报考研究生丛书之五

大学物理复习纲要

（下　册）

顾梅玲　主编

合肥工业大学学报编辑部

目　录

第九章 恒稳电流的磁场

一、目的要求

1．正确理解磁感应强度的物理意义．掌握反映磁场性质的磁场中的高斯定理、安培环路定理及其应用．

2．学会应用毕奥-萨伐尔-拉普拉斯定律求任意载流导线所产生的磁场及运动电荷所产生的磁场．应用安培定律计算磁场对载流导线的作用力或载流线圈所受的磁力矩．

3．掌握带电粒子在电磁场中的运动规律．

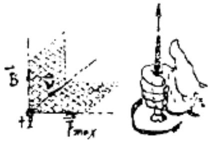
4．了解磁介质的磁化，明确$\vec{B}$、$\vec{H}$、$\vec{M}$三者之间的关系．

二、基本概念和基本规律

1．磁感应强度

磁感应强度是描述磁场强弱和方向的物理量．磁场中各点磁感应强度一般说来是不相同的．可根据运动电荷在磁场中所受磁力的情况来确定．

在磁场中任一给定点处，当运动电荷（正电荷）以速率v在该点沿着与磁场方向垂直的方向运动时，所受到的磁力最大为F_{max}，比值F_{max}/qv在该点具有确定的量值，它反映出该点磁场的性质．因此，我们把这个比值规定为磁场中某点磁感应强度$\vec{B}$的大小，即



$$B = \frac{F}{qv} \quad (1)$$

该点磁场方向就是磁感应强度的方向。

磁场的方向一般是用小磁针来确定

图 9-1

，对正电荷而言，也可由矢积 $\vec{F}_{max} \times \vec{v}$ 的方向确定 $\vec{B}$ 矢量的方向，如图 9—1 所示。

2．磁场中的高斯定理

在磁场中，通过任意封闭曲面的磁通量必等于零，即

$$\oint_S B\cos\theta\, ds = \oint_S \vec{B}\cdot\vec{ds} = 0 \quad (2)$$

它说明任何磁场中，每一条磁感应线都是环绕电流的无头无尾的闭合线．这与自然界中N、S磁极不能被分离的事实相联系的．由于磁感应线无头无尾，所以磁场是涡旋场．式(2)是表明磁场性质的重要定理。

3．毕奥-薩伐尔-拉普拉斯定律

设在载流导线上沿电流方向取线元 $\vec{dl}$，其中通过的电流强度为 I，我们称 $I\vec{dl}$ 为电流元，如图 9—2(a) 所示，电流元的方向即线元的方向。

(a) (b)

图 9-2

电流元 $I\vec{dl}$ 在真空中给定点P所产生的磁感应强度 $d\vec{B}$ 大

小和电流强度I、线元的长度dl以及线元和由线元到P点的矢径$\vec{r}$的夹角α[如图9—2（a）]的正弦都成正比，而和由线元到P点的距离r的平方成反比，即

$$dB = k\frac{Idl\sin\alpha}{r^2}$$

k为比例常数，在国际单位制中$k=\frac{\mu_0}{4\pi}$，μ_0称为真空中的磁导率，数值为$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}$特斯拉米／安培$=4\pi\times\times10^{-7}$亨利／米。因此上式变为

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\alpha}{r^2} \tag{3}$$

$\vec{dB}$的方向垂直于$I\vec{dl}$与$\vec{r}$组成的平面，指向为由$I\vec{dl}$经α（$\alpha<\pi$）角转向$\vec{r}$时的右手螺旋前进的方向，如图[9—2(b)]所示。

矢量式为
$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3} \tag{4}$$

实验证明，磁感应强度服从叠加原理。某一给定的电流分布在空间某点所产生的磁感应强度等于组成这电流分布的各电流元分别地在同一点上所产生的磁感应强度的矢量和，即

$$\vec{B} = \int\vec{dB} = \int\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\vec{dl}\times\vec{r}}{r^3} \tag{5}$$

由于$\vec{dB}$是矢量，因此积分时必须注意方向。如果各电流

元在给定点所产生的$\overrightarrow{dB}$方向都不相同时，可将$\overrightarrow{dB}$取它在各坐标轴上的分量，然后分别求它的积分，即

$$B_x=\int dB_x,\qquad B_y=\int dB_y,\qquad B_z=\int dB_z.$$

应用式（5）原则上可计算出各种形状的载流导线所产生的磁场。例如：

载流直导线的磁场为

$$B=\frac{I\mu_0}{4\pi a}(\sin\beta_2-\sin\beta_1) \tag{6}$$

“无限长”载流直导线的磁场为

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \tag{7}$$

载流圆线圈轴线上的磁场为

$$B=\frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+x^2)^{3/2}} \tag{8}$$

载流圆线圈的圆心处的磁场为

$$B_0=\frac{\mu_0 I}{2a} \tag{9}$$

4．运动电荷的磁场

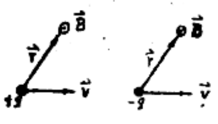
按古典电子理论，导体中的电流就是大量带电粒子的定向运动。由此可知，电流产生磁场的本质就是由于带电粒子的运动，因此可得每一个以速度$\vec{v}$运动的电荷所产生的磁感应强度$\vec{B}$的大小为。

$$B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{qv\sin(\vec{v}\ \vec{r})}{r^2} \tag{10}$$

$\vec{B}$的方向垂直于$\vec{v}$和$\vec{r}$所组成的平面。如果运动电荷是正电荷，$\vec{B}$的指向可由右手螺旋法则确定［如图9—3(a)。如果运动电荷是负电荷，$\vec{B}$的指向与上述相反［如图9—3(b)］。

用矢量式来表示，运动电荷所产生的磁感应强度$\vec{B}$为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3} \qquad (11)$$



(a)　　(b)

图 9—3

5．安培环路定律

在磁场中，沿任何闭合曲线的$\vec{B}$矢量的线积分（也称$\vec{B}$矢量的环流）等于真空中磁导率μ_0乘以包围在这闭合曲线内各电流的代数和，即

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum_{i=1}^{n}I_i \qquad (12)$$

电流的正负与积分时在闭合路径上所取的回转方向有关，由右手螺旋法则定。取螺旋的旋转方向与积分的回转方向相一致，则和螺旋前进方向相同的电流为正，相反的负。

6．安培定律

位于磁场中其点的电流元$Id\vec{l}$要受到磁场的作用力（称为安培力）$d\vec{F}$，$d\vec{F}$的大小和电流元所在处的磁感应强度$\vec{B}$的大小，电流元的电流强度I，线元的长度dl以及线元$d\vec{l}$的方向和磁感应强度$\vec{B}$的方向之间的夹角$(\widehat{d\vec{l}\,\vec{B}})$的正弦均成正比，在国际单位制中可表示为

$$dF = BI\,dl\,\sin(d\vec{l}, \vec{B}) \qquad (13)$$

$d\vec{F}$ 的方向垂直于 $Id\vec{l}$ 和 $\vec{B}$ 所组成的平面，指向可由右手螺旋法则确定．矢量表示式为

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B} \qquad (14)$$

一载流导线所受的安培力等于作用在各个电流元上的安培力的矢量和，即

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = \int Id\vec{l} \times \vec{B} \qquad (15)$$

如果载流导线上各个电流元所受的安培力 $d\vec{F}$ 的大小和方向都不相同时，可把 $d\vec{F}$ 分解为 dF_x、dF_y、dF_z 三个分量，然后再分别求积分．

7．磁场对载流线圈的作用

设在磁感应强度为 $\vec{B}$ 的匀强磁场中，有一刚性的长方形平面线圈，边长分别为 L_1 和 L_2，电流为 I（如图9—4）。设线圈平面的正法线 $\vec{n}$ 的方向和磁场方向的夹角为φ，如果线圈有N匝，则线圈所受的力矩为

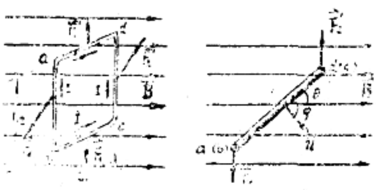


图 9-4

$$M = NBIL_1L_2\sin\varphi = P_m\sin\varphi \qquad (16)$$

$P_m = NIL_1L_2 = NIS$ 是线圈的磁矩，是矢量，用 $\vec{P}_m$ 表示，磁矩

的方向就是载流线圈平面法线$\vec{n}$的正方向。所以式（16）也可写成矢量式

$$\vec{M}=\vec{P}_m\times\vec{B} \tag{17}$$

式（16）和式（17）不仅对长方形线圈成立，对于在匀强磁场中任意形状的平面线圈也同样成立。

平面载流线圈在匀强磁场中任意位置上所受的合力均为零，仅受力矩的作用。因此在匀强磁场中的平面载流线圈只发生转动，不发生整个线圈的平动。

如果平面载流线圈处在非均匀磁场中，由于线圈上各个电流元所在处的$\vec{dB}$，在量值上和方向上都不相同，各个电流元所受的作用力的大小和方向，一般也都不可能相同。因此合力和合力矩一般也不会等于零，所以线圈除转动外还要平动。

8．带电粒子在电磁场中运动

设量质为m、电量为e的带电粒子以速度$\vec{v}$运动着，若只有电场$\vec{E}$存在时，它受到的电场力为

$$\vec{f_e}=e\vec{E}$$

若只有磁场$\vec{P}$存在时，它受到的洛伦兹力为

$$\vec{f}=e\vec{v}\times\vec{B}$$

若电场和磁场同时都存在时，则带电粒子受到的电磁力为

$$\vec{f}=\vec{f_e}+\vec{f_m}=e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) \tag{18}$$

此式称为洛伦兹公式。按牛顿第二定律，带电粒子的运动方程为

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=e(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$$

在直角坐标系中，上述矢量式的分量式为

$$\left.\begin{aligned}
m\frac{dv_x}{dt}&=eE_x+e(v_yB_z-v_zB_y)\\
m\frac{dv_y}{dt}&=eE_y+e(v_zB_x-v_xB_z)\\
m\frac{dv_z}{dt}&=eE_z+e(v_xB_y-v_yB_x)
\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

9．磁介质

（1）分子磁矩

根据物质电结构学说，任何物质（实物）都是由分子、原子组成的。而分子或原子中任何一个电子都同时环绕原子核运动和电子本身的自旋，这两种运动都能产生磁效应。把分子或原子看作一个整体，分子或原子中各个电子对外界所产生的磁效应的总和，可用一个等效的圆电流表示，称为分子电流。这种分子电流具有一定的磁矩，称为分子磁矩，用$\vec{P}_m$表示。

在外磁场$\vec{B}_0$中，分子或原子中的每一个电子都受到洛伦兹力的作用，这时每个电子除了保持环绕原子核运动和电子本身自旋外，还要以外磁场方向为轴线的进动。电子的进动也相当于一个圆电流，因电子带负电，这种等效圆电流的磁矩的方向永远与$\vec{B}_0$的方向相反。这是导致磁介质产生抗磁性的内因，也是一切磁介质所共有的性质。分子中各个电子因

进动而产生的磁效应的总和，也可以用一个等效的分子电流的磁矩来表示，称为附加磁矩，用$\Delta\vec{P}_m$表示。

（2）顺磁质的磁化

在顺磁质中，每个分子的分子磁矩有一定的量值，在外磁场$\vec{B}_0$的作用下，分子磁矩$\vec{P}_m$的大小不变，电子的进动虽然存在，由于$P_m \gg \Delta P_m$，所以ΔP_m可以略去。此时外磁场$\vec{B}_0$使$\vec{P}_m$绕外磁场方向作进动，由于分子之间的相互作用和分子的热运动，分子磁矩的取向是不可能完全一致的，但分子磁矩的排列较没有外磁场时为整齐。磁场愈强，温度愈底，排列也愈整齐，磁介质被磁化的程度也愈高。如果在磁体内取一体积元ΔV，这体积元内各分子磁矩的矢量和$\Sigma\vec{P}_m$将有一定的量值。单位体积内的分子磁矩称为磁化强度，用$\vec{M}$表示

$$\vec{M} = \frac{\Sigma\vec{P}_m}{\Delta V} \tag{20}$$

$\vec{M}$的方向与外磁场$\vec{B}_0$的方向一致，顺磁质磁化后所产生的附加磁场$\vec{B}'$的方向与$\vec{B}_0$方向相同，这是顺磁性的重要表现。

（3）抗磁质的磁化

在抗磁质中，每个分子中所有电子的磁效应相互抵消，分子磁矩为零。抗磁质在外磁场中的磁化作用，完全决定于抗磁质中分子在有外磁场$\vec{B}_0$时所产生的附加磁矩$\Delta\vec{P}_m$，$\Delta\vec{P}_m$的方向与$\vec{B}_0$的方向相反，大小与$\vec{B}_0$成正比。磁化强度为

$$\vec{M} = \frac{\Sigma \Delta \vec{P}}{\Delta V} \tag{21}$$

$\vec{M}$的方向与外磁场$\vec{B_0}$的方向相反，经磁化后的抗磁质所产生的在抗磁质内的附加磁场$\vec{B'}$的方向也与$\vec{B_0}$的方向相反。这是抗磁性的重要表现。

(4) *磁介质中的磁场*

在磁场中放进了某种磁介质后，由于磁场和磁介质间的相互影响的结果，使磁介质在磁场中因磁化而产生附加磁场$\vec{B'}$，这时磁介质内任一点的总磁感应强度等于$\vec{B_0}$和$\vec{B'}$的矢量和，即

$$\vec{B} = \vec{B_0} + \vec{B'} \tag{22}$$

对于均匀磁介质充满整个磁场时

$$\frac{B}{B_0} = \mu,$$

(5) *有磁介质时的安培环路定律*

在磁场中沿任何的闭合曲线的$\vec{H}$矢量的线积分等于通过这闭合线内各电流强度的代数和，即

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{n} I_i \tag{24}$$

其中$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$，$\vec{H}$叫做磁场强度。

从式(24)可以看到，$\vec{H}$矢量的环流只和传导电流连系

着，而在形式上与磁介质的性质无关，即当传导电流 I 给定以后，不论磁场中放进什么样的磁介质，虽然在不同的情况下同一点的$\vec{H}$矢量有所不同，但$\vec{H}$矢量的环流只和传导电流连系着。因此，引入磁场强度$\vec{H}$这个物理量以后，能够使我们比较方便地处理有磁介质时的磁场问题。

(6) 三个磁矢量的关系

$\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$是磁场强度的定义式，而且不论磁介质是否均匀，甚至对铁磁质，也用此式定义磁介质中的$\vec{H}$矢量。它表明磁介质中任一点处磁感应强度$\vec{B}$、磁场强度$\vec{H}$和磁化强度$\vec{M}$之间的普遍关系，可改写为

$$\vec{B}=\mu_0\vec{H}+\mu_0\vec{M} \tag{25}$$

对于各向同性的磁介质，在磁介质中任一点，磁化强度$\vec{M}$和磁场强度$\vec{H}$成正比，即

$$\vec{M}=\chi_m\vec{H} \tag{26}$$

比例系数χ_m称为磁介质的磁化率。把式（26）代入式（25）中可得

$$\begin{aligned}\vec{B}&=\mu_0\vec{H}+\mu_0\chi_m\vec{H}=\mu_0(1+\chi_m)\vec{H}\\&=\mu_0\mu_r\vec{H}=\mu\vec{H}\end{aligned} \tag{27}$$

$$\mu_r=1+\chi_m$$

是磁介质的相对磁导率。

对于各向同性的磁介质，χ_m是恒量，μ_r也是恒量，且都

是纯数。磁介质的磁化率χ_m、相对磁导率μ_r、磁导率μ都是描述磁介质磁化特性的物理量。

对于铁磁质来说，虽然在形式上仍引用式（25）和式（26），但式中的磁导率μ、相对磁导率μ_r和磁化率χ_m并不是恒量。由于铁磁质有磁滞现象，$\vec{B}$、$\vec{H}$之间不具有简单的线性关系。

对于真空中磁场来说，由于$\vec{M}=0$，从式（25）得到$\vec{B}=\mu_0\vec{H}$，这表明"真空"相当于$\mu_r=1$的"磁介质"。真空中各点处的磁场强度$\vec{H}$等于该点磁感应强度$\vec{B}$的$\frac{1}{\mu_0}$倍，即$\vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\vec{B}$。

式(27)很重要，它表明只要根据安培环路定律$\oint\vec{H}\cdot d\vec{l}=\sum_{i=1}^{n}I_i$算出$\vec{H}$，又磁导率$\mu$已知，利用此式可以立刻求出磁介质中的磁感应强度$\vec{B}$。

三、解题示例

例1．如图9—5(a)所示，一根无限长直导线，其中部被弯成半圆环状，环的半径a=10厘米。当导线通有电流I=4.0安培时，求（1）环心O处的磁感应强度；（2）垂直于环面的轴上距O点40厘米处P点的磁感应强度。

图 9-5

解 (1) 如图9—5 (b) 所示，O点的磁感应强度是$\overline{MN}$，$\widehat{NAR}$和$\overline{RQ}$三段载流导线所产生的磁感应强度之矢 量 和。由于O点在直线MN 和 $\overline{RQ}$ 的延长线上，它们对O点磁感应强度的贡献为零。所以，C点的磁感应强度就等于半圆弧$\widehat{NAR}$在O点所产生的磁感应强度，其数值为圆电流在圆心 处 的B的一半，即

$$B_0=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_0 I}{2a}\right)=\frac{4\pi\times10^{-7}\times4.0}{4\times0.10}$$

$$=1.26\times10^{-5}\text{特斯拉。}$$

方向如图9—5 (b) 垂直纸面向内。

(2) 为了求不在环面上的P处的磁场，我们先求出半圆形载流导线在此点的磁感应强度。

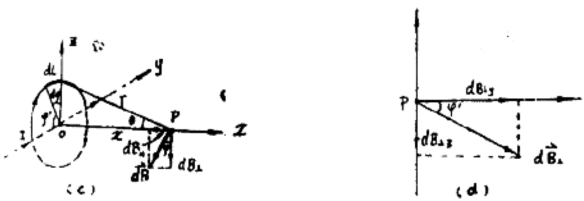


图 9-5

如图9—5(c) 所示，电流元 $I d\vec{l}$ 在P点所产生的磁感应强度 $d\vec{B}$ 在X轴上的分量为 $dB_x = dB\sin\theta$．于是半圆弧部分在P点所产生的磁感应强度的X分量

$$B = B_{11} = \int_{半圆} dB = \int dB\sin\theta = \int_0^{\pi a} \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \sin\theta$$

$$= \frac{\mu_0 I \pi a}{4\pi r^2} \sin\theta = \frac{\mu_0 I a}{4r^2} \frac{a}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 I a^2}{4r^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{4(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi\times10^{-7}\times4\times(0.10)^2}{4(0.10^2+0.40^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$= 1.79\times10^{-7}$ 特斯拉．

由对称性可知，相应磁感应强度的y分量

$$B = 0.$$

相应的Z分量为

$$B_z = -\int_{半圆} dB_{1z} = -\int dB_1 \sin\varphi'$$

$$= -\int_{半圆} dB\cos\theta\sin\varphi' = -\int_{半圆} \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl\cos\theta\sin\varphi'$$

$$= -\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2}\cos\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi'\cdot a\,d\varphi' = -\frac{a\mu_0 I}{2\pi r^2}\cos\theta$$

$$= -\frac{a\mu_0 I}{2\pi r^2}\frac{x}{r} = -\frac{\mu_0 I a x}{2\pi(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$