

高速碰撞动力学

马晓青 韩峰 编著

国防工业出版社

高 速 碰 撞 动 力 学

马晓青 韩 峰 编著

国防工业出版社

· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

高速碰撞动力学/马晓青,韩峰编著. —北京:国防工业出版社,1998.5

ISBN 7-118-01821-X

I. 高… I. ①马… ②韩… III. 高速碰撞-动力学
IV. 0313.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 19103 号

2203/08

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

北京怀柔新华印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 10 $\frac{3}{4}$ 272 千字

1998 年 5 月第 1 版 1998 年 5 月北京第 1 次印刷

印数:1—1500 册 定价:18.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

致 读 者

本书由国防科技图书出版基金资助出版。

国防科技图书出版工作是国防科技事业的一个重要方面。优秀的国防科技图书既是国防科技成果的一部分,又是国防科技水平的重要标志。为了促进国防科技事业的发展,加强社会主义物质文明和精神文明建设,培养优秀科技人才,确保国防科技优秀图书的出版,国防科工委于 1988 年初决定每年拨出专款,设立国防科技图书出版基金,成立评审委员会,扶持、审定出版国防科技优秀图书。

国防科技图书出版基金资助的对象是:

1. 学术水平高,内容有创见,在学科上居领先地位的基础科学理论图书;在工程技术理论方面有突破的应用科学专著。

2. 学术思想新颖,内容具体、实用,对国防科技发展具有较大推动作用的专著;密切结合科技现代化和国防现代化需要的高新技术内容的专著。

3. 有重要发展前景和有重大开拓使用价值,密切结合科技现代化和国防现代化需要的新工艺、新材料内容的科技图书。

4. 填补目前我国科技领域空白的薄弱学科和边缘学科的科技图书。

5. 特别有价值的科技论文集、译著等。

国防科技图书出版基金评审委员会在国防科工委的领导下开展工作,负责掌握出版基金的使用方向,评审受理的图书选题,决定资助的图书选题和资助金额,以及决定中断或取消资助等。经评审给予资助的图书,由国防工业出版社列选出版。

国防科技事业已经取得了举世瞩目的成就。国防科技图书承

担着记载和弘扬这些成就,积累和传播科技知识的使命。在改革开放的新形势下,国防科工委率先设立出版基金,扶持出版科技图书,这是一项具有深远意义的创举。此举势必促使国防科技图书的出版随着国防科技事业的发展更加兴旺。

设立出版基金是一件新生事物,是对出版工作的一项改革。因而,评审工作需要不断地摸索、认真地总结和及时地改进,这样,才能使有限的基金发挥出巨大的效能。评审工作更需要国防科技工业战线广大科技工作者、专家、教授,以及社会各界朋友的热情支持。

让我们携起手来,为祖国昌盛、科技腾飞、出版繁荣而共同奋斗!

国防科技图书出版基金
评审委员会

国防科技图书出版基金 第二届评审委员会组成人员

名誉主任委员	怀国模		
主任委员	黄 宁		
副主任委员	殷鹤龄	高景德	陈芳允
	曾 铎		
秘 书 长	刘琯德		
委 员	尤子平	朱森元	朵英贤
(按姓氏笔划为序)	刘 仁	何庆芝	何国伟
	何新贵	宋家树	张汝果
	范学虹	胡万忱	柯有安
	侯 迁	侯正明	莫梧生
	崔尔杰		

前 言

随着工农业生产、国防建设和科学技术的发展,碰撞与高速碰撞的应用越来越广泛,诸如冲压加工、工程结构抗冲击设计、机动车辆碰撞安全、弹体或破片对装甲等侵彻与贯穿、液滴或固体颗粒对表面冲蚀、陨石对宇宙飞船撞击与飞行器防护,爆炸形成与爆炸焊接等等,因而世界各国都很重视这方面的研究。

“高速”二字在这里具有相对意义,不同的研究领域有不同的量的概念。例如,在结构动力学中,一般撞击速度小于 250m/s 。通常,将引起弹性变形的碰撞称为低速碰撞,而把引起永久变形的碰撞称为高速碰撞。在弹丸贯穿装甲中,撞击速度在 $25\text{m/s} \sim 500\text{m/s}$,称为低速或亚弹速范围;撞击速度在 $1300\text{m/s} \sim 3000\text{m/s}$,称为高弹速范围等等。

本书第一章讲述了应力波的基本知识,第二、三章介绍了材料的动态性能与动态断裂,第四章讲述了杆和梁的撞击动态响应与断裂。第五章讲板的撞击动态响应与破裂,第六章讲圆管壳的撞击动态响应与断裂,第七章是关于薄板、中厚板与厚板弹道贯穿的基本理论,第八章介绍了超高速碰撞基本理论与宇航飞行器的防护设计等。

本书在阐述高速碰撞动力学方面的基本理论的同时,还介绍了有关这一领域的新进展,包括作者本人的一些近期的研究成果。由于作者水平所限,错误与不当之处在所难免,恳请读者批评指正。

作 者

1996 年 12 月于北京

目 录

第一章 固体中的应力波	1
§ 1-1 无限介质中的无旋波与等容波	1
§ 1-2 平面波——纵波与横波	5
§ 1-3 球面波与柱面波	9
§ 1-4 介质的非均匀性与各向异性对弹性波传播的 影响	12
§ 1-5 非线性弹性波与塑性波	15
§ 1-6 冲击波	23
第二章 材料动态性能测试与应变率效应	33
§ 2-1 膨胀环测试技术	33
§ 2-2 霍布金生杆测试技术	40
§ 2-3 泰勒圆柱测试技术	49
§ 2-4 非金属材料的应变率响应	56
§ 2-5 金属材料的应变率响应	67
第三章 材料动态断裂	79
§ 3-1 延性断裂与脆性断裂	80
§ 3-2 断裂动力学	84
§ 3-3 应力波引起的断裂	90
第四章 杆撞击动态响应与断裂	111
§ 4-1 梁的横向撞击实验	111
§ 4-2 梁的失效模式	123
§ 4-3 短杆低速撞击动态响应	129
§ 4-4 短杆高速撞击动态响应	135
§ 4-5 长杆撞击动态响应	148

第五章 板的撞击动态响应与破裂	156
§ 5-1 薄板的应力、应变与弯曲	156
§ 5-2 薄板的载荷、弯矩与塑性功	157
§ 5-3 薄板对动力载荷的响应	161
§ 5-4 薄板对脉冲载荷的响应	168
§ 5-5 楔形锤对板的侧面撞击响应	173
第六章 圆管撞击动态响应与断裂	181
§ 6-1 圆环中的塑性铰	181
§ 6-2 横向挤压管的准静态响应	184
§ 6-3 薄壁金属管轴向撞击响应	203
§ 6-4 复合材料管压垮响应	211
第七章 高速碰撞	223
§ 7-1 碰撞体的物理现象	224
§ 7-2 撞击速度、靶板厚度对靶板动态响应的影响	228
§ 7-3 薄板撞击动态响应与穿孔	232
§ 7-4 薄板穿孔分析模型	240
§ 7-5 薄圆筒壳撞击动态响应与穿孔	244
§ 7-6 中厚板撞击穿孔的塑性力学理论	254
§ 7-7 厚板侵彻的流体力学理论	262
第八章 超高速碰撞	270
§ 8-1 超高速碰撞现象	270
§ 8-2 超高速侵彻理论	277
§ 8-3 超高速粒子屏蔽的简单设计模型	285
§ 8-4 材料对超高速碰撞载荷的响应	300
§ 8-5 超高速粒子加速器	310
§ 8-6 高速、超高速碰撞模拟技术	313
参考文献	318

第一章 固体中的应力波

应力波的传播与介质的性质密切相关。下面首先讨论各向同性的、均匀的、完全弹性的介质中的应力波,然后讨论不均匀、各向异性和非完全弹性等因素对应力波传播的影响,以及应力超出材料的弹性范围进入塑性阶段后应力波的传播的塑性波与冲击波。

§ 1-1 无限介质中的无旋波与等容波

1. 运动微分方程

在无限弹性体中,忽略体力时运动微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial Z} \\ \rho_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial Z} \\ \rho_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial Y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial Z} \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

因为运动方程中含有位移分量,只能按位移来求解,而与位移相联系的是应变。广义虎克定律表示了应力应变关系,即

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \mu(\sigma_{zz} + \sigma_{xx})] \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] \end{aligned} \right\} \quad (1-2)$$

将(1-2)式的左边与右边分别相加得到

$$\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

令

$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}, \quad \Delta = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$$

即

$$e = \frac{1 - 2\mu}{E} \Delta \quad (1-3)$$

将应力分量用应变分量表示, (1-2)式的第一式可以写成

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_{xx} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})] \\ &= \frac{1}{E} [(1 + \mu)\sigma_{xx} - \mu\Delta] \end{aligned}$$

由上面方程求解 σ_{xx} 得

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{1 + \mu} (E\varepsilon_{xx} + \mu\Delta)$$

将(1-3)式代入上式得到用应变分量表示的应力分量, Y 与 Z 方向依次类推, 于是有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{E}{1 + \mu} \left(\frac{\mu}{1 - 2\mu} e + \varepsilon_{xx} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{1 + \mu} \left(\frac{\mu}{1 - 2\mu} e + \varepsilon_{yy} \right) \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{1 + \mu} \left(\frac{\mu}{1 - 2\mu} e + \varepsilon_{zz} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-4)$$

另外再将几何方程

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial X}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial Y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial Z} \quad (1-5)$$

代入(1-4)式便得到用位移表示的运动微分方程

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \frac{E}{2(1 + \mu)} \left(\frac{1}{1 - 2\mu} \frac{\partial e}{\partial X} + \nabla^2 U \right) \\ \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \frac{E}{2(1 + \mu)} \left(\frac{1}{1 - 2\mu} \frac{\partial e}{\partial Y} + \nabla^2 V \right) \\ \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \frac{E}{2(1 + \mu)} \left(\frac{1}{1 - 2\mu} \frac{\partial e}{\partial Z} + \nabla^2 W \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

(1-6)式便是求解动力学问题的基本微分方程, E , μ 和 ρ 都是已知的常数。位移分量 U , V 和 W 是 X , Y 和 Z 的未知函数。根据初始条

件与边界条件,由上面方程解出位移分量后,再结合几何方程与(1-4)式便可解出应力分量。

2. 无旋波与等容波

下面推导无旋波、等容波的波动方程与波速。假定弹性体中发生的位移 U, V, W 可以表示成

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial X}, V = \frac{\partial \varphi}{\partial Y}, W = \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \quad (a)$$

其中 $\varphi = \varphi(X, Y, Z)$ 是位移的势函数,这种位移称为无旋位移。为了说明无旋的意义,试考察下面的表达式

$$W_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial Z} \right) \quad (b)$$

式中 $\frac{\partial W}{\partial Y}$ 与 $\frac{\partial V}{\partial Z}$ 分别表示 Y, Z 方向的线段绕 X 轴的旋转角,同样有

$$W_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial Z} - \frac{\partial W}{\partial X} \right), W_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \quad (c)$$

(c)式表示弹性体在一点绕 Y 轴及 Z 轴的旋转量。若将(a)式分别代入(b)式和(c)式,可得旋转量 W_x ,而 W_y 和 W_z 均等于零。因此,(a)式所表示的位移是无旋位移。

此外,应变可以用位移函数表示成

$$\begin{aligned} e &= e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \\ &= \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial X^2} + \frac{\partial}{\partial Y^2} + \frac{\partial}{\partial Z^2} \right) \varphi = \nabla^2 \varphi \end{aligned} \quad (d)$$

以及

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial X} &= \frac{\partial}{\partial X} (\nabla^2 \varphi) = \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} \right) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial X} \\ &= \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial X} = \nabla^2 U \end{aligned} \quad (e)$$

将(d)、(e)两式代入(1-5)式的第一式,得

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \nabla^2 U + \nabla^2 U \right)$$

即

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{2(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \nabla^2 U = C_1 \nabla^2 U$$

同样,可得到 Y 与 Z 方向的类似结果,即无旋波的波动方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= C_1^2 \nabla^2 U \\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= C_1^2 \nabla^2 V \\ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= C_1^2 \nabla^2 W \end{aligned} \right\} \quad (1-7)$$

式中

$$C_1 = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)\rho_0}} = \sqrt{\frac{\lambda+2G}{\rho_0}} \quad (1-8)$$

(1-8)式所表示的就是无限弹性体中无旋波的传播速度。

此外,假定弹性体中发生的位移 U, V, W 满足体积应变等于零的条件,即

$$e = \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \quad (f)$$

这种位移称之为等容位移。因为弹性体中任一部分的容积保持不变,所以这种弹性波称为等容波。将(f)式代入运动微分方程(1-6),得等容波的波动方程

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\mu)\rho_0} \partial^2 U = C_2^2 \nabla^2 U \quad (1-9)$$

式中

$$C_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)\rho_0}} = \sqrt{\frac{G}{\rho_0}} \quad (1-10)$$

同样,可推导出 Y, Z 方向波动方程的表达式,最后得等容波的波动方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= C_2^2 \nabla^2 U \\ \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= C_2^2 \nabla^2 V \\ \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= C_2^2 \nabla^2 W \end{aligned} \right\} \quad (1-11)$$

无旋波和等容波是弹性波的两种基本形式。波动方程(1-6)和方程(1-9)是两个独立的方程,表明在无限弹性体中存在着两种独立的扰动形式,即两种相互独立的弹性波。它们的传播速度不同,即无旋波以 $C_1 = [(\lambda + 2G)/\rho_0]^{1/2}$ 的速度传播,而等容波以 $C_2 = (G/\rho_0)^{1/2}$ 的速度传播。

§ 1-2 平面波——纵波与横波

在无限弹性体中,远离扰动源处的弹性波可以当作平面波。在空中核爆炸时,冲击波传到半无限大的地表面,因而向土壤中入射的冲击波也可以看作平面波。若波后介质质点的运动方向平行于波的传播方向,这种平面波称为纵向平面波,简称纵波;若波后介质质点的运动方向垂直于波的传播方向,这种平面波称为横向平面波,简称横波。

1. 纵波

将 X 轴取在平面波的传播方向,弹性波的位移分量为

$$U = U(X, t), V = W = 0$$

代入前面 § 1-1 的(f)式得

$$e = \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{\partial U}{\partial Z}$$

而

$$\frac{\partial e}{\partial X} = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}, \frac{\partial e}{\partial Y} = \frac{\partial e}{\partial Z} = 0$$

将位移代入 § 1-1 的(d)式得

$$\nabla^2 U = \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) U = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}, \nabla^2 V = \nabla^2 W = 0$$

将 $\partial e / \partial X$ 与 $\nabla^2 U$ 代入运动微分方程(1-6), 得到平面纵波的波动方程, 即

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)\rho_0} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}$$

若

$$C_1 = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)\rho_0}} = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho_0}}$$

则

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = C_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \quad (1-12)$$

波动方程(1-12)的通解是

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 \\ &= f_1(X - C_1 t) + f_2(X + C_2 t) \end{aligned}$$

式中, f_1 和 f_2 为任意函数。通解中的第一项表示平面波以 C_1 的速度向着 X 轴增加的方向传播, 第二项表示另一个平面波以 C_2 的速度沿着 X 轴减小的方向传播。下面考察通解的第一项

$$U_1 = f_1(X - C_1 t) \quad (a)$$

对于任一个瞬时 t , 位移 U_1 只是 X 的函数, 如图 1-1 中的 MNP 所

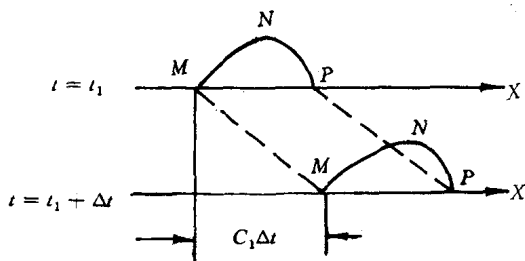


图 1-1 右传平面纵波

示。经过 Δt 时间以后, 波形没有改变, 只是沿着 X 轴移动了一个距离 $C_1 \Delta t$, 利用几何方程(1-5)可求出与位移(a)相对应的变形分量, 得到 X 方向的正应变为

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial U_1}{\partial X} = \frac{df_1(X - C_1 t)}{d(X - C_1 t)} \cdot \frac{\partial(X - C_1 t)}{\partial X}$$

$$= \frac{df_1(\xi)}{d\xi} \quad (b)$$

$$\varepsilon_{YY} = \varepsilon_{ZZ} = 0$$

式中 $\xi = X - C_1 t$ 。这表明,介质的每一点都处在 X 方向的简单拉压状态。由物理方程(1-4)可以得到与位移(a)对应的正应力

$$\begin{aligned} \sigma_{XX} &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} e + \varepsilon_{XX} \right) = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \varepsilon_{XX} \\ &= \rho_0 C_1^2 \varepsilon_{XX} \end{aligned} \quad (c)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{YY} = \sigma_{ZZ} &= \frac{E}{1+\mu} \left(\frac{\mu}{1-2\mu} e + \varepsilon_{YY} \right) = \frac{\mu}{1-\mu} \rho_0 C_1^2 \varepsilon_{XX} \\ &= \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_{XX} \end{aligned}$$

与位移(a)式相对应,波后质点沿着 X 方向的速度分量

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{df_1(X - C_1 t)}{d(X - C_1 t)} \cdot \frac{\partial(X - C_1 t)}{\partial t} \\ &= C_1 \frac{df_1(\xi)}{d\xi} \end{aligned} \quad (d)$$

将(b)式代入(d)式得到波后质点速度表达式

$$v_1 = C_1 \varepsilon_{XX} \quad (1-13)$$

将(1-13)式代入(c)式得

$$\sigma_{XX} = \rho_0 C_1 v_1 \quad (1-14)$$

2. 横波

横波在传播过程中,介质有微小的转动,如果在半无限介质的边界上施加均布剪应力 σ_{XY} ,在靠近边界的薄层内将产生剪切变形,剪切扰动以平面波的形式沿着边界的内法线传向介质的深处。我们仍然将 X 轴放在波的传播方向即边界的内法线方向, Y 轴放在波后质点的位移方向即横向。取微体 AdX 如图 1-2 所示。于是波后质点位移为

$$U = 0, V = V(X, t), W = 0$$

推导波动方程的方法与纵波情况类似,即

$$e = \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{\partial W}{\partial Z} = 0, \nabla^2 U = \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} \right) U = 0$$

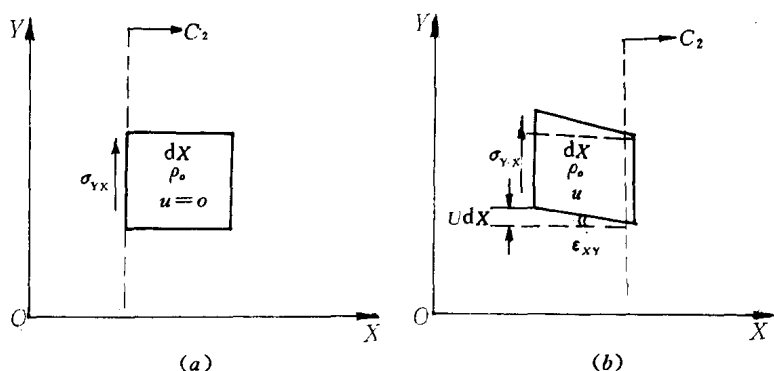


图 1-2 平面剪切波后微体的运动

(a) t 时刻; (b) $t+dt$ 时刻。

$$\nabla^2 W = 0, \nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2}$$

将以上关系式代入运动方程(1-6)得到平面横波的波动方程

$$\rho_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+\mu)} \left(\frac{1}{1-2\mu} \nabla^2 e + \nabla^2 V \right)$$

即

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = C_2^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \quad (1-15)$$

式中 C_2 如(1-10)式所示,即

$$C_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)\rho_0}}$$

波动方程(1-13)的通解

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 \\ &= f_1(X - C_2 t) + f_2(X + C_2 t) \end{aligned}$$

式中, f_1 和 f_2 是任意函数。我们仍然考虑通解的第一项,即

$$V_1 = f_1(X - C_2 t) \quad (e)$$

(e)式表明,横向平面波在 X 方向传播,而波后质点位移在垂直于 X 轴的方向,波后的传播速度 C_2 是常数。

对于剪切变形,由几何方程可得与(b)式相应的剪应变