流体力学有限元

杨曜根　编

序　言

流体力学中描述流体在流场运动规律的一些基本方程都是非线性偏微分方程，因而只能对较简单的流动问题求解析解。对我们所研究的物理过程，如果打算采用经典的数学方法来解它们的微分方程，以求得解决工程实际中许多感兴趣的问题，那几乎是没有希望的。在过去，流体、传热等各项工程技术领域中的大量问题，传统上都采用基于相似理论指导下的实验研究或近似模型的计算。为了提高解决问题的能力，要求实验耗资巨大，还常常不能自由地选取物理参数，如实地模拟实际，常常不能做实物试验。这些就是搞理论流体力学和实际流体力学的学者所感到的困难。随着计算机技术的发展，用数值方法求解描述这类问题的比较复杂的偏微分方程取得很大进展和成就，与实验结果吻合良好。数值计算能以较少的费用和较短的时间预示出有实用意义的研究结果，对投资大、周期长的实验研究来说，这优点尤为突出。这就促进了流体力学的一个分支——计算流体力学的发展。计算流体力学是撇开了求微分方程的解析解，而是去寻求流场中许多离散节点上物理量的具体数值解，是进行偏微分方程的近似数值计算。它比理论流体力学更接近实际，因它从此可以计算大量理论流体力学不能计算的实际问题。而且它又不象实验流体力学那样耗资巨大，而且可自由选取物理参数。当然，它又是离不开理论流体力学，因它不可能离开理论流体力学所建立的基础理论。它在解题时仍要作一定的近似假设，建立计算模型，而计算结果也必须由实验来验证。

有限差分法和有限元法发展成了近似数值计算的两个重要分支。

有限差分计算已广泛被应用于各工程领域。这种计算方法是

用适当的网格把流场空间剖分成许多子域，把求解的流场中连续物理量变成网格节点上离散的物理量，从物理过程的微分方程着手，近似地用差分、差商来代替微分方程中的微分、微商，把微分方程转化为有限形式的差分方程，建立起离散化物理量的数值解。有限差分法已有较长的发展历史，在理论方面(例如，关于解的存在和唯一性、收敛性和稳定性分析、精度估计等方面)已较有基础。

有限元法的发展是基于古典的变分法(Ritz 法)。古典变分法是从泛函着手，对泛函求极值，求得方程的近似解析解。但由于古典复分法没有在整个求解域上作离散处理，寻求的是对全区域都要满足的近似解析解，这就使它的运用与发展受到很大限制，只能求解一些简单的问题，不能满足工程实际需要。而现今的有限元法是古典变分法与离散、多项式数值方法相结合的产物。后者使古典变分法的不足之处得到了充分的弥补。而近代高速电子计算机的出现也使有限元方法的计算成为了可能。

有限元法与有限差分法的区别在于离散化的方法和建立代数方程组的途径都不同。在离散化的方法上，由于有限元法的单元剖分可以是任意的，单元的形状可多种多样，可以用任意形状网格来分割区域，这就更能适用于不规则的边界形状，对区域的形状有较大的适应性，还可根据场函数的需要疏密，有效地、自如地布置节点。而有限差分法是采用直交网格，故较难适应区域形状的任意性，而且区分不出场函数在区域中轻重缓急的差异。与有限差分法相比，有限元法的发展是起步较晚的，它的研究还很不完善，例如，在误差分析等方面。

有限元法是 R · Courant 于 1943 年首先提出的。50 年代由美国的航空结构设计工程师所发展，被成功地应用于当时的美国军用飞机的结构设计计算上，随后逐渐扩展到土木结构等工程领域。60 年代以后，在愈来愈多的工程领域内得到广泛应用，由于流体力学问题的复杂性，有限元法用于流体力学领域的起步迟至 70 年代才发展，故有限元法在流体力学中的应用和研究还较初步和不

成熟。

在有限元法研究中，有二大方法：一是基于变分原理的有限元法；另一是基于加权余量的有限元法。由于在工程问题应用中，尤其是当微分方程不能自伴时，往往找不到相应的变分原理，而伽辽金法不需要变分原理，所以有限元法当应用于流体力学时，伽辽金法往往显示出最为方便有效，所以本书仅限于重点研究加权余量法，而且重点不在于介绍关于有限元方法的数学理论，而是使读者着重掌握有限元方法结构等基础知识，及其在计算机上实现的技巧，及如何应用有限元法解决流体力学问题，了解和掌握有限元方法解题的一般规律和基本思路。

目　　录

第一章　变分法和加权余量法

在本章中，我们将阐述为讨论有限元法所必须要的一些数学预备知识，并且将分别简述应用于经典的近似分析方法上的变分原理和加权余量法，例如瑞利-里兹法和伽辽金法。由此展示出从这些经典近似方法到现代有限元法的沿革与发展。由于后续各章将仅限于以讨论伽辽金法为中心，故本章中述及到泛函和变分原理时并非必学内容，故只作一般性概念介绍，不求数学上的严密，并不要求读者有较深知识。

§1.1　泛函与变分

同样一个物理问题，在数学上可以有二种提法：一种是化为微分方程求解；另一种是从变分原理出发，化为虚功原理的形式，或变成能量泛函求极值的问题。

例如，在理论力学中，质点的平衡方程是：

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i = 0 \qquad (1.1-1)$$

即所有作用在质点上的力之和为0。

同样这个问题，也可用虚功原理表示，即质点平衡的充要条件是：当质点作任意的虚位移时，所有作用在质点上的力所作的虚功之和等于零，即

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i \cdot \delta\overline{r} = 0 \qquad (1.1-2)$$

或从势能原理的观点说，若作用于质点上的力是具有势的，则在稳定平衡时，势能应处于最小，即势函数 u（x，y，z）应取极值

(极小)：

$$\delta u(x,y,z)=0 \tag{1.1-3}$$

这就是说，对同一个物理过程，存在二种数学提法（它们是互为等价的)，既可以被微分方程所描述，又服从相对应的能量极小原理的提法。方法虽不同，但从两个不同侧面反映同一自然规律。

(1) 泛函

为了便于理解，不妨列出泛函与函数的区别作为对照比较：

函数的自变量是数。	泛函的自变量是函数。
例：$y=y(x)$	例：$I=I(y)=I[y(x)]$
例：$T=T(x,y)$	例：$I=I(T)=I[T(x,y)]$

为了理解泛函的概念，下面示例的具体的物理问题——最速降落线问题。

[例 1.1]　试确定一条曲线 $y=y(x)$，连接不在同一铅垂线上的二个定点 A、B（见图 1.1-1)，使质量 m 在重力作用下沿这曲线由高点 A 自由下滑到低点 B 所需时间为最短(不计摩擦)．具有这种性质的曲线称最速降落线．

[解]　设选取坐标如图 1.1-1 所示。设在重力作用下，t 瞬时、质量为 m 的质点在 $P(x,y)$ 处，则根据能量守恒（不计摩

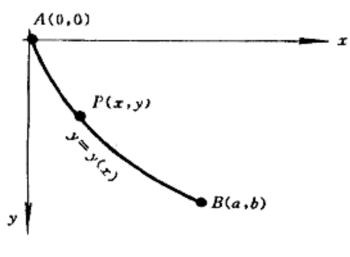

图 1.1-1

擦）可列出：

$$m \cdot g \cdot y = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \cdot \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2$$

即

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gy}$$

则可写出：

$$t = \int \mathrm{d}t = \int_A^B \frac{\mathrm{d}s}{v} = \int_A^B \frac{\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}}{\sqrt{2gy}}$$

即

$$t = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x \qquad (1.1-4)$$

或表示为：

$$t = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\mathrm{d}x$$

在上式中，$y = y(x)$ 是个函数，而 t 又是 y 的函数，t 即称为泛函。这里 $y(x)$ 即是所求的曲线，它要满足 t 极小条件。从数学上看，这就是对泛函 t 求极值的问题，数学上即称为变分。变分计算就是找出这个极值曲线 $y(x)$ 。最速降落线问题是 1696 年伯努里提出的古典变分问题。

［例 1.2］　在上例中，连接 A、B 二个定点的曲线 $y(x)$ ，该曲线的长度 L 显然与曲线 $y(x)$ 的形状有关，即

$$L[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x \qquad (1.1-5)$$

可见，曲线长度 L 就是个泛函。

［例 1.3］　在上例中，连接二个定点 A、B 的曲线 $y(x)$ 绕 x 轴旋转生成曲面（见图 1.1－2），求解曲面积为最小时的曲线形状 $y(x)$ 。

［解］　曲面积 $= 2\pi\int y\mathrm{d}s$

$$= 2\pi\int_{x_1}^{x_2} y \cdot \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x \qquad (1.1-6)$$

可见，这也是对泛函求极值的问题。

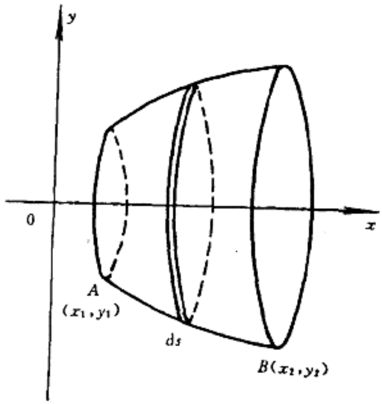

图 1.1－2

通过上述实例对泛函这个数学概念的理解就具体了。为了加深理解，再列出泛函与函数进行对照如下：

函 数 $y(x)$	泛 函 $I[y(x)]$
自变量：x	自变量：函数 $y(x)$
变量：y	变量：I
x 的增量：Δx，微分 dx	$y(x)$ 的增量：Δy，变分：δy
函数的微分：dy	泛函的变分：δI

这里要注意区分的是：函数 $y(x)$ 的变分 δy 是指非常接近的二个函数 $y(x)$ 和 $y_1(\ )$ 之差（图 1.1－3），即

$$\delta y = y(x) - y_1(x)$$

变分问题是研究泛函的极值，它类似于函数的极值求法。现略去数学上的证明，简述其结果，并与函数求极值的方法作对比

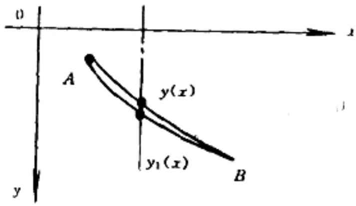

图 1.1-3

如下：

函 数 $y(x)$	泛 函 $I[y(x)]$
若对 x 的微小改变，有函数 $y(x)$ 的微小改变与之相对应，则 $y(x)$ 是连续的。	若 $y(x)$ 的微小改变 δy，有泛函 $I[y(x)]$ 的微小改变与之相对应 则泛函 $I[y(x)]$ 是连续的。
如可微函数 $y(x)$ 在内点 $x=x_0$ 处达到极值，则有 $dy=0$。	如具有变分的泛函 $I[y(x)]$ 在 $y=y_0(x)$ 上达到极值，则在 $y=y_0(x)$ 上有 $\delta I=0$。
故可根据条件 $dy=0$ 去求找极值的点 x_0。	故可根据条件 $\delta I=0$ 去找极值曲线 $y_0(x)$

（2）变分计算

试以最简单的问题为例。设泛函的表达式写成为：

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')\mathrm{d}x \qquad (1.1-7)$$

试求出使 $\delta I=0$ 的极值曲线 $y(x)$，并满足边界条件：

$$\begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y(x_2) = y_2 \end{cases}$$

为此，设 $y(x)$ 为待求的极值曲线（如图 1.1-4 所示）。现取一任意的光滑连续函数 $\eta(x)$，它满足：

$$\eta(x_1) = 0$$

$$\eta(x_2) = 0$$

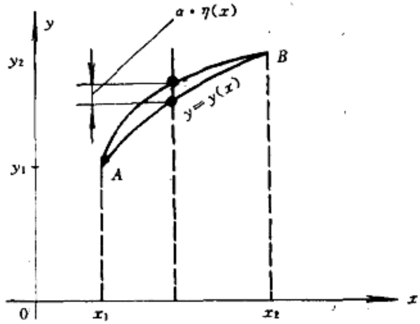

图 1.1-4

并设 α 是个作为参变量的任意小量，则下式：

$$y(\alpha,x) = y(x) + \alpha \cdot \eta(x) \qquad (1.1-8)$$

代表了通过 A、B 二点的、邻近于所求极值曲线 $y(x)$ 的无限多条曲线。当 $\alpha=0$ 时，$y(\alpha,x)$ 即等于 $y(x)$ 。把（1.1-8）代入（1.1-7）式，成为：

$$I[\alpha] = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x) + \alpha \cdot \eta(x),\ y'(x) + \alpha \cdot \eta'(x)]\mathrm{d}x \qquad (1.1-9)$$

$\alpha=0$ 时，$I(\alpha)$ 为极值，即，此时应有 $\delta I=0$。就是说，式（1.1-9）的泛函 I 取极值的条件是（在积分 $I(\alpha)$ 存在变分的前提下）：

$$\delta I(\alpha) = 0$$

即
$$\delta I(\alpha) = \frac{\partial I}{\partial \alpha} \cdot \delta\alpha = 0 \qquad (1.1-10)$$

即
$$\delta I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} F[x, y, y']\delta\alpha \cdot \mathrm{d}x$$

由于
$$y = y(x) + \alpha \cdot \eta(x)$$
$$y' = y'(x) + \alpha \cdot \eta'(x)$$

则

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}F[x,y,y'] = \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)$$

故 $$\delta I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\eta'(x)\right]\cdot\delta\alpha\cdot \mathrm{d}x = 0$$

(1.1－11)

由上，为了理解变分概念，与函数的微分再作一对照：

函数 $y(x)$	泛函 $I[y(x)]$
自变量的增量：Δx	函数的增量：$\Delta y = \epsilon\cdot\eta(x)$
自变量的微分：$\mathrm{d}x$	函数的变分：$\delta y = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\Delta y$
函数的增量：$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$	泛函的增量：$\Delta I = I[y(x)+\epsilon\cdot\eta(x)] - I[y(x)]$
函数的微分：$\mathrm{d}y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y$	泛函的变分：$\delta I = \lim\limits_{\epsilon\to 0}\Delta I$
函数取极值的条件：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$	泛函取极值条件：$\frac{\delta I}{\delta y} = 0$

在（1.1－11）式中的第二项积分可分部积分：

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\mathrm{d}x = \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot\eta(x)\bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\mathrm{d}x$$

由于 $\eta(x_1) = 0$ 及 $\eta(x_2) = 0$，故（1.1－11）式化为：

$$\delta I(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta\alpha\cdot\mathrm{d}x = 0$$

(1.1－12)

在（1.1－12）式中，$\eta(x)$ 是个在（x_1，x_2）范围内任意取的函数，$\delta\alpha$ 也是任意的，故要使（1.1－12）式成立，只有被积函数处处为0，即

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \qquad (1.1-13)$$

这就是（1.1－7）式的泛函取极值时所对应的极值曲线 $y(x)$ 所应满足的必要条件。求解这个微分方程（1.1－13）式，可得出无数

多个极值曲线。代入边界条件，才得出所求的极值曲线。(1.1－13) 式称欧拉方程。

欧拉方程 (1.1－13) 式也可表示成：

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial x\cdot\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y\cdot\partial y'}\cdot y'-\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}y''=0 \qquad (1.1-14)$$

或表示成：

$$F_y-F_{y'x}-F_{yy'}y'-F_{y'y'}\cdot y''=0 \qquad (1.1-15)$$

欧拉方程有几种特殊情况：

① 若 F (x_1, y, y') 中不包含 x。

例如在［例 1.1］中的最速降落线问题的 (1.1－4) 式，及［例 1.3］的 (1.1－6) 式均属此种情况。这种情况下欧拉方程 (1.1－15) 式将化简为：

$$F_y-F_{yy'}\cdot y'-F_{y'y'}\cdot y''=0$$

再进一步化简，可表示成全微分的形式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[F-y'\cdot F_{y'}]=0 \qquad (1.1-16)$$

这可由展开 (1.1－16) 式而得证。积分 (1.1－16) 式，可得：

$$F-y'\cdot F_{y'}=\text{常数} \qquad (1.1-17)$$

下面举例如何用欧拉方程来求解。

［例 1.4］　利用 (1.1－17) 式来求解［例 1.1］最速降落线问题的 (1.1－4) 式。

［解］　由 (1.1－17) 式，有：

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}-y'\left(\frac{y'}{\sqrt{y}\cdot\sqrt{1+y'^2}}\right)=\text{常数}$$

化简为：
$$\sqrt{y}\cdot\sqrt{1+y'^2}=\frac{1}{C}$$

令 $\frac{1}{C}=\sqrt{K_1}$，解出　$y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{\frac{K_1-y}{y}}$

$$\int\mathrm{d}x=\int\sqrt{\frac{y}{K_1-y}}\mathrm{d}y$$

令 $y=K_1\cdot\sin^2\theta$，代入上式，得

$$x=K_1\cdot\int 2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=K_1\int(1-\cos2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{K_1}{2}(2\theta-\sin2\theta)+K_2$$

故得曲线 $y(x)$ 的参数方程：

$$\begin{cases}x=\dfrac{K_1}{2}(\varphi-\sin\varphi)+K_2\\ y=\dfrac{K_1}{2}(1-\cos\varphi)\end{cases}\tag{1.1-18}$$

因曲线 $y(x)$ 通过原点 $A(0,0)$，故必有 $K_2=0$。而常数 K_1 可由曲线通过点 $B(a,b)$ 这条件来确定。参数方程（1.1-18）所表示的极值曲线为：圆摆线（见图 1.1-5）是当半径为$\dfrac{K_1}{2}$的一个圆沿 x 轴滚动时，圆周上一个定点 A 的轨迹。这个变分问题就称最速降落线问题。

② 若函数 F 中不包含 y 项，即 $F=F(x,y')$。

在这种情况下，欧拉方程（1.1-13）式就化简成：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0$$

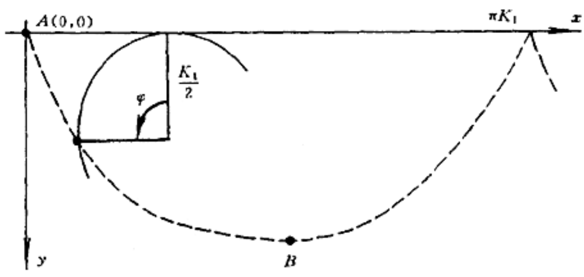

图 1.1-5

即有：
$$F_{y'}=C_1 \tag{1.1-19}$$

关于重积分下的泛函，类似地有如下定义：

$$I(u)=\iint_{\Omega}F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1-20}$$

式中，函数 u 是二个自变量 x，y 的函数 $u(x,y)$，（见图1.1-6），现求泛函取极值、并满足边界条件时的极值曲面 $u(x,y)$。

设

$$u(x,y,\alpha)=u(x,y)+\alpha\cdot\eta(x,y)$$

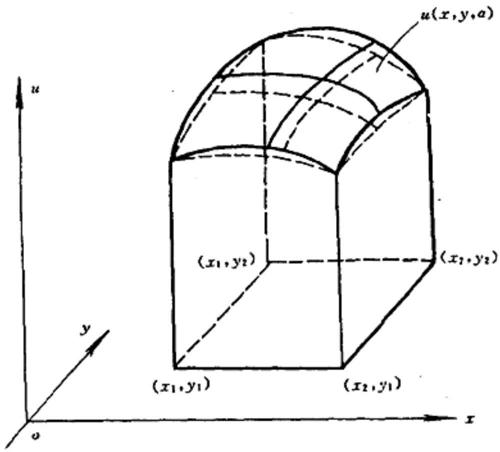

图 1.1-6

经过类似前述的推导，可得出相应的欧拉方程为：

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)}\right]=0 \tag{1.1-21}$$

［例 1.5］　若泛函的被积函数为：