

有限元法基础

蒋孝煜



清华大学出版社

51.0
8-7

有限元法基础

蒋孝煜 编



清华大学出版社

1111794

内 容 简 介

本书是一本有限元法的基础性读物，主要介绍平面及轴对称问题的三角形单元、平面及空间问题的等参数单元、梁单元以及子结构分析法、动力分析等问题，并附有一些算例。

内容力求少而精，着重基本概念，由浅入深，点面结合。

本书可作为高等学校机械设计类型专业“有限元法原理及应用”课程的教学用书。一般工程技术人员也能自学看懂。

有限元法基础

蒋孝煜 编

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

北京朝阳关西庄印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

☆

开本：787×1092 1/32 印张：5 $\frac{7}{8}$ 字数：126千字

1984年7月第一版 1984年7月第一次印刷

印数：00001~25000

统一书号：15235·113 定价：0.70元

序

有限元法是进行工程计算的有效方法，自五十年代起，在航空、水利、土木建筑、机械等多方面得到广泛的应用。随着许多大型有限元通用程序的出现，有限元法逐渐成为广大工程技术人员进行结构分析的有力工具。

编者清华大学汽车专业讲授“有限元法原理及应用”课程，课程的目的是使学生掌握必要的有限元法基本原理，为进一步应用有限元通用程序打下基础。为此课程所编印的讲义也为一些兄弟院校所选用。这本书就是在原有讲义的基础上，根据我校及兄弟学校的使用经验改编而成的。

作为一本基础和入门的书，编写时力求做到少而精，着重讲清基本概念，由浅入深，点面结合。使工程技术人员能够自学看懂。

本书的编写得到了清华大学龙驭球教授的大力支持及指导，并审阅了书稿，在此谨表衷心的感谢。还得到工程力学系谢志成、官飞、王烈、余寿文等副教授的热忱帮助，在此一并表示谢意。

编者水平有限，书中不免有错漏之处，欢迎批评指正。

编者

1982年10月

目 录

第一章 平面问题的单元分析	(1)
§ 1 两类平面问题.....	(1)
§ 2 平面问题的离散化.....	(4)
§ 3 单元分析的一个简例.....	(11)
§ 4 单元位移模式.....	(13)
§ 5 单元应变.....	(18)
§ 6 单元应力.....	(21)
§ 7 单元节点力.....	(27)
§ 8 单元刚度矩阵.....	(30)
第二章 平面问题的整体分析	(34)
§ 1 整体刚度矩阵的集成.....	(34)
§ 2 整体刚度矩阵的特点.....	(38)
§ 3 载荷向量.....	(41)
§ 4 支承条件的处理.....	(43)
§ 5 非节点载荷的移置.....	(46)
§ 6 应力计算及结果处理.....	(49)
§ 7 输入数据的准备.....	(53)
§ 8 对称性的利用.....	(56)
§ 9 变温载荷.....	(58)
§ 10 计算实例.....	(60)

第三章 轴对称问题	(63)
§ 1 轴对称.....	(63)
§ 2 位移模式.....	(64)
§ 3 单元应变.....	(65)
§ 4 单元应力.....	(67)
§ 5 单元刚度矩阵.....	(68)
§ 6 计算实例.....	(69)
第四章 等参数单元	(73)
§ 1 位移模式.....	(73)
§ 2 形函数.....	(76)
§ 3 坐标变换.....	(78)
§ 4 雅可比矩阵.....	(82)
§ 5 二维等参数八节点单元.....	(84)
§ 6 三维等参数二十节点单元.....	(87)
§ 7 载荷的移置.....	(90)
§ 8 等参数单元的形态.....	(94)
§ 9 计算实例.....	(97)
第五章 梁单元	(99)
§ 1 平面梁单元的刚度矩阵.....	(99)
§ 2 坐标转换.....	(105)
§ 3 非节点载荷的移置.....	(107)
§ 4 梁端内力.....	(117)
§ 5 薄壁杆件的约束扭转.....	(122)
§ 6 计算实例.....	(129)
第六章 子结构分析法	(133)
§ 1 子结构分析法的基本思路.....	(133)

§ 2	子结构分析法的步骤	(135)
§ 3	一个算例	(140)
第七章	动力分析	(148)
§ 1	运动方程	(148)
§ 2	质量矩阵	(151)
§ 3	阻尼矩阵	(153)
§ 4	结构的自振频率及振型	(155)
§ 5	计算实例	(156)
附录	矩阵代数基础	(162)
§ 1	向量	(162)
§ 2	矩阵	(164)
§ 3	几种特殊矩阵	(166)
§ 4	矩阵的等式, 加减, 数乘及转置	(167)
§ 5	矩阵乘法	(169)
§ 6	逆阵	(172)
参考文献		(174)

第一章 平面问题的单元分析

§1 两类平面问题

弹性力学研究的问题可以分为空间及平面两类。严格的说，任何弹性物体都是处在三维受力状态，因而都是空间问题，但是在一定条件下，许多空间问题可以简化为平面问题，从而可以大大减少计算工作量。

平面问题可以分为两类。

一、平面应力问题

设有一薄板，如图1—1所示，其厚度方向的尺寸比其他两个方向的尺寸小许多，在板边上受有平行于板面并沿板厚均匀分布的载荷 P ，板面上不受外力，则可以认为板内各点的

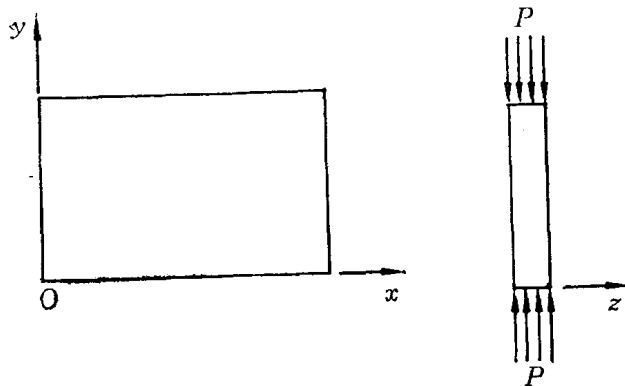


图1—1

1111794

六个应力分量中的 $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ 均为零，而剩下的三个应力分量 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 都是平行于 xoy 平面的，所以这种问题称为平面应力问题。

许多机器零件均可近似的作为平面应力问题进行计算，如发动机连杆，齿轮等。

二、平面应变问题

设有一根长的圆柱体或棱柱体，如图1—2所示，其轴线为 z 轴，在柱面上受有平行于横截面且沿 z 轴为均匀分布的载荷 P ，则可以认为体内各点只有 x 及 y 轴方向的位移，而没有

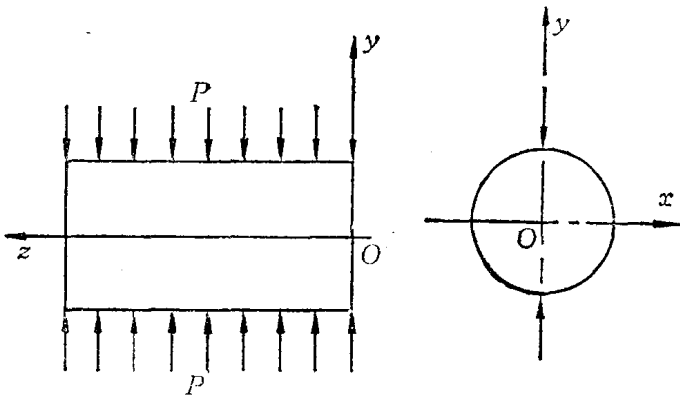


图1—2

沿 z 轴方向的位移，在六个应变分量中 $\epsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ 均为零。剩下的三个应变分量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ 平行于 xoy 平面，所以这种问题称为平面应变问题。有一些机器零件可近似的作为平面应变问题进行计算，如花键，滚针轴承中的滚子等。

上述两类问题合称为平面问题。应该指出，在平面应力问题中，虽然 $\sigma_z = 0$ ，但应变 ϵ_z 并不等于零，而平面应变

问题中，虽然 $\varepsilon_x = 0$ ，而该方向的应力 σ_x 并不为零。因为柱体中各点的 ε_x 之所以为零，是受了相邻材料约束的结果，自然 σ_x 也就不会为零。

本章§6中将进一步讨论这两种问题。

弹性力学平面问题的有限元解法包括三个主要步骤：离散化、单元分析、整体分析。下面将分别加以研究。

§2 平面问题的离散化

一个复杂的弹性体可以看成是由无限个质点组成的连续体。它具有无限个自由度。为了进行解算，可以将此弹性体简化为由有限个单元组成的集合体，这些单元只在有限个节点上相铰接，因此，这集合体只具有有限个自由度，这就为解算提供了可能。由无限个质点的连续体转化为有限个单元的集合体，就称为离散化。在数学意义上说，就是把微分方程的连续形式转化为代数方程组，以便于进行数值解。

在弹性力学平面问题中用以进行离散化的单元形式有很多种。如图1-3所示：(a)三角形三节点单元，(b)矩形四节点单元，(c)四边形单元，(d)三角形六节点单元，(e)曲边四边形八节点单元等等。图1-4表示一个离散化的例子：一个受载的悬臂梁和用三角形单元离散化的模型。并规定：单元之间仅在节点处铰接，单元之间的力只通过节点传递，外载荷只加在节点上。

划分单元时一般应注意以下几点：

一、从有限元本身看，单元划分得越细，节点布置得越多，计算结果越精确。但是随之而来的是计算时间和计算费

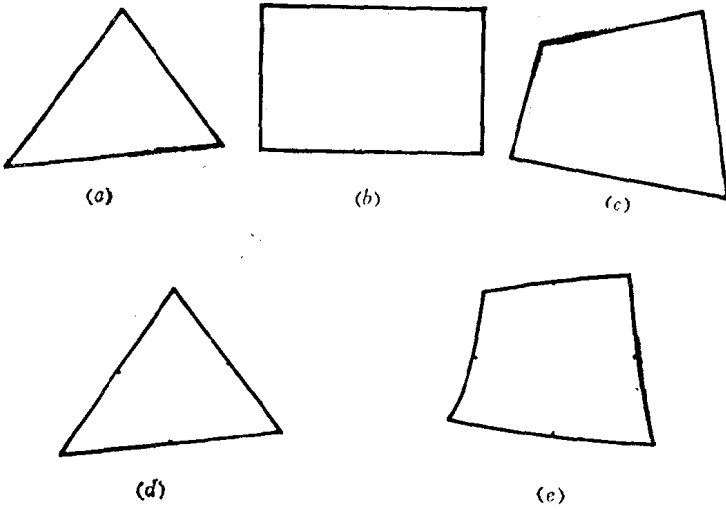


图1-3

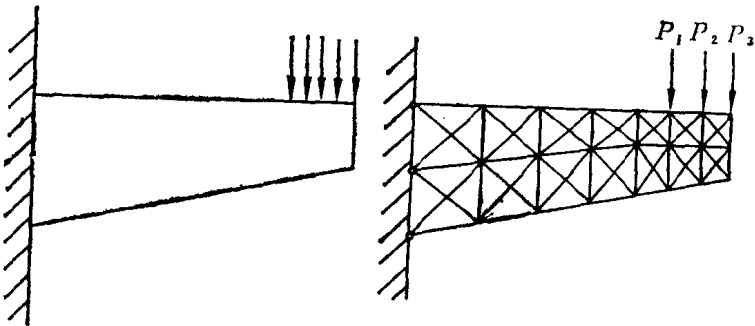


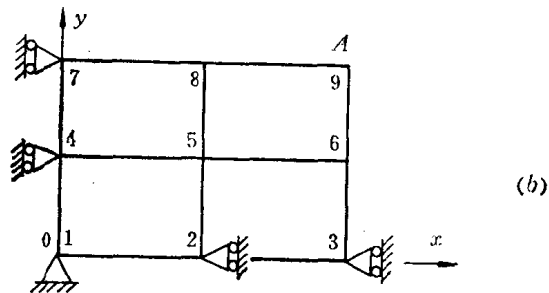
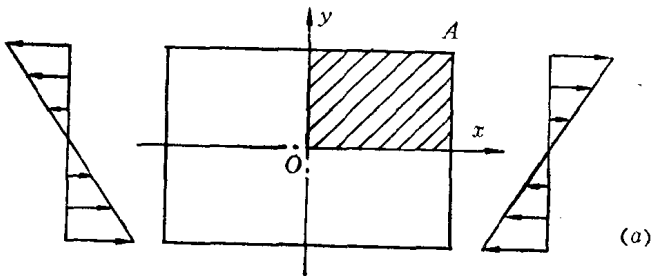
图1-4

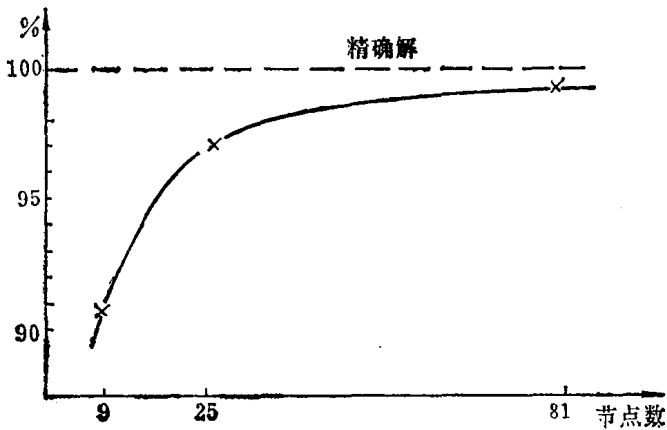
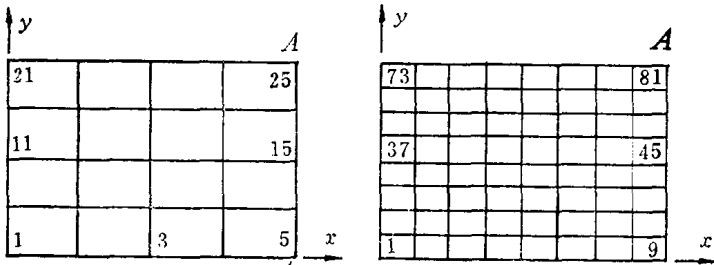
用的增加。所以在划分单元时应兼顾这两个方面。举例说明之〔9〕。图1-5(a)表示两端受弯矩的板梁。因梁对 x 、 y 轴对称，计算时可以只取其四分之一。由于对称，板梁中心 O

的位移应为零，而 x 、 y 轴上各点的水平位移也应为零。图1—5(b)表示四分之一板梁的三种不同密度的离散化模型。将有限元法计算的 A 点位移和精确解相比较(图1—5(c))，可见当节点数和单元数达到一定数量后，再加密网格对提高计算精度效果已不显著了。

二、在边界比较曲折，应力比较集中，应力变化较大的地方，单元应分得细一些，而在应力变化平缓处单元可划得大一些。单元由小到大应逐步过渡。

三、对于三角形单元，三条边长应尽量接近，不应出现钝角，以免计算结果出现大的偏差。对于矩形单元，长度和宽度也不宜相差过大。如图1—5(a)的例题，若在保持单元





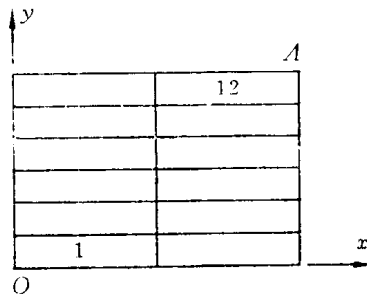
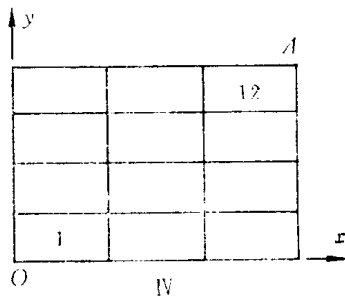
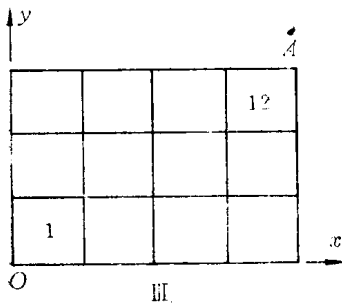
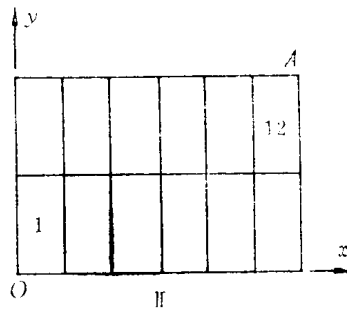
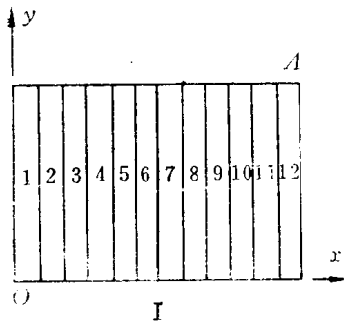
(a)

图1-5

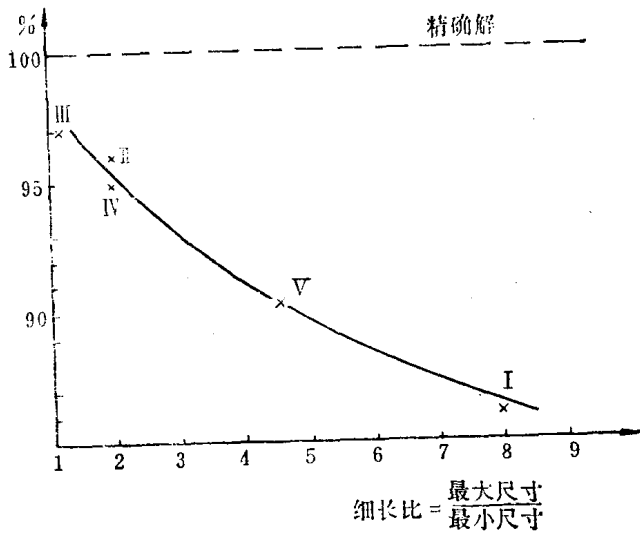
及节点数基本不变的条件下，改变单元划分方案如图1-6 (a) 所示，仍以A点的位移作比较，则由图1-6(b)可知，长度和宽度越接近，计算精度越高。

四、任意一个三角形单元的角点必须同时也是相邻单元的角点，而不能是相邻单元边上的内点。划分其他单元时也应遵循此原则。

五、如果计算对象具有不同的厚度或不同的弹性系数，



(a)



(b)

图1-6

则厚度或弹性系数突变之处应是单元的边线。图1-7表示一连杆小头，铜质衬套和钢质连杆具有不同的弹性系数，小头和杆身的工字形断面又各有不同的厚度，故在突变处都应划成单元的边界线。

六、应在分布载荷有突变之处（图1-8(a)）或是受有集中载荷处（图1-8(b)）布置节点，其附近的单元也应划分得小一些。

单元划分完毕后，要将全部单元及全部节点按一定顺序编号，单元号及节点号均不能有错漏或重复。

每个单元所受的载荷均应按静力等效的原则移置到节点上，并在位移受约束的节点上根据实际情况设置约束条件。

关于这两部分内容将分别在第二章 § 4和 § 5中讨论。

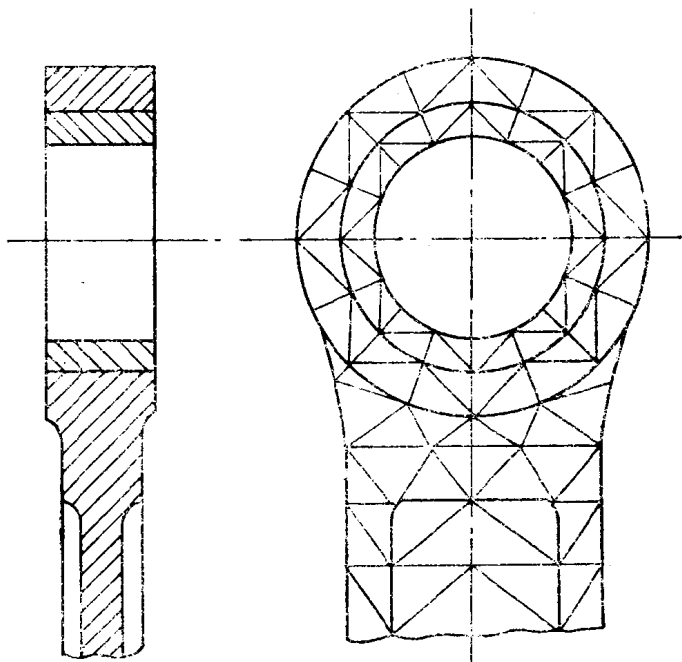


图1-7

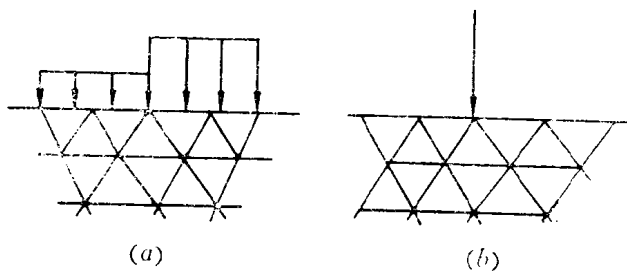


图1-8

§ 3 单元分析的一个简例

单元分析的主要任务是：求出单元节点位移和节点力之间的转换关系。在推导此关系时规定：力和位移的方向若和坐标轴正方向一致者为正。

先举一个简单例子，图1—9(a)示一拉压弹簧，弹簧系数为常量 c ，其轴线和 x 坐标轴重合，令此弹簧为一个单元，则弹簧的两端点 i ， j 是此单元的两个节点。设在节点 i ， j 上分别有轴向力 U_i ， U_j 和轴向位移 u_i ， u_j 。则当节点对单元

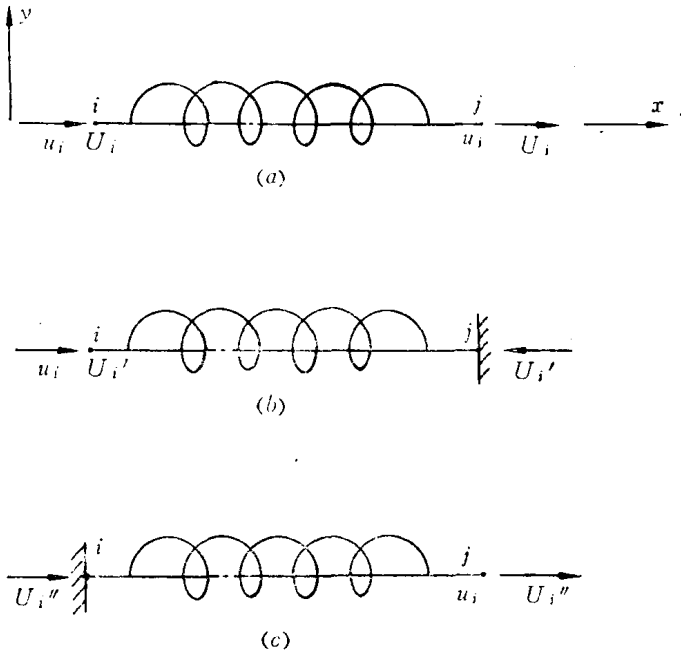


图1—9