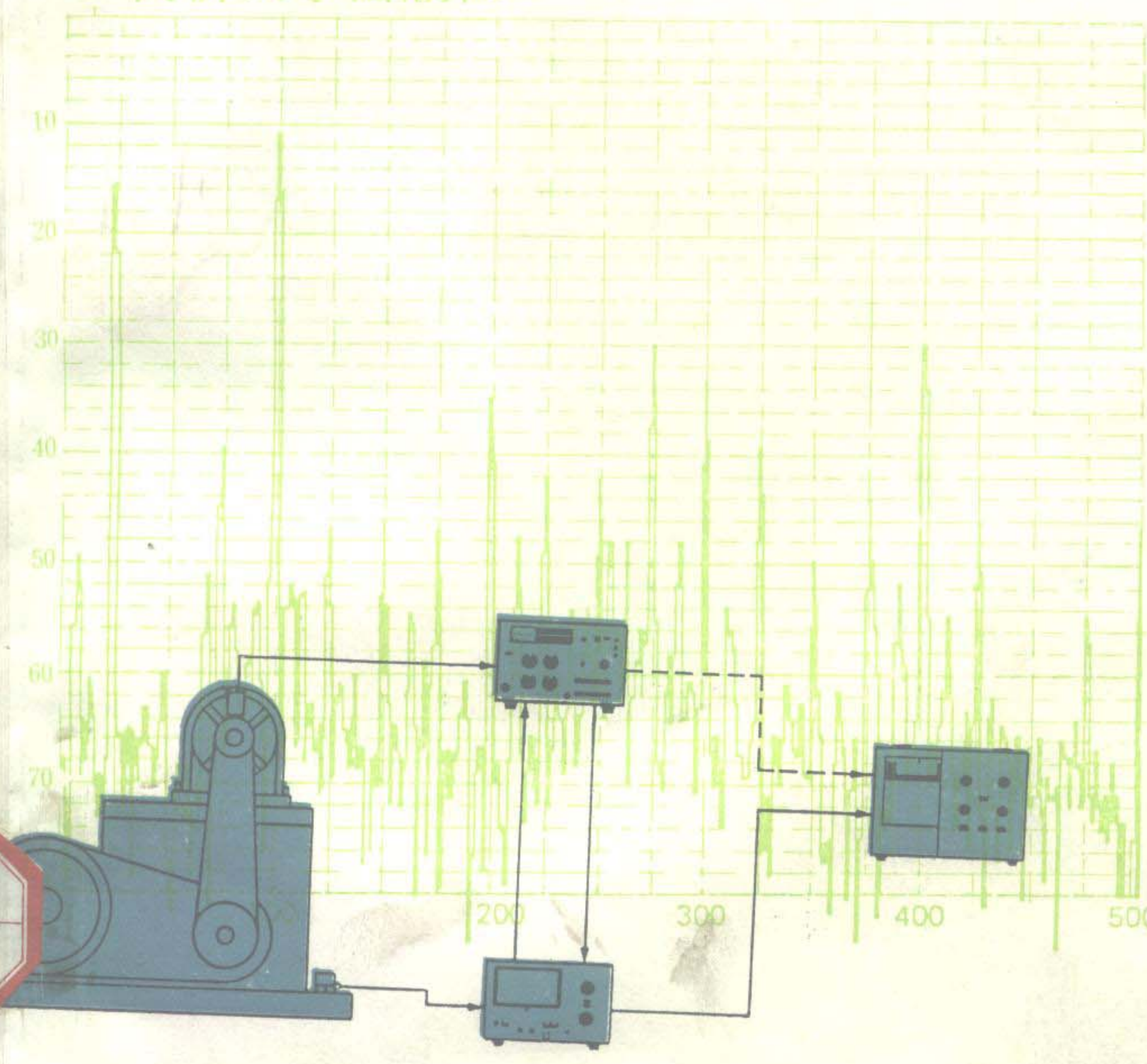
工程机械振动分析

● 阎以诵　苏箓寿　主编

● 同济大学出版社



工程机械振动分析

阎以诵　苏笺寿　　　　主编
阎以诵　苏笺寿　靳晓雄　编著

同济大学出版社

内 容 提 要

本书对工程机械的振动问题进行分析，全书共七章，内容包括：概论，单自由度系统的振动，二自由度系统的振动，多自由度系统的自由振动，多自由度系统的强迫振动，多自由度系统的近似解法和利用数字计算机求解振动问题。本书力求将振动理论与工程实际密切联系，实用易懂，便于自学。

本书可作为高等院校有关专业大学生、研究生和培训班学员的教科书，亦可供有关工程技术人员参考。

责任编辑　陈全明

封面设计　陈益平

工 程 机 械 振 动 分 析

阎以诵　苏笺寿　主编

同济大学出版社出版

（上海四平路 1239 号）

新华书店上海发行所发行

同济大学印刷厂印刷

开本：787×1092　1/16　印张：13.75　字数：350 千字

1991 年 7 月第 1 版　　1991 年 7 月第 1 次印刷

印数：1－2500　　定价：3.60 元

ISBN 7-5608-0786-O/TH·17

前　　言

随着生产技术的日新月异，对工程机械产品的动态性能提出了愈来愈高的要求。当前，工程机械的动态分析方法已日益成为产品设计研究的重要手段，推动着产品的更新与发展。为此，同济大学起重运输与工程机械专业从 1982 年起开设了“机械振动学”和“工程机械动力学”等课程。“机械振动学”课程直接就动力学模型来阐述机械振动的基本理论与分析方法，而不着重讨论动力学模型是怎样建立的；“工程机械动力学”课程则正好相反，它更着重于阐述机构的动力学模型理论，讨论将一个机械抽象成动力学模型的理论和方法，对于包含原动机和负载的机器来讲，还须涉及到原动机动力过程的模拟和负载特性的数学描述。

作者在多年来从事“机械振动学”和“工程机械动力学”等课程的教学与科研实践的基础上，本着课程设置要精减和教材要符合少而精、科学性、系统性、实用性的精神，为培养本科大学生具有对工程机械进行动态分析的能力，根据起重运输与工程机械专业的教学需要，将这两门课程中的有关内容结合起来，互为补充，合为一门“工程机械振动分析”的课程，其学时数约为 60 学时。本书即为适应上述要求而编写。

本书内容按机械振动学的传统顺序方式编排，除“概论”和“电算”两章外，每章都编有工程机械动态分析的方法和计算实例，并附有一定数量的习题，从而将振动理论与工程机械实际密切联系了起来，既说明了理论的应用，又不同程度地解决了专业课题。本书编入了应用电子计算机求解振动的问题以及一些常用计算子程序。

近年来，在建筑筑路工程中广泛应用了振动机械，本书对振动机械中的单自由度、二自由度和多自由度线性振动系统的理论及其分析方法做了充分的阐述。关于振动机械动力学的实例分析与设计计算，考虑到在专业教学计划中已设置了“振动机械”选修课程，故本书不含这部分内容。

本书的特点是对反复短暂工作循环的起重运输与工程机械的振动问题进行充分讨论，使振动理论密切联系工程实际，内容实用易懂，便于自学。本书可作为高等院校有关专业大学生、研究生和培训班学员的教科书，亦可供有关工程技术人员参考。

本书由阎以诵编写前言、第一章、第三章、第二章的部分内容和第四、五、六章中的最后一节，苏笺寿编写第四、五、六章的其余部分，靳晓雄编写第二章的部分内容和第七章。全书由阎以诵、苏笺寿主编，上海城市建设学院伍长振主审。

限于作者的水平，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请读者批评指教。

阎以诵

1989 年 2 月

目　　录

第一章　概　　论

§1.1　工程机械振动分析研究的基本问题

工程机械在近一二十年来有较大的发展，产品日益精巧、灵活、复杂和多功能化。为了保证它们的安全、可靠、经济与运行的平稳性，有关设计计算中传统采用的静态（静载荷及静位移）分析方法就往往感到不足，因此，工程机械的动态分析方法已成为产品设计研究的重要手段，而在这方面所取得的成就必将导致机械设计理论与方法的突破，推动机械产品的更新与发展。

工程机械中的构件均为弹性体，在外力作用下，这些构件不仅产生工作所需要的刚体运动，还会产生由于其自身弹性而引起的弹性振动。本书研究机器或结构在静平衡位置附近的微小弹性运动，这种反复运动通常称为振动。

弹性构件机械动力学是研究机械振动特性的一门学科，自然离不开机械振动理论；但弹性构件机械动力学还有自己的理论基础，即机构的动力学模型理论。振动理论这门学科直接就动力学模型来阐述机械振动的基本理论与分析方法，而不着重讨论力学模型是怎样建立的；弹性构件机械动力学则正好相反，它更着重于阐述机构的动力学模型理论，讨论将一个机构抽象成动力学模型的理论和方法，对于包含原动机和负载的机器来讲，还需涉及到原动机动力过程和负载的模拟理论，也就是把原动机、传动系统以及负载作为一个整体系统来考察，研究系统的过渡过程特性及稳定响应特性；分析原动机的动力过程以及负载特性对系统响应特性的影响，计算传动系统中的动载荷。

在振动研究中，通常把所研究的对象（如一台机器）称为系统；把外界对系统的作用或机器运动产生的力称为激励或输入；把机器或结构在激励作用下产生的动态行为称为响应或输出。振动分析就是研究这三者间的相互关系。从计算分析观点，知道其中二者就可求得第三者。从这个意义上说，工程机械振动分析所要解决的问题可归纳为下列三类问题：

一、振动设计

振动设计是在已知激励和系统参数的情况下求系统响应的问题，包括位移、速度、加速力的响应。这为计算机器或结构的强度、刚度、允许的振动能量水平提供了根据。

二、系统识别

系统识别是在已知输入及输出的情况下求系统的参数，以便了解系统的动态特性。在目前现代化测试手段已十分完善的情况下，这一研究十分有效。

三、环境预测

环境预测是在已知系统动态特性和响应的情况下去推断激励即判别系统的环境特性。

本书是振动分析基础教程，只研究第一类问题。具体地说，着重讨论以下两个方面：其

一是确定系统的固有频率，预防共振的发生；其二是计算系统的动力响应，以确定机器受到的动载荷或振动的能量水平。

§1.2 工程机械振动问题的特点

工程机械的共同特点是工作时经常启动和制动。在启动、制动或其他工作状态突然变化时，机械系统将产生强烈的冲击和振动。本书讨论的振动问题，主要是研究这类机械在启动、制动或其他工作状态突然改变时系统的弹性振动规律，据此确定系统的动力响应。所谓动力响应是指这些机械在振动时各元件中具有代表性部位的位移随时间变化的历程（简称时程）。从位移响应可以求得各元件的应力或应变。当然，响应也可以表述为加速度或速度随时间的变化，这两者与位移响应是导数关系。

动力学问题的研究方法是建立在静力学基础之上的，但是它与静力学的研究方法又有明显的不同。首先，静力学问题的解与时间无关，而动力学中的动力响应则是时间的函数。对工程设计来说，最关心的是最大动力响应，因此要从时程中找出最大值。由此可见，动力学问题的计算比静力学的计算要复杂得多，所花费的时间也多得多。其次，由于位移响应是时间的函数，由此系统就存在速度和加速度并随之就会产生抵抗运动的阻尼力和惯性力。这种因果关系的相互关联可用微分方程描述，因此，动力响应的求解就是解系统的运动微分方程。

一台机器或结构系统产生振动的外部原因是由于受到了外部激励的作用所致。例如，旋转机械由于失衡而产生的离心力的周期激励，结构物受到大风的作用，车辆通过不平的道路的颠簸，建筑物受到地震的冲击等等。对于反复短暂工作的机械，启动和制动是经常发生的，启动、制动时，系统突然受到了原动机的驱动力和制动器的制动力的激励。对于这类机械来说，在工作时，系统中突然增加质量或突然卸去质量的情况也是常有的，这就使系统的状态发生突然改变。因此，机械或结构产生振动的根本原因是由于它受到外界的某种激励之故。从激励作用时间看，有瞬态激励和稳态激励。前者如机械的启、制动力，质量的突然变化，地震或阵风的冲击等；后者如失衡，道路不平度的激励等。在很多情况下瞬态激励可化为初始激励（如初位移、初速度激励），虽然，由瞬态激励产生的瞬态振动随时间变化而很快衰减，但它在短时间内产生巨大的动力响应，常成为计算机械强度时确定计算载荷的依据。另外，由于这种振动出现的次数十分频繁，对机器的操作人员的健康具有不可忽视的危害。因此，瞬态振动是这类机械动力学问题研究的最重要方面。

从激励的数学描述方法不同，可分为确定性激励和随机激励两类。所谓确定性激励，就是任何时刻的激励量值可由数学表达式或图形确定；而随机激励的量值只能用统计特征数（如平均值等）表征。当进行实际振动分析时，由于对精度的要求不同，同一激励可按不同类型来处理。例如，一般不平道路对车辆的激励属于随机性的激励，但若只要求作初步的分析，为了简化，也可以把它看成正弦波激励或由不同波长的正弦波组合的激励；相反，像偏心旋转件这种明显属于简谐激励的情况，若要作精密的分析，则需要考虑某些随机干扰。对于反复短暂工作机械，当确定最大动力响应时，一般用确定性的分析方法；而当研究结构疲劳强度和研究振动对人体的影响时，则需要采用随机振动的分析方法，它是在确定性振动分析的基础上引用统计学的某些原理进行分析。

对于那些激励频率很低（例如小于系统基频20％者）或启动、制动力施加得很缓慢的、

系统，可按刚体动力学的方法计算惯性载荷。若机器的工作速度很低，惯性力可以忽略不计，这就导致简化的静力学的计算。

要对实际的机械和结构进行振动分析，不管用确定性的方法还是统计的方法，其第一步的工作都是要将实际的机器或结构简化成为理想的"系统模型"，这是动力学计算分析的基础。

§1.3 建立系统的力学模型

从振动分析观点看，即使是一台很简单的机器，其系统也是很复杂的。我们所使用的方法是质点动力学的方法。一个很简单的机器元件也具有无限多的质点。因此振动分析的第一步，也是很关键的一步，就是把所研究的对象以及外界对它的作用简化为一个力学模型。这个力学模型不仅要简单，而且在动态特性方面应与原来的研究对象等效。关于如何从实际的机器建立起一个力学模型的方法，这里只作概略的叙述。关于模型建立的详细情况将在本书各章中结合实例予以说明。

我们知道，系统之所以会产生振动，是因为系统受到了外部的激励。但从系统内部条件来看，振动是由于系统具有质量和弹性之故。从能量转化过程来看，外界对系统的激励就是对系统作功，这个功被储存到系统中，其中一部分化为动能，使质量具有速度；另一部分化为变形位能，使质量移位。反复振动的过程就是激励功、动能及位能之间的不断转换。若系统没有阻尼，那么，只要给系统以初始激励，振动就一直延续；若系统具有阻尼，而系统又没有继续从外界获得能量，那么，振动在经历一段时间之后终将停止。由此可见，激励、质量、弹性和阻尼是振动系统的四个要素。动力系统的力学模型若要确切地反映其物理过程的话，就应有反映这四个要素的元件或符号。因此，从实际的机器简化出的理想的力学模型是由弹簧、阻尼器和质量块所组成，同时在相应的质量块上作用有外部激励，这三个元件都是被理想化了的。

实际机器或结构元件的质量是分布的，弹性也是如此。这种分布参数系统（或称为连续系统）的振动分析工具是偏微分方程，而偏微分方程只有几种特殊情况才能得到闭合解。因此能按解析法求分布参数系统问题的例子不多。所谓离散系统，就是将实际上是分布参数的系统经过简化，把它简化成具有若干集中质量并由相应的弹簧和阻尼器联结在一起的系统。本节仅讨论这种系统的力学模型。根据所研究系统的特点及所研究问题的要求，离散系统所具有的质量个数是不同的。若实际的机器或结构可以简化为由一个质量和一个弹簧及一个阻尼器组成，而且质量在空间的位置可以用一个坐标就可以完全地描述，我们就把这样的系统称为单自由度系统。若系统的质量在空间的位置必须由多个独立的坐标才能完全地描述，则是多自由度系统。质量的个数一般等于或少于系统的自由度数，因为一个质点如无约束，在空间具有三个独立的运动，而一个刚体在空间则有六个独立运动。没有阻尼器的系统称为无阻尼系统。下面将弹簧、阻尼器和质量的特性予以说明。

一、弹簧

弹簧是表示力与位移关系的元件。在力学模型中，它被抽象为无质量并具有线性弹性的元件。这就是说，若它的一端受一作用力 F_s，则它的另一端必产生一大小与 F_s 相等、方向

与之相反的力，力的大小与弹簧两端点的相对位移成正比（图 1.3-1*a*）。

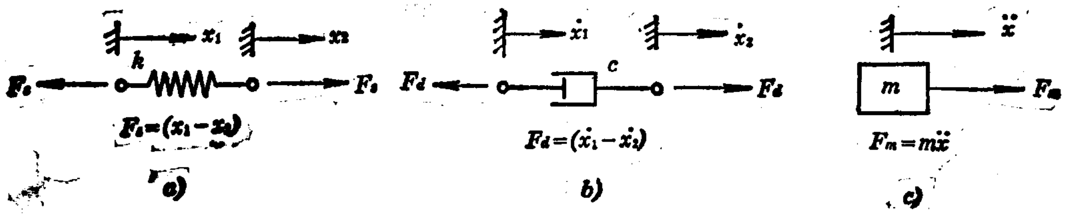


图 1.3-1

$$F_S=k(x_2-x_1) \tag{1.3-1}$$

式中：k 为比例常数，通常称为弹簧常数或刚度；x_1、x_2 是弹簧两端点的位移。式(1.3-1)表示的是直线位移的弹簧，它相应于质量的直线位移。在机器传动机构的扭转振动系统中，质量作扭转运动，这种情况下用扭转弹簧。扭转弹簧常数（刚度）用符号 k_t 表示。扭转弹簧产生的广义力是扭矩，位移是角度；作这样的改变之后也可以得到与式(1.3-1)类似的关系。

二、阻尼器

阻尼器是表示力与速度关系的元件。在力学模型中，它被抽象为无质量而且具有线性阻尼系数的元件。若它的一端受一 F_d 力的作用，则它的另一端必产生一大小相等、方向相反的力。这个力称为阻尼力，其大小与阻尼器两端的相对速度成正比（图 1.3-1*b*）。

$$F_d=c(\dot{x}_2-\dot{x}_1) \tag{1.3-2}$$

式中：c 为比例常数，称为阻尼系数；$\dot{x}_1$、$\dot{x}_2$ 分别为阻尼器两端的速度。根据式(1.3-2)，阻尼力 F_d 与相对速度的一次方成正比，粘性阻尼具有这种关系，系数 c 又称为粘性阻尼系数。以后将会看到，由于引用了这种线性阻尼，在数学解题上带来了很大的方便。

三、质量

质量是表示力和加速度关系的元件。在力学模型中，它被抽象为绝对不变形的刚体。若对质量施加一作用力 F_m，质量就会产生一个与 F_m 方向相同的加速度 $\ddot{x}$，对于直线的平移运动，力与加速度的关系为（图 1.3-1*c*）。

$$F_m=m\ddot{x} \tag{1.3-3}$$

式中 m 是比例常数，它是刚体所具有的惯性的一种度量，称为刚体的质量。对于扭转振动系统，广义力为扭矩，广义加速度为角加速度，相应于式(1.3-3)的比例常数为刚体绕其旋转中心线的转动惯量，通常以 J 标记。

在国际单位制(SI)中，质量的单位为公斤(kg)；转动惯量的单位为公斤·米²(kg·m²)；力的单位为牛顿(N)；位移的单位为米(m)；扭矩的单位为牛顿·米(N·m)；速度的单位为米/秒(m/s)；直线弹簧刚度的单位为牛顿/米(N/m)；扭转弹簧刚度的单位为牛顿·米/弧度(N·m/rad)。据此可导出阻尼系数 c 的单位为牛顿·秒/米(N·s/m)。

图 1.3-2*a* 是用上述基本元件表示的单自由度系统。这是一个平移系统，即质量作直线移动，弹簧为线形弹簧。对于机械传动的扭转系统，虽然也可以用上述元件建立力学模型，但若用图 1.3-2*b* 所示的模型更形象，其中扭转弹簧用细轴（或线）表示，质量用转动惯量 J

表示，位移用角位移φ表示，作用力用转矩$T(t)$表示。

有时，只用上述基本元件还不足以表示实际机器的运动情况。例如，通过绳索和滑轮可以使旋转运动变为直线运动。这时，就必须引入绝对刚性和无质量的滑轮及完全挠性但轴向不能伸长的绳索；又如在连杆机构中，当杆的质量被简化到端部之后，杆体就用无质量而绝对刚性的杆代替。杠杆也是重要的例子。尽管不用这些辅助元件也可以建立力学模型，但引用这些辅助元件之后，可使力学模型更形象化，分析更方便。此外，质量块的转动运动为不可忽略时，则应该把它看作是具有转动惯量的。通常忽略转动惯量的质量块称为“点质量”，常常用圆圈或方块表示。而一个圆盘用细轴相连表示绕旋转中心的转动惯量（见图1.3-2b）。

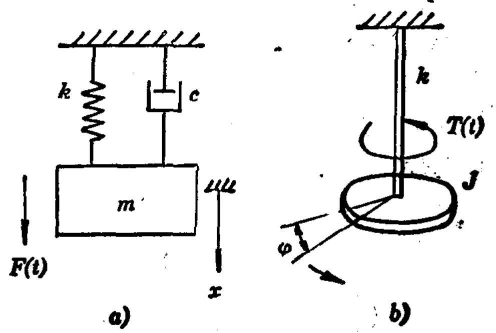


图 1.3-2

一个完整系统的力学模型不但与实际机器的结构有关，而且与所研究问题的内容有关。图1.3-3是几个典型例子。图1.3-3a是研究汽车在道路上行驶时车身摆动的力学模型，这是二自由度系统，不平的道路可看作是基础激励。这样的模型对研究汽车车身的振动是很合适的。它略去了汽车车身的左右摆动。自然，如果研究的是汽车传动轴系的扭转振动，那么，力学模型就与此根本不同。图1.3-3b表示桥式起重机当货物离地提升时桥架及滑轮组系统的力学模型，这里m_1是货物的质量，k_1是滑轮组的刚度，而m_2则是桥架在中部的等效质量与小车质量之和。实践证明，若研究的是桥架跨中和绳索的动力响应，则图1.3-3b的二自由度系统是合适的。若研究的是桥式起重机小车碰撞缓冲器的动力过程，那么，力学模型就是图1.3-3c，这是一个二自由度系统。图1.3-3d是移动式起重机动态稳定性的力学模型，k_1是绳索滑轮组与臂架系统串接的刚度，力学模型图上的臂架是一个刚体，m_1包括货

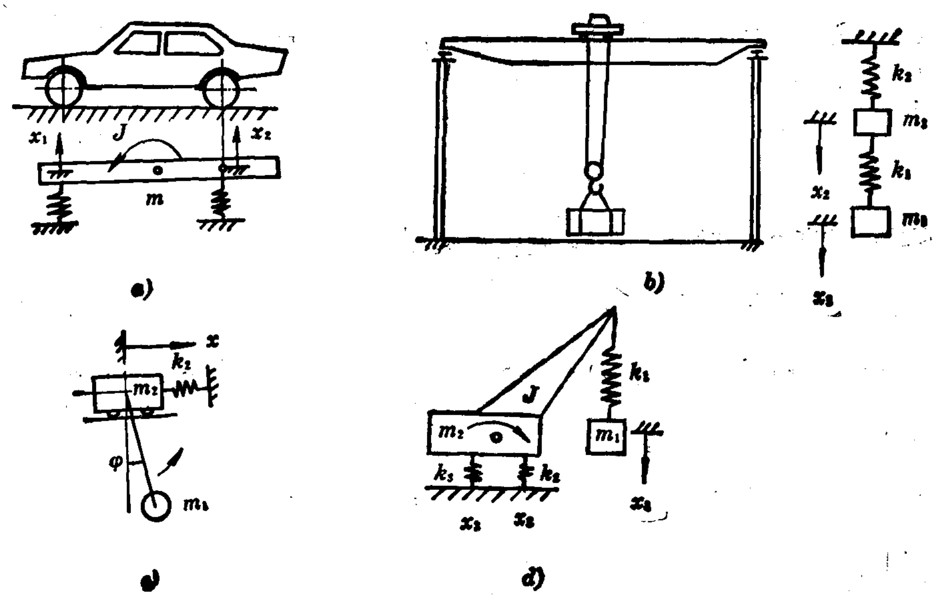


图 1.3-3

物质量与臂架在端部的等效质量，m_2 则是除 m_1 之外的起重机总质量，J 是起重机相对倾覆边的总转动惯量，k_2、k_3 是起重机支承结构的刚度。

图 1.3-3 表示的几个力学模型中均略去了系统的阻尼。在通常的结构及高效率的传动机构中，系统的阻尼很小，因此在研究最大动力响应时，阻尼可略去不计。

确定了力学模型简图之后，应进一步确定力学模型的各参数，主要是系统的刚度参数和质量参数。

§1.4 系统的外载荷

若作用在系统上的外载荷由与广义坐标相适应的集中力组成，那么，可以直接写出外载荷向量。但对结构系统来说，外载荷不仅可能作用在单元节点上，也可能作用在别的位置上或是分布的载荷。在这种情况下，要把这些载荷转化为节点载荷，最简单的方法是按静力学的方法，把它们换算到节点上，换算的节点载荷就是所有这些载荷的支承力。显然，若节点上没有直接作用的外力耦合的话，那么，节点载荷就只有与平动自由度相应的分量。

在分析传动机构的扭转振动时，原动机的驱动力和制动器的制动力是一种典型的外载荷。最常用的原动机是电动机，特别是电动机转子串接起动电阻的感应电动机。对这种电动机，其驱动力是随电动机的速度而变化的，其变化率可近似地认为不变，其变化特性见图 1.4-1。根据图示的符号，切去第 i 级电阻之后，电动机驱动转矩随速度按第 $i+1$ 根特性曲线变化，其驱动转矩与速度的关系如下：

$$T(n)=\frac{n_0-n}{n_0-n_i}T_{\max} \qquad (1.4\text{-}1)$$

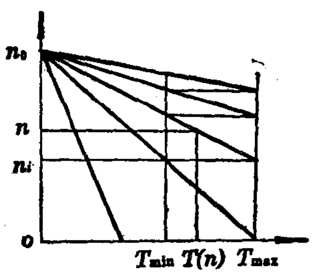


图 1.4-1

当应用式 (1.4-1) 计算驱动力时，驱动力将与电动机的转速有关。如果是多自由度系统，则依此建立起来的运动方程将具有“阻尼力”的耦合，而且应用通常的主坐标方法无法解耦。这对解题带来了困难。为了解决这个困难，作为一阶近似，可按刚体动力学的方法，将电动机驱动转矩转换为只与时间有关的函数。设驱动机构的总转动惯量为 J，机构运动阻力 T_R 为常数，驱动力为 $T(t)$，则根据牛顿第二定律有：

$$T(t)=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+T_R \qquad (1.4\text{-}2a)$$

令 $t=0$ 时具有初速度 ω_{01}，对上式积分，得：

$$\omega(t)=\omega_{01}+\left[\left(1-\frac{T_R}{T_{\max}}\right)\omega_0-\omega_{01}\right](1-e^{-t/T}) \qquad (1.4\text{-}2b)$$

式中：$T_{\max}$ 为 $t=0$ 时的驱动转矩；ω_0 为电动机同步速度；$T=\dfrac{\omega_0 J}{T_{\max}}$ 为电动机的时间常数。

对式 (1.4-2b) 求导后代入式 (1.4-2a) 得：

$$T(t)=T_R+\left[T_{\max}\left(1-\frac{\omega_{01}}{\omega_0}\right)-T_R\right]e^{-t/T} \qquad (1.4\text{-}2c)$$

利用式 (1.4-2c) 作为激励力，就与振动速度无关了。

机构的制动转矩也是一种常见的外载荷。通常有电气与机械制动的联合或单独使用机械制动器。图 1.4-2 表示电动机反接制动与机械制动器联合作用的特性。设电气制动时电枢中

串入足够的电阻，反接时为特性曲线2，正常运行时为自然特性曲线1。反接制动时，从正向静阻转矩 T_R 突然到反向转矩 Te_{max}，接着沿曲线2减速，降到一定速度时再施加机械制动。

同样，也可以用刚体动力学的方法把制动转矩随速度的变化转换为随时间的变化。对机械制动，可认为它与时间无关，等于常数。

在电气制动期间，制动转矩与时间的关系可按与式(1.4-2)类似的方法推导，得：

$$T_e(t)=\left(T_R-\frac{\omega_0}{\omega_0+\omega_b}T_{e\max}\right)+\left(\frac{\omega_b+2\omega_0}{\omega_b+\omega_0}T_{e\max}-T_R\right)e^{-t/T} \qquad (1.4\text{-}3)$$

由柴油机驱动的起重机械，机构是依靠摩擦离合器启动的。摩擦离合器接入时转矩是逐步增长的（图1.4-3)），增长的规律不管是按指数曲线2还是按正弦曲线1，计算表明都可以用直线代替。

用离合器启动的传动机构，机构在接入前、后，系统质量是不同的。接入之前，离合器主动部分可看作不参预系统运动，离合器接入之后，离合器的主动部分（包括原动机的运动质量）参预了系统。

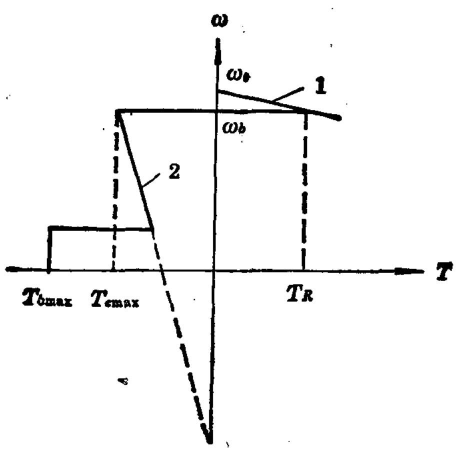


图 1.4-2

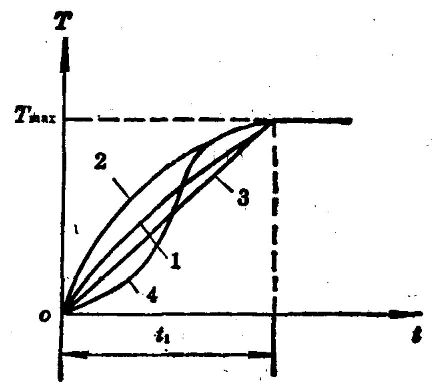


图 1.4-3

§1.5 系统运动微分方程与振动分类

力学模型确定之后，就要建立系统参数、激励及响应这三者关系的运动微分方程式。可以应用牛顿第二定律或拉格朗日方程建立运动微分方程。振动运动微分方程一般用二阶微分方程表示，若系统是多自由度的，那么，运动方程将是二阶联立微分方程组。

微分方程是系统振动行为的数学描述，因此从振动运动微分方程便可清楚地了解振动运动的类型。若运动方程是偏微分方程，那么，系统一定是分布参数系统（连续系统）；反之，若运动方程是常微分方程，那么系统一定是离散系统（集中质量系统）。若微分方程是齐次的，那么振动一定是自由振动，也就是在初激后靠系统恢复力维持的振动；若微分方程是非齐次的，那么振动一定是强迫振动，即系统是在变化的外激励下的振动；若方程是联立的，那么系统必定是多自由度系统，反之，系统就是单自由度系统；若微分方程是线性的，那么系统一定是线性的，反之，系统就是非线性的。

此外，从微分方程的自由项函数的形式可以判断振动运动的形式。若自由项是简谐函数，那么，稳态响应一定也是简谐函数；若自由项是任意周期函数，那么，稳态响应一定也是任意周期函数；若自由项是脉冲函数，那么，系统一定是瞬态振动。若自由项是一随机函数，那么，系统一定是随机振动。

本课程研究的系统，其参数是不随时间而变化的，因此微分方程是常系数的，这样的系统通常称为时不变系统。

周期运动是振动运动的最常见形式，下一节将作详细讨论。瞬态振动是由于系统受到短时间的冲击激励所引起的振动，它的振动形式类似于周期运动，但它的振幅逐渐减小。随机振动与前两者是不同的，其确切的运动形式不能用确定的数学公式加以描述，但它的某些运动参数仍具有某种统计的规律性。图 1.5-1 是这三种振动运动的图示。

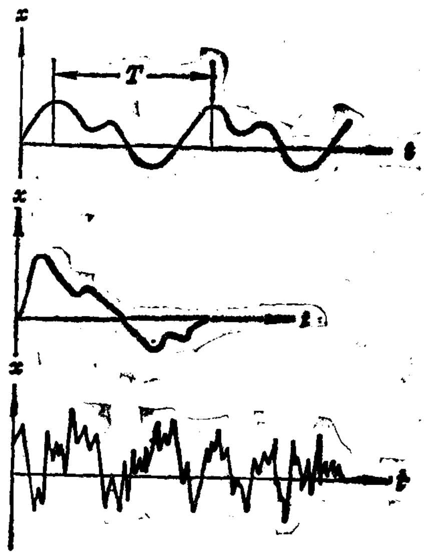


图 1.5-1

解微分方程是一个较为复杂的工作。对于非线性方程，一般只能用数值法或图解法。若线性微分方程的阶数不高（例如对一、二自由度系统），一般可用经典方法得到闭合解。更高的阶数，要得闭合解较为困难。在这种情况下可应用线性代数的方法把联立微分方程化为联立代数方程，再由计算机求解。虽然只是近似解，但由于电子计算机的巨大运算能力，其计算结果可以达到所要求的精度。

某些振动系统，其振动运动微分方程的解具有不稳定性，某些自激振动就属此例，这就需要对系统予以控制。

§ 1.6 简谐运动的表示方法

周期运动的特点是：经过相同的时间后不断重复过去的运动。若以 $x(t)$ 表示随时间变化的运动，则周期运动满足如下关系：

$$x(t)=x(t+nT),\quad n=1,2,3,\cdots \tag{1.6-1}$$

式中 T 称为运动周期。

最简单的周期运动是以正弦或余弦的时间函数表示的运动，这种运动称为简谐运动。如用正弦时间函数表示，则有：

$$x(t)=A\sin pt=A\sin p\left(t+\frac{2\pi n}{p}\right),\quad n=1,2,3\cdots$$

因此，简谐运动的周期

$$T=\frac{2\pi}{p}=\frac{1}{f} \tag{1.6-2}$$

式中：f 是运动的频率，它定义为单位时间内振动运动的循环次数，在 SI 单位制中，f 的单位是每秒循环数，叫做“赫芝”，以 Hz 标记；p 是系统振动的圆频率，它的单位是弧度每

秒(rad/s)，它常常也简称为频率。p 与 f 之间有如下关系：

$$p = 2\pi f \qquad (1.6\text{-}3)$$

简谐运动可用图解法予以清楚地表示。图 1.6-1b 表示一正弦时间函数曲线，横坐标是时间，纵坐标是函数值 $x(t)$。图 1.6-1a 表示一旋转的矢量 $\vec{A}$，它的模为 A，$\vec{A}$ 与横坐标的夹角为 $pt+\varphi$ 并以 p 的角速度沿反时针方向旋转，当 $t=0$ 时它具有初始角 φ。从图可见任意瞬间的函数值 $A\sin(pt+\varphi)$ 就是矢量 $\vec{A}$ 在纵坐标轴上的投影。当矢量旋转一周 (2π)，运动经历一个周期。这里 p 代表矢量的旋转速度，这就是圆频率这个名称的由来。

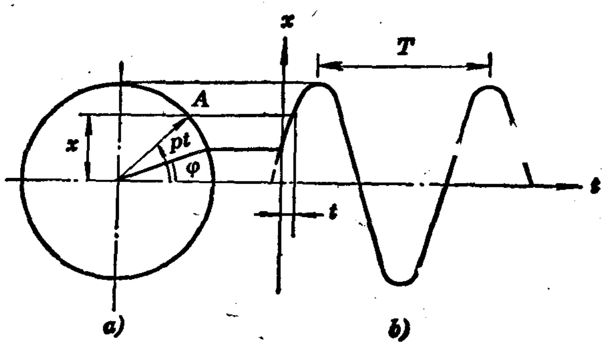


图 1.6-1

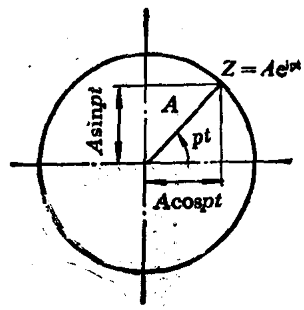


图 1.6-2

简谐运动也可以用复数表示。如图 1.6-2 所示。一个复数 $Z=a+ib$ 在复平面上是一个点，这个点与坐标原点的连线可看作是复平面上的一个矢量，称为复矢量。矢量在实轴上的投影为 a，在虚轴上的投影为 b，于是复数的模 $|Z|=\sqrt{a^2+b^2}=A$ 为矢量的长度，幅角 $\arg Z = pt$，实部 $\mathrm{Re}[Z]=a=A\cos pt$，虚部 $\mathrm{Im}[Z]=b=A\sin pt$。

复数也可以用欧拉方程表示：

$$Z = A\cos pt + iA\sin pt = Ae^{ipt} \qquad (1.6\text{-}4)$$

可见简谐函数可以用复数的实数部或复数的虚数部表示。为了便于运算，可预先约定在运算中用虚数部还是实数部，这样，运算的结果也应取与预先约定的一致。

当用复数表示时，简谐运动（函数）的导数，不同运动函数的相加都具有明显的几何意义。例如，当简谐运动用复数表示时，函数的导数为：

$$\dot{x} = ipAe^{ipt} = pAe^{i(pt+\pi/2)} \qquad (1.6\text{-}5)$$

$$\ddot{x} = i^2p^2Ae^{ipt} = p^2Ae^{i(pt+\pi)} \qquad (1.6\text{-}6)$$

以上两式表明，一个复数的导数仍是一个复数，它同样可以用复平面的复矢量表示，不过它的模是原矢量模的 p 倍，而且矢量向逆时针方向转过 90 度；再求一次导数，模再增加 p 倍，矢量再向逆时针方向转过 90 度。与简谐运动联系起来就意味着：速度导前位移 90 度；加速度又导前速度 90 度，即导前位移 180 度。这种矢量关系见图 1.6-3。

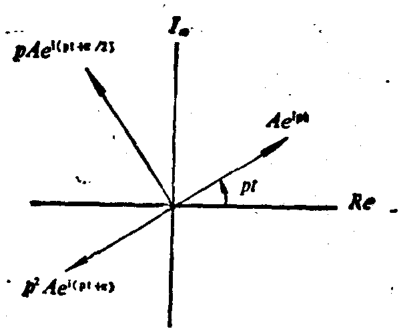


图 1.6-3

第二章　单自由度系统的振动

§2.1　单自由度系统的自由振动

一个振动系统究竟有多少个自由度，不仅取决于系统本身的特性及元件的构成情况，同时也取决于研究人员对于计算精度的要求等因素，因而需要根据实际情况进行分析才能确定。本章所研究的振动系统是根据实际情况，抓住主要因素，忽略次要因素，对研究对象进行抽象而得到的具有一个自由度的集中参数振动模型。图 2.1-1 中所举的例子都是单自由度系统。

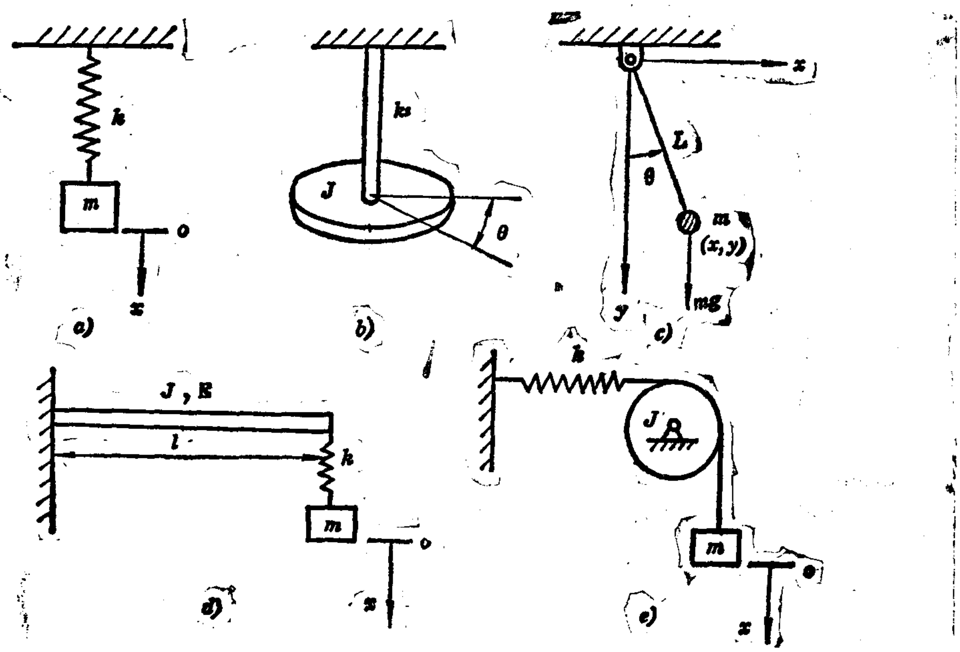


图　2.1-1

图 a 所示的弹簧质量系统中，若质量 m 限于在竖直方向振动，则只需要一个坐标 $x(t)$ 即可确定其几何位置，因而是一个自由度的振系。图中的弹簧可以理解为螺旋弹簧，也可以理解为弹性直杆，等等。为便利起见，今后我们在讨论时常常采用这种简化模型。

图 b 所示的系统为一扭转摆模型。如限制圆盘只能使它绕其纵轴线振动，则只需要一个坐标 $\theta(t)$ 即可确定其几何位置，所以也是单自由度振系。

图 c 所示的单摆系统，如该摆被限制在 X-Y 平面中振动，则也是单自由度系统，其几何位置由坐标 $\theta(t)$ 确定。虽然它也可以由坐标 $x(t)$ 和 $y(t)$ 共同确定，但 x 与 y 是互不独立的，它们由约束方程 $x^2+y^2=L^2$ 相联系。

图 d 所示的悬臂梁-弹簧质量系统也具有一个自由度，但这时应假定悬臂梁的质量可以忽略且质量 m 的振动限于在竖直平面（即图纸平面）内。由于悬臂梁只具有弹性而无质量，它的刚度应与 k 串联成一个等效刚度。

图 e 所示的滑轮-弹簧质量系统中，假定绳索与滑轮间无滑动且绳索不可伸长，则亦为单自由度振系。虽然这里有两个质量元件 m 和 J，并且有线位移 $x(t)$ 和角位移 $\theta(t)$，但它们之间是不独立的。$x(t)$ 与 $\theta(t)$ 中的任何一个都可以确定系统在平面内的几何位置。

在以上各例中，运动物体的质量或转动惯量（质量惯矩）都是不难理解的物理参数。但是弹性元件的刚度却在振动问题中具有特定的含义。刚度通常以 k 或 k_t 等符号代表，它的定义是使系统的某点沿指定方向产生单位位移（线位移或角位移）时在该点同一方向上所要施加的力（或力矩）。因此，刚度之值恒为正值。但对于某个具体的弹性元件来说，选择的参考点不同时，其刚度之值也就不同，通常总是要根据运动坐标来确定其刚度。

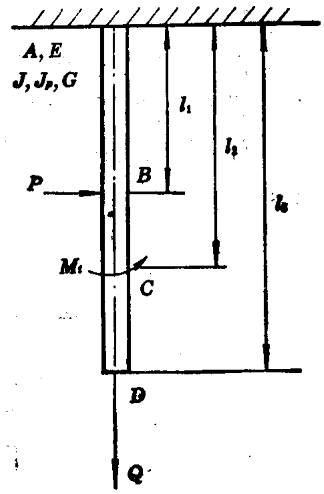


图 2.1-2

按照刚度的定义，设参考点施加广义力 F 时产生的广义位移为 Δ，则刚度可表示为：

$$k=\frac{F}{\Delta}$$

例如在图 2.1-2 中，弹性元件为等截面直圆杆，质量忽略不计。在杆上不同截面处的刚度均不相同。下端 D 点在 Q 作用下的伸长变形为

$$\Delta=\frac{Ql_3}{EA}$$

故拉压刚度为

$$k_D=\frac{Q}{\Delta}=\frac{EA}{l_3}$$

式中　A——截面面积；

　　　E——拉压弹性模量；

　　　l_3——计算长度。

B 点截面沿水平方向的弯曲挠度为

$$\Delta=\frac{Pl_1^3}{3EJ}$$

故此处的弯曲刚度为

$$k_B=\frac{P}{\Delta}=\frac{3EJ}{l_1^3}$$

式中　J——截面对中性轴的惯矩。

C 点截面处绕纵轴线的扭转角为

$$\Delta=\frac{M_tl_2}{GJ_P}$$

故该截面处的扭转刚度为

$$k_C=\frac{M_t}{\Delta}=\frac{GJ_P}{l_2}$$

式中　G——剪切弹性模量；

　　　J_P——截面极惯矩。

其他各种弹性元件的刚度也可参照以上方法，按材料力学公式求算。由多个弹性元件组