

高等学校教学用书

理论力学

下册

И. Е. 茹科夫斯基著

高等教育出版社

高等学校教学用书



理 論 力 学

下 册

H. E. 茹科夫斯基 著
余守憲 張理京 譯

高等教育出版社

本書系根据苏联技术理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的茹科夫斯基 (Н. Е. Жуковский) 著“理論力学” (Теоретическая Механика) 1952 年第二版譯出。本書为偉大的俄国力学家, 航空学家, “俄罗斯航空之父” (列宁語) 的講义, 由戈魯別夫 (В. Л. Голубев) 編成。原書經苏联高等教育部审定为高等学校教学参考書。

本書中譯本分兩分册出版, 上册内容包括运动学, 几何靜力学及質点动力学三部分, 下册内容包括解析靜力学, 体系的动力学, 流体靜力学, 流体动力学, 引力論五部分。

本書上册由張理京譯出, 下册由余守憲譯出, 并互相校訂, 全書譯稿由余守憲整理, 季文美校訂。

理 論 力 学

下 册

Н. Е. 茹科夫斯基著

余守憲 張理京譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇号

(北京市書刊出版業營業許可証出字第〇五四号)

京华印書局印刷 新华書店总經售

統一書号 13010·232 開本 850×1168^{1/2} 印張 13 4/16 字數 338,000

一九五七年三月北京第一版

一九五七年三月北京第一次印刷

印數 00001—10 000 定價 (10) 羊 2.00

下册目录

第四篇 解析静力学

§ 1. 論約束	403
§ 2. 应用于質点的虛位移法	407
§ 3. 应用于体系的虛位移法	427
§ 4. 不变体系的平衡	454
§ 5. 綫多边形的平衡	458
§ 6. 柔順綫的平衡	466
§ 7. 柔順綫在有心力作用下的平衡	482

第五篇 体系的动力学

§ 1. 达蘭贝尔原理	486
§ 2. 体系运动的微分方程	493
§ 3. 动力体系的运动	496
§ 4. 动力学的基本定理	506
§ 5. 拉格朗日形式的微分方程	529
§ 6. 瓦特节速器的問題	541
§ 7. 哈密頓方程	545
§ 8. 哈密頓原理与最小作用量原理	548
§ 9. 体系平衡的稳定性	556
§ 10. 轉动慣量	560
§ 11. 剛体动力学: 轉动、平动与平行于平面的运动	571
§ 12. 物体定点轉动的运动方程	586
§ 13. 具有一个定点的物体的慣性运动	590
§ 14. 自由剛体的运动	600
§ 15. 迴轉仪理論	603
§ 16. 物体的碰撞	604
§ 17. 两个球的碰撞	612
§ 18. 任意形状物体的碰撞	615

流体静力学与流体动力学

第一篇 流体静力学

§ 1. 流体的基本性質	625
--------------------	-----

§ 2. 作为动力体系的流体	627
§ 3. 广义格林公式	630
§ 4. 作为几何体系的不可压缩流体的平衡条件	632
§ 5. 由普遍平衡方程所得的推论	639
§ 6. 流体平衡的例子	644
§ 7. 重液体对浸没物体的压力	659
§ 8. 阿基米德定律	664
§ 9. 浮体的平衡	670
§ 10. 沿母线漂浮的棱柱的平衡位置的最大数	688
§ 11. 浮体平衡的稳定性	697
§ 12. 计算高于地面的某处的气压公式	699

第二篇 流体动力学

§ 1. 引言	702
§ 2. 欧拉形式的流体动力学方程	702
§ 3. 拉格朗日形式的流体动力学方程	708
§ 4. 稳定运动与具有速度势的运动。柏努利定理与拉格朗日定理	714
§ 5. 亥姆霍兹涡旋定理	720

引 力 论

第一章 点·线·面及体的引力733

§ 1. 引力论普遍公式	733
§ 2. 物体作用于质点的引力的势函数	735
§ 3. 与距离成正比的引力	736
§ 4. 牛顿引力定律 物体对遥远点的引力	738
§ 5. 物质圆弧对位于圆心的质点的引力	740
§ 6. 物质直线的引力	741
§ 7. 物质面积的引力	743
§ 8. 有限厚度的无限平面物质层的引力	745
§ 9. 无限长柱体的引力	746
§ 10. 无限长圆柱的引力	747
§ 11. 球的引力	752
§ 12. 球引力的解析研究	756
§ 13. 多面体的引力	760

第二章 椭球的引力.....767

§ 1. 牛顿定理	767
§ 2. 艾佛尔定理	768
§ 3. 马克劳林定理	772

§ 4. 拉普拉斯定理	774
§ 5. 夏尔法	777
§ 6. 轉成橢球的引力	783
§ 7. 橢球引力的狄义赫利公式	791
§ 8. 橢球引力的势	795
第三章 势函数总論	798
§ 1. 势函数的性質	798
§ 2. 拉普拉斯定理	807
§ 3. 泊松定理	808
§ 4. 格林定理	812
§ 5. 高斯定理	814
§ 6. 狄义赫利定理	818

第四篇 解析靜力学

§ 1. 論約束 由几何条件或相互作用的力所約束的質点的組合，叫做力学体系。

如果各質点仅由相互作用的力所約束，因此每一点可以有任何的位移，那么这样的体系就叫做动力体系。动力体系的一个例子是太陽系，这里作为質点的行星受到相互作用的力（即牛頓万有引力）的約束。动力体系的另一个例子是由微粒組成的气态物，在这些微粒之間有着相互作用的力。

如果力学体系的各点由几何条件所約束，即如果对体系的各点而言，并非任何位移都是可能的，那么体系就叫做几何体系。几何体系的一个例子是剛体，其特征是任何兩点之間的距离保持不变。剛体也叫做不变体系。如果我們用液体每个元的体积不能改变的这个条件来定义液体，那么液体也是几何体系的一个例子。

作用在体系內各点的力以及約束它們的几何条件，都可以是內部的或者外部的。当由不在体系內的其他物体作用于体系各点时，所觀察到的力，叫做外力。例如，对太陽系而言，恒星对太陽的引力就是外力。

反过来，体系內各質点之間互相作用的力，就是內力。例如，重力对落体來說是外力。如果我們把地球和月球看作一个体系，或者，一般地，把任一行星与其衛星看作一个体系，那么，行星对其衛星所作用的力就是內力，而太陽所作用的力就是外力。同样，体系本身各質点之間互相約束的几何条件，叫做內几何条件；例如，不变体系的剛性条件是內約束。

凡把某一体系与外部固定物体約束起来的几何条件，就叫做外几

这条曲线运动。用同样的方法可以发现，所有其余各点将各沿一条如上求得的曲线进行运动。

如果任意一点，例如第一点，移过一定的路程，那么我们就知道它的坐标 x ；于是由 $3n-1$ 个方程我们就可以求出所有其他的坐标并决定体系的位置。这样的体系，它的整个运动由一个参数的变化来描述；因此，这样的体系可以叫做具有一个自由位移的体系。任何一架机器都可以当作这种体系的例子。

举例来说，假如研究时钟的机构，我们就可以看到，机构的每一点都描画一定的路径。当我们使时钟的任一点运动时，这就给予整个时钟以全然确定的运动。

如果体系受 $3n-2$ 个方程所约束，那么它就叫做具有两个自由位移的体系。在这样的体系里，任一点只能沿一个完全确定的曲面作位移。这可以这样看出来：由 $3n-2$ 个方程消去除 x, y, z 以外的所有各个坐标，即消去 $3n-3$ 个变量，我们就得到 x, y, z 间的一个方程，形如

$$\varphi(x, y, z) = 0,$$

这代表一个曲面，点 (x, y, z) 就沿这个曲面作位移。对体系的任意另一点，都可以这样来讲。

容易看到，当任一点沿其曲面移过任一路程时，所有其他各点亦各沿它自己的曲面移过一定的路程。依此类推，如果用 $3n-i$ 个方程来约束，我们就可以得到具有 i 个自由位移的体系。

现在我们来看，不变体系究竟受到几个条件的约束。为了要描述由 n 个点组成的不变体系的特性，我们这样来进行。设想三个质点 $(0, 1, 2)$ 以直线 AB, BC, CA 不变

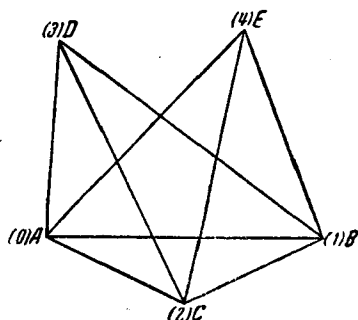


圖 288.

地联接在三角形上(圖 288)。因为 AB, BC, CA 是不变的, 所以应该有 下列方程:

$$\left. \begin{aligned} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 &= l_{0,1}^2, \\ (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2 &= l_{1,2}^2, \\ (x_2-x)^2 + (y_2-y)^2 + (z_2-z)^2 &= l_{2,0}^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

现在把 A, B , 及 C 用不变直线連至点 $D, E, \dots$; 为要表明 D 与 A, B 及 C 不变地連結, 应该对三直线 DA, DB, DC 写成这样形式的方程:

$$\left. \begin{aligned} (x_3-x)^2 + (y_3-y)^2 + (z_3-z)^2 &= l_{3,0}^2, \\ (x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2 + (z_3-z_1)^2 &= l_{3,1}^2, \\ (x_3-x_2)^2 + (y_3-y_2)^2 + (z_3-z_2)^2 &= l_{3,2}^2, \end{aligned} \right\}$$

这样, 每加出一个新的点(除三个基本点 $0, 1, 2$ 外), 就須写出三个方程; 加出 $n-3$ 个点, 共須写出 $3(n-3)$ 个方程; 和方程(2)一起, 共組成 $3(n-3)+3=3n-6$ 个条件。由此我們断定, 不变体系有六个自由位移。

有时候, 約束体系各点坐标的条件不是用一个坐标函数等于零的情形来表达的, 而是用一个函数应该或者始終等于常数或者按一定方向变化(就是說, 只能增大或者只能减小)这种情形来表达的。例如, 假設两个質点以一根不能伸長但是柔順的繩索相約束; 于是两个質点間的距离就应该或者等于或者小于繩索的長度。

这些条件用等式或不等式来表达:

$$\begin{aligned} &(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 \leq l^2, \\ \text{即} \quad &(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 - l^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

在这种情形下, 体系可以解脱距离为常数这个約束, 依一定方向解脱, ——就是說, 沿縮小这距离的方向解脱。

但在运动和平衡的問題里, 总找得到这样一些位移, 它們滿足等式, 因为, 如果等式变成不等式, 那么点的坐标的約束条件就失效了; 例如, 如果有表达繩索柔順可弯曲的不等式(3), 那么当繩索松弛的时候,

就已經應該把質點看作是自由的而不是相互約束的了。

不难注意到,不等式是体系可以解脱的条件;因此,这种条件叫做解脱条件。

§ 2. 应用于質點的虛位移法 力学体系的平衡与运动的問題,可以借助于拉格朗日在其解析力学一書中所提出的方法来求解,这方法叫做虛位移法。^①为了更好地研究这个方法,我們先把它应用于一个質點的問題,然后再把它推广到若干个質點的情形,即推广到体系的情形。

拉格朗日方法依据于可能無限小位移及不可能無限小位移的討論。如果質點是完全自由的,那么我們就可以使它沿任意方向移过無限小距离 δs 。我們將把这个無限小位移在坐标軸上的投影記作 $\delta x, \delta y, \delta z$ 。

如果質點受到某些几何条件的約束,那么它的某几种無限小位移是可能的,而另外几种則是不可能的。例如,如果質點位在某个曲面上,絕對不能离开这曲面,那么該質點就只能沿着曲面發生無限小位移。但如質點可以离开曲面而走向曲面的某一边,那么对这質點來說,离开切面而鑽入曲面所包圍的物体内部的所有各个無限小位移,都是不可能的;而离开切面指向物体所不在的那一方面的位移,則是可能的。

如果質點位在某一曲綫上,不能离开这曲綫,那么,只有沿該綫的一个方向或与之相反的方向的兩個無限小位移是可能的。而如果位在曲綫上的質點,只能沿一个方向运动,那就只有一个無限小位移是可能的了。

質點在不解脱所受的約束时所能产生的那些無限小位移,叫做非解脱位移;質點在解脱某些約束时,所能产生的那些無限小位移,叫做解脱位移。容易看出,如果位移是非解脱的,那它就是双向的,即是說,一个非解脱可能位移对应着另一个与之方向相反的、無限小的可能位移;而解脱位移則只是單向的。例如(圖 289),位在一曲面上而不能离

^① 原書把这种方法叫做“可能位移法”,下同——譯者。

开曲面的一个质点,可以沿切线 δs 的一个方向或与之相反的方向发生位移,不解脱所给予的条件;反过来,如果点离开曲面,因而解除了所受的条件(就是位在曲面上),那么,它的位移就只能是单向的无限小位移 δs_1 ,因为方向相反的位移是不可能的。

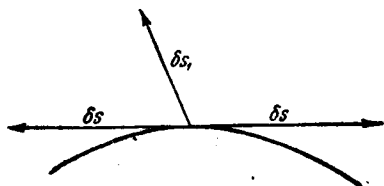


圖 289.

現在我們來定义力对应于位移的虚功^①这个名詞,并証明有关这个量的几个定理。

质点发生任一虚位移时,力 P 在这位移中所作的元功,即 $P \cos(P, \delta s) \cdot \delta s$,叫做力对应于质点这个虚位移的虚功。下面来証明关于虚功的几个定理。

[定理] 对应于任一虚位移的合力的虚功,等于对应于该位移的各分力的虚功之和。設 δs (圖290)为虚位移, R 为力 $P, P_1, P_2, P_3, \dots$

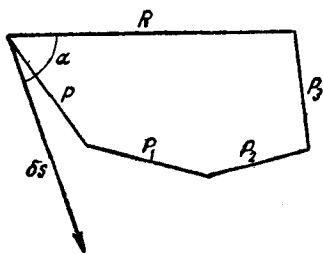


圖 290.

的合力。把 $R, P, P_1, P_2, \dots$ 投影在 δs 的方向上,并注意在任意軸上,合力的投影等于分力的投影之和,我們就可以写下等式

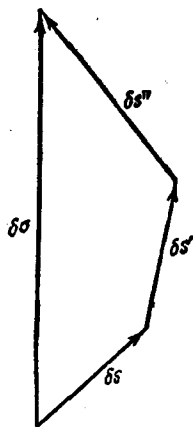


圖 291.

① 原著作者称之为“对应于位移之力之矩”,我們把“力之矩”改譯成較通用的“虚功”,下同——譯者。

$$R \cos(\widehat{R, \delta s}) = P \cos(\widehat{P, \delta s}) + P_1 \cos(\widehat{P_1, \delta s}) + \dots$$

由此,將整个等式乘上 δs , 得:

$$R \cos(\widehat{R, \delta s}) \delta s = P \cos(\widehat{P, \delta s}) \cdot \delta s + P_1 \cos(\widehat{P_1, \delta s}) \cdot \delta s + \dots,$$

即为所需的証明。

[定理] 力对应于任一个由若干个位移几何相加所得的位移的虚功, 等于力对应于所有各被加的位移的虚功之和。 設 P 为力, $\delta\sigma$ 为由虚位移 $\delta s, \delta s', \dots$ 所合成的位移(圖 291)。將 $\delta\sigma, \delta s, \delta s', \dots$ 投影在力 P 的方向上, 并且注意到, $\delta\sigma$ 的投影是 $\delta s, \delta s', \dots$ 的投影之和, 我們有:

$$\delta\sigma \cdot \cos(\widehat{P, \delta\sigma}) = \delta s \cdot \cos(\widehat{P, \delta s}) + \delta s' \cdot \cos(\widehat{P, \delta s'}) + \dots$$

把整个等式乘上 P , 得:

$$P \cos(\widehat{P, \delta\sigma}) \cdot \delta\sigma = P \cos(\widehat{P, \delta s}) \cdot \delta s + P \cos(\widehat{P, \delta s'}) \cdot \delta s' + \dots,$$

这就是所要証明的

[定理] 如以 $\delta x, \delta y, \delta z$ 記 δs 在各坐标軸上的投影, 以 X, Y, Z 記力 P 沿各坐标軸向的分力, 則力 P 的虚功可用下面这公式表示:

$$P \cos(\widehat{P, \delta s}) \cdot \delta s = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z.$$

写出 P 与 δs 两个方向之間夾角余弦的公式:

$$\cos(\widehat{P, \delta s}) = \frac{X}{P} \frac{\delta x}{\delta s} + \frac{Y}{P} \frac{\delta y}{\delta s} + \frac{Z}{P} \frac{\delta z}{\delta s}.$$

將整个等式乘上 $P \delta s$, 即得所求的:

$$P \cos(\widehat{P, \delta s}) \cdot \delta s = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z.$$

[拉格朗日定理] 一个質点成平衡的必要与充分条件是: 对应于每一个虚位移, 合力的虚功等于零或小于零。

一个点成平衡的充分与必要条件是: 力与虚位移的方向互成直角或鈍角; 在平衡时, 力不可能和虚位移方向成銳角。

我們先說明这条件的充分性, 即: 如果这条件存在, 則質点成平衡。設力与所有的各个虚位移都成鈍角或直角; 我們来証明, 在这种情形下

不会有运动。假设(圖292)質点竟产生运动,进行虛位移之一 δs ,与力 P 成鈍角或直角。如若我們对这点另加新約束,使得它只能沿方向与所設位移 δs 一致的 AB 綫發生位移,那么,我們并不改变这个运动。但是,

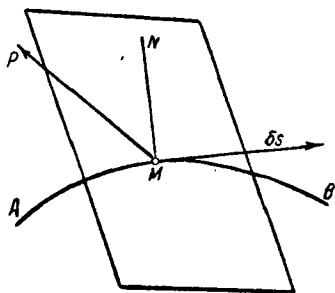


圖 292.

是,如果我們有一点可以在綫上位移,那么綫的全部效果即归結为一个力 N ,位在与綫垂直的平面內。加上了这个力 N ,我們就可以把所考虑的点 M 看作是自由的了。但是不管我們怎样加上力 N ,我們总不能把它和 P 相加得出一个沿 δs 方向的合力。因此,不可能假设虛位移中的任一个可以發生,就是說,点应该成平衡。

其次来証明这条件的必要性,即:在平衡时,力必定与所有的各个虛位移成鈍角或直角。这里我們也用反証法,就是說,我們要証明,如果力与虛位移中的任一个成銳角,那么就不能平衡。

先假设成平衡,而力 P 与虛位移中的某一个成銳角。如若我們另

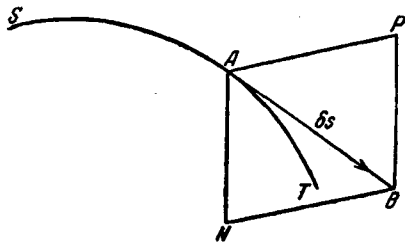


圖 293.

加新約束,平衡是不会被破坏的。假设这新約束是質点只能沿着綫 AB 發生位移的这个条件(圖293)。把綫的力学效果代之以一个法綫力 N ,我們可以这样来选择綫 AB ,使得力 N 和 P 的合力沿着 δs 的方向;于是質点將产生运动而不会成平衡。由此可見,在平衡

时 P 不能与 δs 成銳角,而只能成鈍角或直角。

因此,平衡的必要与充分条件就是:

$$\cos(P, \delta s) \leq 0,$$

或者,如將不等式乘以 $P\delta s$,

$$P\delta s \cos(\widehat{P, \delta s}) \leq 0,$$

因为 P 和 δs 都是大于零的正量。最末这个方程就是拉格朗日定理的数学表达式。

下面来应用拉格朗日定理解答几个问题,这些问题分成两类:第一类是关于只有非解脱位移的质点的问题,第二类是关于既可以有非解脱位移也可以有解脱位移的质点的问题。

第一组问题 写出平衡条件:

$$P \cos(\widehat{P, \delta s}) \delta s \leq 0.$$

如果质点有非解脱位移,那么,如上所指出,这些位移是双向的,就是说,对应于每一个虚位移 δs 必有同样的但沿相反方向的虚位移 δs_1 。如果是这样,那么就不可能有不等式

$$P \cos(\widehat{P, \delta s}) \delta s < 0.$$

事实上(圖 294),有一个与力 P 成钝角的位移 δs ,就应该同时有一个恰恰相反的位移 δs_1 (由于非解脱位移的双向性), δs_1 与力 P 成锐角,因而

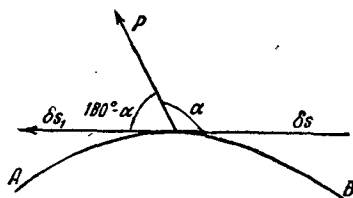


圖 294.

$$P \cos(\widehat{P, \delta s_1}) \delta s_1 > 0,$$

这在平衡时是不可能的。所以在平衡的时候对所有各个虚位移有

$$P \cos(\widehat{P, \delta s}) \delta s = 0, \quad (4)$$

这就是说,如果位移是双向的,那么力就和所有的各个虚位移成直角。以 X, Y, Z 记力 P 沿坐标轴的分量,以 $\delta x, \delta y, \delta z$ 记虚位移的分量,我们就可以把方程(4)写为:

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0. \quad (5)$$

第一个问题 求自由质点的平衡。如果质点是自由的,那么对它

來說任何位移都是可能的;因此,我們可以分別給 $\delta x, \delta y, \delta z$ 以完全任意的無限小數值。假定点沿着与軸 Ox 相平行的方向位移; 于是 $\delta x \neq 0, \delta y = 0, \delta z = 0$ 。对这样數值的 $\delta x, \delta y, \delta z$ 來說,要滿足表达平衡条件的方程(5),必須 $X = 0$; 同样可以証明 $Y = 0, Z = 0$ 。由此可見,如果質点是自由的,那么要成平衡,必須有

$$P = 0.$$

第二個問題 質点位在一曲面上,不能离开該曲面。求平衡位置。
設

$$f(x, y, z) = 0$$

为質点所在的曲面方程,在这种情形下,虛位移 $\delta x, \delta y, \delta z$ 不能看作是任意的。我們試看这三个量受到怎樣的限制。設質点由位置 (x, y, z) 移至位置 $(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)$; 因为質点不能离开曲面,所以它的坐标應該滿足曲面方程,即

$$f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = 0.$$

把函数 f 展开成台勞級数:

$$\begin{aligned} f(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) = & f(x, y, z) + \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \delta y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \delta z^2 \right) + \dots \end{aligned}$$

仅取一阶微量为止,并注意 $f(x, y, z) = 0$, 我們得到:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0. \quad (6)$$

所得方程(6)亦即量 $\delta x, \delta y, \delta z$ (虛位移在坐标軸上的投影)所受到的限制条件。

这三个量中的两个可以給以任意的值,而第三个就已經是完全确定的量了。現在来看拉格朗日条件,用方程

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0 \quad (7)$$

来表示它。因为 δz 是依賴于 δx 和 δy 的量,所以我們借助于方程(6)

把它消去。为此,我們利用未定乘数法。把方程(6)乘以 λ 并把它与拉格朗日条件相加;得

$$\left(X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y + \left(Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z = 0. \quad (8)$$

选取 λ 值使末一項变为零;为此应该讓

$$Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

于是方程(8)成为:

$$\left(X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y = 0.$$

因为在这方程里 $\delta x, \delta y$ 是完全任意的量,所以我們讓

$$\delta x \neq 0, \delta y = 0;$$

于是拉格朗日条件就剩下:

$$\left(X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x = 0.$$

又因 $\delta x \neq 0$,所以必須有:

$$X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

同样,我們可以証明

$$Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

所得到的三个方程

$$X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

是平衡方程,再添上曲面方程

$$f(x, y, z) = 0,$$

我們就可以求得平衡位置的坐标 x, y, z 和未定乘数 λ 。

如果我們把以上的各个方程跟一点在曲面上的平衡方程

$$X + \frac{N}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad Y + \frac{N}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad Z + \frac{N}{\Delta} \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$