次近似，α 可取为等于零）。然后(1.5)式的泛函 Π 可写成

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i, \tag{1.10}$$ ●

其中 π_i 是用节点值 u_i 和 u_{i+1} 来表示的。最后，所有节点的未知量 u_i 由 Π 对 u_i 的极小化，根据条件 $u_1 = u_{n+1} = 0$ 来求得。

在弹性力学的例子中，我们把边界位移用节点广义座标来插值。例如，沿图 1.3 中的三角形边的边界位移是用节点位移来插值的。对于节点 1 和 2 间的边线，其位移 u 和 v 可以表示为

$$\begin{aligned} u &= u_1\left(1-\frac{s}{l_{12}}\right)+u_2\frac{s}{l_{12}}, \\ v &= v_1\left(1-\frac{s}{l_{12}}\right)+v_2\frac{s}{l_{12}}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

其中 s 从节点 1 沿边线量起，l_{12} 是二个节点间的距离（在有限单元法中，对每一单元的边界位移插值时普通的习惯做法是使相邻单元的位移是精确地相容的）。单元内的近似解这时就能由某一泛函的极值用节点未知量表示来得到，这种泛函可以是单元的势能或余能。这就使得每一单独单元的近似势能可由节点未知量来表示。最后，由寻找整个定义域势能对所有节点未知量的极小值——它是（1.10）式中所有单元势能之和——我们就能决定所有节点未知量的值。在这个过程中，平衡方程和原来规定的边界条件都近似地得到满足。各个单元在垂直于单元边界法向上的一阶偏导数当越过单元间边界时一般是不连续的。

● 原文误为 $\Pi = \sum_{i=1}^{n-1} \pi_i$。——译注

1.4 基本原理

看起来，建立连续体的解可能不至于很复杂，这是因为我们先用具有未知值的某些假想边界条件对每个单独的单元构成它的解，然后施加特定的要求以求得假想边界条件的值。但是，有限单元法的基本前提是每一单元要尽可能小，以致其边界值在整个边界上的变化也是小的。这样，边界条件就能由一组在边界节点上的广义座标值和边界上节点之间作插值的某一光滑函数来近似。对任何这样一组边界值来说，在单元内也容易建立简单的近似解。近似的误差取决于单元的大小和自由度的多少。对于一个足够小的单元其误差也将是小的。对尚属未知量的广义座标间的关系由一组(线性)代数方程来表示，在一个连续体中问题的解因此就化为一个代数计算过程。为了改善近似程度，我们可以把区域划分成更小的单元，或者在每一个单元上使用更多的自由度，或两者兼而用之。

因而，有限单元法是应用局部的近似解来建立整个定义域的解的一种方法。局部近似地表征一个函数最重要的方面之一就在于它也能被用来建立这个函数完整的描述。例如，任何光滑函数都能在一个小的邻域内以一个或一些点上的值、斜率等等近似地加以描述。在有限单元法中我们把注意力集中在单个单元上。对于这个单元的局部近似的解将由有限个广义座标及载荷量值等来建立公式和构成；然后这个解将用于整个定义域中的其他单元。甚至对同一类型的各种问题（例如不同载荷、几何形状或边界条件的弹性力学问题），同样的或相类似的单元都能加以利用。在构成这局部、近似的解时，我们注意到在一个小的区域内，所有光滑函数看来都象是多项式。所以我们总是能用具有未知系数的多项式来表示单元的边界条件，或者等价地由以多项式作为插值函数的节点广义座标来表示，如同沿一个三角形单元（图1.3）的一边的（1.10）式那样。任意外载荷都能由具有已知系数的多项式来表示。在单元内部，同样也能把解由多项式来近似，或者简单地将单元内的边界值用多项式插值近似，如象（1.8）式的一维问题，其中 u_i 和 u_{i+1} 就是单元的边界值。

现在，近似度就成了一个我们怎样才能很好地在一个单元上用多项式去逼近一个函数的问题了。当然，这也取决于原来函数光滑的程度如何，单元的大小如何以及所使用的多项式的完整性达到何种程度（最后一个条件一般是由一个单元有多少个自由度来支配的）。用多项式来逼近等价于在整个单元上应用不完全的泰勒(Taylor)级数展开来表示一个函数。这样，对一个函数是非常光滑的区域，或者泰勒级数展开收敛得很快的和有大的收敛半径的区域来说，我们就能应用大的单元，并且（或者）每个单元有较少自由度（这就等价于泰勒级数只取低次项）而仍具有良好的近似程度。另一方面，对一个函数急剧变化的区域，或它的泰勒级数只有较小收敛半径的区域，我们必须使用较小的单元，并且（或者）每个单元有多个自由度。实际上，我们不可能确切知道实际解的性质如何。但是，网格的布置（有限单元的划分）能够按上述方法予以估计和规划，以便从经济上得到一个良好的近似解。

1.5 某些总的考虑

在有限单元解的实际构造中，有很多指定边界值（假想边界条件）和一个单元内近似解（插值函数）的方法。例如在弹性力学问题中，我们可以应用位移场、边界力或是二者

的组合来表示单元的边界条件；这样单元内的近似解就能用位移、应力或二者来构成。这不同的选择将导致不同的有限单元模型（卞学璜和董平 1969，1972）。

如同前面所指出的那样，我们可相当自由地选择单元的形状，选择节点和自由度的类型及数量。单元的选择必须建立在精度和方便性之间的协调上。在选择单元形状时的注意事项之一就是单元要恰好地适合原来的定义域：单元一般为多边形，如在二维域中的三角形、矩形和任意四边形，或为多面体，如在三维域中的四面体、六面体。同样地单元也可是这种形状，它只要经过简单的座标转换就能转换成多边形或多面体（这就是所谓的等参数变换）。至于节点的选择，那末第一条标准就是要使得用节点位置来描述单元的几何形状很容易。另外的标准就是易于构成近似解，并且能较好地表征用节点广义座标表示的局部近似解。例如在区域被划分成许多小段的一维问题中，每段的端点自然地被选作节点，如图 1.4 所示的那样。但是我们也可使用每段内的一些点作为节点以便构成更精确的局部近似解。在划分成很多三角形单元的二维域中，三角形的三个顶点和三条边的中点通常取为节点。此外，我们也可以在三角形中和（或）三角形边上选择一些节点。每一节点上的自由度的类型和数量的选取主要是要很好地表示和容易构成每一单元的近似解；当我们应用插值函数作为近似解时，这一点是至关紧要的。

在一个良好的表达式中，最重要的注意事项之一就是保证相邻单元在沿着它们公共边界上的边界值的相容性。如象在 1.3 节中的弹性力学示例那样，当我们打算用单元的边界位移来获得单元的解时，我们就要弄清楚广义座标和插值函数表示的边界位移是否和单元间边界上的相同。如果我们要把用平衡边界力来获得单元的解时，我们就要使力在相邻单元的整个公共边界上是完全相配合的。

1.6 位移模型

到这里为止，涉及各种有限单元法的一般概念已作了讨论。大多数现有的有限单元模型都可以由单元边界上所表征的边界值（假想边界条件）和对于以这些边界值来构成每一单元内近似解时所用的过程来分类（卞学璜和董平1969，1972）。最简单的有限单元模型之一就是所谓的位移模型(按照固体力学的术语)，在这个模型中，近似解是把函数从单元的边界到内部进行插值而得到的。例如（1.8）式可看作绳索问题在单元 $x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}$ 中的近似解；但是 u 实际上是以线性函数来插值节点值 u_i 和 u_{i+1}。更一般地说，如果我们在弹性力学问题中用位移来表示边界值，并且如果在单元内位移由插值函数表示，则应变、应力等都能由这些近似位移来导得。例如，对于由（1.11）式给出的图 1.3 中三角形整个边界的位移，在三角形内这位移能由下述简单的插值来近似

$$
\begin{aligned}
u &= u_1 f_1(x, y) + u_2 f_2(x, y) + u_3 f_3(x, y), \\
v &= v_1 f_1(x, y) + v_2 f_2(x, y) + v_3 f_3(x, y),
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

其中 f_i 称作为**插值函数**，并且选得使（1.12）式的 u 和 v 在节点 1 和2的边上满足(1.11)式，并且在其他边上满足类似的方程。

对于在本书中应用极多的位移模型，有限单元法可以从很简单的观点上加以发展。我们用下式来近似一般的函数 u

$$u = \sum_i u_i f(\mathbf{x}) \tag{1.13}$$

（在本书中如象这里一样，矢量和矩阵都由粗黑体字来表示）。

在这里 u_i 为未知参数，$f_i(\mathbf{x})$ 是插值函数。几乎与雷利-李兹法一样，未知参数是由如（1.5）式的泛函变分的驻值，或者如（1.6）式或（1.7）式的变分形式来求得。这二种方法的不同在于未知参数和插值函数的选取。在雷利-李兹法中，$f_i(\mathbf{x})$ 一般是非常光滑的函数，而 u_i 恰好是它的幅值。在有限单元法中，通常 u_i 或者是在定义域中某一离散点上 u 的值，或者是 u 的导数，而 $f_i(\mathbf{x})$ 要选择得除了在连续体的子区域外处处为零。这个子区域一般为少数单元的集合体。函数 $f_i(\mathbf{x})$ 一般仅仅是分片光滑的。对于一个由 n 阶微分方程所控制的问题仅仅要求函数 $f_i(\mathbf{x})$ 是 $(n-1)$ 次可微的（董平和卞学璜 1967；费克斯（Fix）和斯特朗（Strang）1969）。例如，在图1.5中表示（1.8）式中函数 u 的分片线性表达式。这里

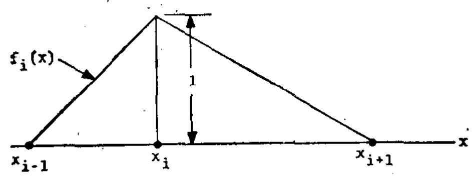

图1.5 （1.8）式函数 u 的分片线性表示

$$f_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & \text{对 } x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i; \\ 1 - \dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} & \text{对 } x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}; \\ 0 & \text{其他区域,} \end{cases} \tag{1.14}$$

这就是在第 $i-1$ 个单元 $(x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i)$ 和第 i 个单元 $(x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1})$ 上 $f_i(x)$ 为线性函数，而在这二个单元以外的区域 $f_i(x)$ 为零。在这个情况下，$f_i(x)$ 是连续的，但仅仅是分片可微的。函数 u 表示成（1.10）的形式等价于

$$u = \sum_i [u_i f_i(x) + \alpha_i g_i(x)],$$

其中 u_i 和 α_i 是未知参数，$f_i(x)$是和（1.14）式中所定义的一样，并且

$$g_i(x) = \begin{cases} \dfrac{4(x_{i+1} - x)(x - x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2} & \text{对 } x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}; \\ 0 & \text{其他区域。} \end{cases}$$

这个函数表示在图 1.6 中。

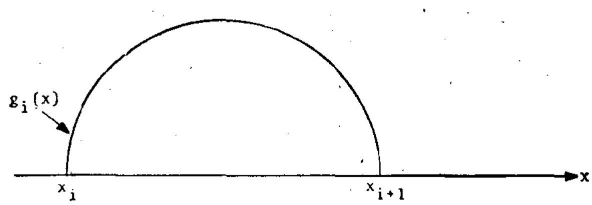

图1.6 u 的分片光滑表示

对于要求使用如（1.12）那种表达式的二维域来说，一个典型的插值函数 $f_i(x, y)$ 就是图 1.7 所示的角锥函数（pyramid function）；也就是