高等数学解难

——习题选解与习题课指导

李铁臣　高　进　等编著

航空工业出版社

高等数学解难
习题选解与习题课指导

高等数学解难

——习题选解与习题课指导

李铁臣　高　进　等编著

航空工业出版社

1999

内 容 提 要

全书根据国家教委颁发的普通高等院校"高等数学教学基本要求",按现行高等数学教学内容分为十一个单元,每单元三部分内容:(一)习题选解,将同济大学数学教研室编写的《高等数学》(第四版)上、下册每章后习题大部分予以解答并讲明解题思路和提供多种解法;(二)习题课内容,包括本次习题课教学基本要求、课堂提问、课堂练习、补充例题与课外作业,所选内容是我们多年的教学经验,既配合讲课内容中的重点、难点,学生易犯的错误,在积累知识的同时又注意到对解题能力的培养;(三)自我测试题,分基本(A卷)和稍难(B卷)各一份。兼顾教与学是本书的最大特点。

本书除可作为普通高等院校高等数学教师的习题课教材或教学参考书外,又可作为学生学习高等数学这门课的辅导材料,还可作为自学高等数学的学习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解难:习题选解与习题课指导/李铁臣主编;高进等编著.—北京:航空工业出版社,1999.8

ISBN 7-80134-501-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①李…②高… Ⅲ.高等数学-解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 33349 号

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里 14 号　100029)

北京地质印刷厂印刷　　全国各地新华书店经售

1999 年 8 月第 1 版　　1999 年 8 月第 1 次印刷

开本:787×1092　1/16　　印张:23.5　　字数:585 千字

印数:1-4000　　定价:28.00 元

序

当前科技领域的竞争，主要是人才的激烈竞争。在科教兴国方针指引下，教育工作者要强化质量意识，加强素质教育，为培养高质量的人才而努力。

由北京联合大学李铁臣副教授主编的《高等数学解难——习题选解与习题课指导》一书，就是他们在数学教学中，改进教学方法，加强素质教育的一次有益尝试。作为数学课堂教学的辅导教材，在"解难"二字上下功夫，在"指导"过程中见成果。它符合工科数学课委会制订的教学基本要求，其内容体系又和同济大学数学教研室编写的《高等数学》上、下册相匹配。它每一单元的内容，都根据课堂教学进度选材，设有习题选解、课堂练习、补充例题与课外作业等，系统性和针对性都较强。

本书的练习，包括各类典型的概念题、计算题、证明题以及带有启发性的思考题，有利于学生正确理解和掌握高等数学的基本内容，拓宽学生知识面，有利于对不同解题思路的循循善诱，这集中反映了编者的丰富教学经验。

数学教师的工作是一种特殊的劳动，他们要善于在讲解大量数学练习过程中，有效地为培养创新型人才服务。他们在现代教育思想指导下，设计了使学生易于理解数学概念的情境，教给学生各种精巧的方法引发思考，激发学生的创新意识，不断冲击原有的知识结构，并逐步构建起新的知识框架 。在这样的教学过程中，教师们用自己的方法，不断激起学生们智慧的火花。

这是一本有特色的数学辅导教材，我相信，在数学教学过程中，它会成为学生们进行数学训练的良师，也会成为教师，特别是青年教师备课选材的益友。我乐意向有关院校和教师推荐这本书，并在此向为本书编写付出辛勤劳动的老师们表示敬意。

北京数学会理事

北京信息工程学院教授

郭锡伯

1999 年 6 月 2 日

本书编写人员

主　　编　　李铁臣（联大化工学院）
副 主 编　　高　进（联大基础部）

第一单元　　车　燕（联大基础部）
第二单元　　宋红敏（联大文理学院）
第三单元　　史凤丽（联大基础部）
第四单元　　侯文宇（联大机械工程学院）
第五单元　　郎　霞（联大商务学院）
　　习题选解（一）至（八）
　　习题课 5－1，5－2
　　常铁林（联大商务学院）
　　习题选解（九）至（十四）习题课 5－3
　　自我测试题 A、B 卷
第六单元　　孙文敏（联大化工学院）
第七单元　　李铁臣（联大化工学院）
第八单元　　高　进（联大基础部）
第九单元　　李铁臣（联大化工学院）
第十单元　　史凤丽（联大基础部）
　　习题选解　习题课 10－1
　　侯文宇（联大机械工程学院）
　　习题课 10－2，10－3
　　自我测试题 A、B 卷
第十一单元　　常铁林（联大商务学院）
绘　　图　　郎　霞（联大商务学院）

前　言

本书的读者群是工科全日制本、专科大学生与讲授高等数学课程——特别是担任习题课教学任务的青年数学教师，也包括电大、夜大、职大和高职(高等职业技术教育简称，属大学本、专科)学生及准备参加高教自考高等数学课程的自学者。

全书按高等数学的教学内容分为十一个单元(参看目录)，每个单元又分三部分：一、习题选解；二、习题课内容；三、自我测试题。

本书的每个单元的第一部分"习题选解"所选习题全部来自同济大学数学教研室主编的《高等数学》(第四版)(以下简称同济"高数"四版)上、下册各章节后的习题与总习题。为便于读者查阅，本书"习题选解"部分各段的内容标题后用括号注明该部分习题选自同济"高数"四版的习题号及页码，例如第一单元：

一、习题选解

(一)函数(上册，习题 1-1，p16)

即指该段所选习题为同济"高数"四版上册中的习题 1-1，位于该书的第 16 页。另外，本书第一单元至第六单元的习题对应同济"高数"四版上册第一章至第七章，而本书第七单元至第十一单元的习题对应同济"高数"四版下册第八章至第十二章的习题与总习题。

高等数学习题课是高等数学课程的重要组成部分，它和讲课课时之比为 1:2 或 1:3。高等数学习题课的目的是在课堂上、在教师的指导下，由学生利用已学过的特别是前不久刚学过的概念、定理和公式来解答各类习题，以加深对理论知识的理解和掌握。本书各单元第二部分"习题课内容"，就是根据教学计划安排的若干次习题课，每次习题课内容包括：(一)教学基本要求；(二)课堂提问；(三)课堂练习；(四)补充例题；(五)课外作业。

本书每个单元的第三部分为读者安排了"自我测试题"A、B 卷各一份。

本书和同类教学参考书相比,具有如下特点:

一、编写的指导思想力图使本书符合国家教委1995年颁发的“教学基本要求”,每次习题课内容中“教学基本要求”就是国家教委规定的“教学基本要求”的相关部分。

二、“习题选解”占全书的1/2左右,所给解答均较为详细,有的作了分析,有的一题多解,有的指出解题思路、常用的方法和技巧,还有的指出初学者易犯的错误。

三、“习题课内容”中的“课堂提问”部分涵盖了几乎全部相关的理论知识:定义、公理、定理与公式。起到帮助学生澄清概念、加深理解及提高应用所学知识解答习题的能力。

四、“习题课内容”中的“课堂练习”、“补充例题”与“课外作业”所选例题、习题尽量做到解法典型、有代表性、新颖而不落俗套。特别是“补充例题”有一定的难度和技巧,对提高学生的学习兴趣和掌握解题方法会有较大的帮助。

五、每单元的“自我测试题”有难有易:A卷较易,B卷稍难;试题类型有填空题、单项选择题、计算题、证明题、应用题和综合题,其中有少量的历年来硕士研究生入学考试题及部分高校期末考试题。

六、培养学生分析问题和解决实际问题的能力,强调数学在实践中的应用,注意应用题的分析、解答和选编,如导数中相关变化率、求最大值和最小值的应用题及积分中的几何与物理应用题,特别在第十一单元单独安排了一次习题课为微分方程的应用。

本书可以说是北京联合大学数学协作组为提高高等数学教学质量所做的努力和尝试。但由于时间紧、难度大以及编者水平有限,本书一定会有不少缺点和错误,敬请广大读者批评指正。

编　者

1999年6月

目　录

① (七)左上的 * 是同济“高数”四版上原有的。下同。

第一单元　函数、极限与连续

一、习题选解

(一) 函数(上册,习题 1 - 1,p16)①

11. 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$上的,证明:

(3) 定义在对称区间$(-l,l)$上的任意函数可表示为一个奇函数与一个偶函数的和。

证　设$f(x)$为定义在$(-l,l)$上的任意一个函数

令 $g(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$

$\because\quad g(-x)=\frac{1}{2}\{f(-x)+f[-(-x)]\}=\frac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=g(x)$

$\therefore\quad g(x)$为偶函数

令 $h(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$

$$\because\quad h(-x)=\frac{1}{2}\{f(-x)-f[-(-x)]\}$$
$$=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-h(x)$$

$\therefore\quad h(x)$为奇函数

而　$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=g(x)+h(x)$

$\therefore\quad f(x)$可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

12. 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(3)　$y=\sin x,\quad(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

证　设$x_1,x_2\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$,且$x_1<x_2$,

因为　$f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1=2\cos\frac{x_2+x_1}{2}\sin\frac{x_2-x_1}{2}$

而　$-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{\pi}{2},\qquad\cos\frac{x_2+x_1}{2}>0,$

又　$0<\frac{x_2-x_1}{2}<\frac{\pi}{2},\qquad\sin\frac{x_2-x_1}{2}>0$

$\therefore\quad f(x_2)-f(x_1)>0$,即$y=\sin x$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内单调增加.

---

① 注:参见前言第三段,以下至第七单元,省略“上册”二字。

13. 设$f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数,若$f(x)$在$(0,l)$内单调增加,证明$f(x)$在$(-l,0)$内也单调增加。

证 设 $x_1,x_2\in(-l,0)$ 且 $x_1<x_2$(注意 x_1,x_2 均为负数),则 $-x_1,-x_2\in(0,l)$,且 $-x_2<-x_1$(如图 1-1),$-x_1,-x_2$ 均为正数。已知 $f(x)$ 在$(0,l)$ 内单调增加,则 $f(-x_2)<f(-x_1)$。因为 $f(x)$ 在$(-l,l)$ 内是奇函数,故 $f(-x_2)=-f(x_2)$,$f(-x_1)=-f(x_1)$,即 $-f(x_2)<-f(x_1)$,亦即 $f(x_1)<f(x_2)$。这就证明了在$(-l,0)$内任取 $x_1<x_2$,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,所以 $f(x)$ 在$(-l,0)$ 内也单调增加。

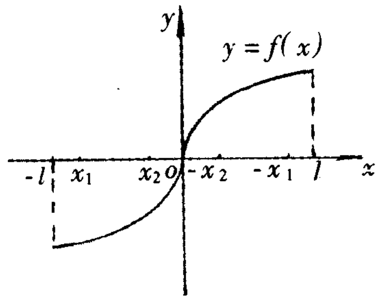

图 1-1

14. 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数,指出周期:

(4)$y=x\cos x$;　　(5)$y=\sin^2 x$

解 (4)$y=x\cos x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$,下面用反证法证明它不是周期函数。

假设 $y=x\cos x$ 有一个周期 $T>0$,则$(x+T)\cos(x+T)=x\cos x$,对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$ 都成立,令 $x=0$,得 $T\cos T=0$,因为 $T>0$,故 $\cos T=0$,从而 $T=n_0\pi+\dfrac{\pi}{2}$(n_0 是某一个确定的整数)。取 $n_0=0$,得 $T=\dfrac{\pi}{2}$,于是有

$$\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=x\cos x$$

再令 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 代入上式,得 $\pi\cos\pi=\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}$

即 $-\pi=0$,推出矛盾

$\therefore$ $y=x\cos x$ 不是周期函数

(5)$y=\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$

因为 $\cos x$ 的周期是 2π,故 $\cos 2x$ 的周期是$\dfrac{2\pi}{2}=\pi$,因此 $y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2x$ 的周期也为 π,即 $y=\sin^2 x$ 是周期函数,其周期为 π。

说明　为什么 $f(x)$ 的周期为 T,则 $f(\omega x)$ 仍为周期函数,且周期为$\dfrac{T}{\omega}$?可以这样来证:因为 T 是$f(x)$ 的周期(一般都指最小正周期),所以当 $\omega>0$ 时,$g(x)=f(\omega x)=f(\omega x+T)=f\left[\omega\left(x+\dfrac{T}{\omega}\right)\right]=g\left(x+\dfrac{T}{\omega}\right)$,这说明$\dfrac{T}{\omega}$ 是 $g(x)$,即 $f(\omega x)$ 的周期。

16. 对于函数$f(x)=x^2$,如何选择邻域 $U(0,\delta)$ 的半径 δ,就能使与任一 $x\in U(0,\delta)$ 所对应的函数值 $f(x)$ 都在邻域 $U(0,2)$ 内?

分析　逆序思考:先假设 $f(x)$ 在邻域 $U(0,2)$ 内,逐步推出自变量 x 应满足的条件,从而求出 x 所属邻域的半径 δ。

解 欲使 $0<f(x)<2$,即 $0<x^2<2$,注意到 $x>0$,只要 $0<x<\sqrt{2}$,所以 $\delta=\sqrt{2}$ 就是使 $f(x)$ 落在邻域 $U(0,2)$ 内的半径,显然取任何小于$\sqrt{2}$ 的正数作半径 δ 亦可。

17. 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在

X 上既有上界又有下界。

证 必要性 若函数 $f(x)$ 在数集 X 上有界，则存在正数 M，使得 $|f(x)|\leqslant M$，即有 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$，对任一 $x\in X$ 都成立。由函数 $f(x)$ 在 X 上有上界和下界的定义知，M 和 $-M$ 分别是 $f(x)$ 在数集 X 上的上界和下界，所以 $f(x)$ 在数集 X 上既有上界又有下界。

充分性 若函数 $f(x)$ 在数集 X 上既有上界又有下界，则存在数 K_1 和数 K_2，使得

$$K_1\leqslant f(x)\leqslant K_2$$

对任一 $x\in X$ 都成立，取 $M=\max\{|K_1|,|K_2|\}$

则有 $-M\leqslant K_1\leqslant f(x)\leqslant K_2\leqslant M$

即 $|f(x)|\leqslant M$

对任一 $x\in X$ 都成立，所以 $f(x)$ 在数集 X 上有界。

(二) 初等函数(习题 1－2，p31)

10. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，问 (1) $f(x^2)$；(2) $f(\sin x)$；(3) $f(x+a)$，$(a>0)$；(4) $f(x+a)+f(x-a)$，$(a>0)$ 的定义域各是什么？

解 这是求复合函数定义域的问题，若 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，要求 $u=\varphi(x)$ 的值域 u 在 $y=f(u)$ 的定义域内，因而有

(1) $f(x^2)$，应有 $0\leqslant x^2\leqslant 1$，则 $f(x^2)$ 的定义域为 $|x|\leqslant 1$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

(2) $f(\sin x)$，应有 $0\leqslant \sin x\leqslant 1$，则定义域为 $2k\pi\leqslant x\leqslant (2k+1)\pi$ $(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 故 $y=f(\sin x)$ 的定义域是 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi$，($k$ 是整数).

(3) $f(x+a)$，应有 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，即 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$.

(4) $f(x+a)+f(x-a)$，由 (3) $f(x+a)$ 的定义域：$-a\leqslant x\leqslant 1-a$. 同理 $f(x-a)$ 的定义域：$a\leqslant x\leqslant 1+a$. 故 $y=f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域应是两函数定义域的公共部分，由 $1-a$ 与 a 的大小而定：

① 若 $1-a<a$，即 $a>\dfrac{1}{2}$，函数 y 无定义域，即定义域为 $\varnothing$；

② 若 $1-a=a$，即 $a=\dfrac{1}{2}$，函数 y 定义域是 $x=\dfrac{1}{2}$；

③ 若 $1-a>a$，即 $0<a<\dfrac{1}{2}$，函数 y 定义域是 $a\leqslant x\leqslant 1-a$，即 $[a,1-a]$.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1\end{cases}$ $g(x)=\mathrm{e}^x$， 求 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并作出这两个函数的图形。

解 $$f[g(x)]=f(\mathrm{e}^x)=\begin{cases}1, & |\mathrm{e}^x|<1\\ 0, & |\mathrm{e}^x|=1\\ -1, & |\mathrm{e}^x|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ -1, & x>0\end{cases}\quad(\text{见图 } 1-2)$$

$$g[f(x)]=\mathrm{e}^{f(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1\\ 1, & |x|=1\\ \mathrm{e}^{-1}, & |x|>1\end{cases}\quad(\text{见图 } 1-3)$$

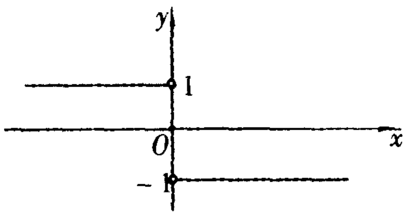

图 1-2

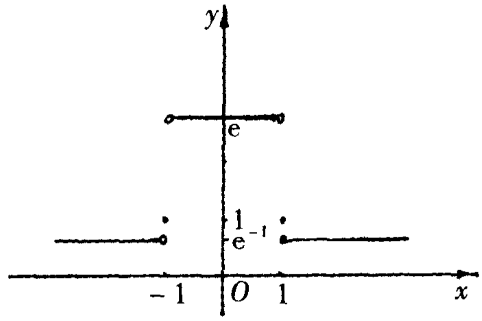

图 1-3

15. 已知水渠的横断面为等腰梯形，斜角 $\varphi = 40°$（图 1-4），当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时，求湿周 $L(L = AB + BC + CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式，并说明定义域。

解 $AB = DC = \dfrac{h}{\sin 40°}$，从 $S_0 = \dfrac{1}{2}h[2BC + 2\cot 40° \cdot h]$，得 $BC = \dfrac{S_0}{h} - \cot 40° \cdot h$，所以 $L = \dfrac{S_0}{h} + \dfrac{2 - \cos 40°}{\sin 40°}h$，自变量 h 的取值应由不等式组 $\begin{cases} h > 0, \\ \dfrac{S_0}{h} - \cot 40° \cdot h > 0 \end{cases}$ 确定，故定义域为 $0 < h < \sqrt{S_0 \tan 40°}$

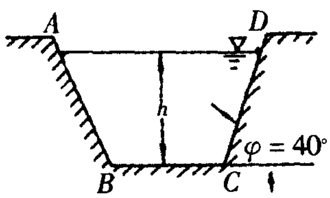

图 1-4

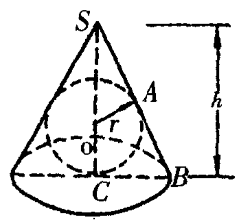

图 1-5

16. 一球的半径为 r，作外切于球的圆锥（图 1-5），试将其体积表示为高的函数，并说明定义域。

解 由 $\triangle SAO \backsim \triangle SCB$ 得 $\dfrac{SA}{SC} = \dfrac{OA}{CB}$，设 $SC = h$，即 $\dfrac{\sqrt{(h-r)^2 - r^2}}{h} = \dfrac{r}{CB}$，故 $CB = \dfrac{hr}{\sqrt{(h-r)^2 - r^2}}$，圆锥体积 $V = \dfrac{h}{3}\pi \overline{CB}^2 = \dfrac{\pi r^2 h^3}{3[(h-r)^2 - r^2]} = \dfrac{\pi r^2 h^2}{3(h-2r)}$，自变量 h 的取值由不等式组 $\begin{cases} h > 0 \\ \sqrt{(h-r)^2 - r^2} > 0 \end{cases}$ 确定，故定义域为 $2r < h < +\infty$.

（三）数列的极限（习题 1-3，p42）

2. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n = \dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 并求 N，使当 $n > N$ 时，x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε，当 $\varepsilon = 0.001$ 时，求出数 N.

解 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n} = 0$