结构分析中的有限元素法

诸德超　王寿梅　编

国防工业出版社

内容简介

本书介绍结构分析中基于最小位能原理的有限元素法，包括其在杆系结构、弹性力学平面问题、空间问题、弹性厚板和薄板、实际结构以及线弹性稳定性等方面的应用。除阐述基本概念和基本原理外，着重介绍位移函数的选取和构成方法，使用电子计算机解题相关的问题，并给出一些数值示例和计算结果。

本书可供从事航空和宇航、土木、机械、造船等方面结构分析的技术人员参考，也可用作有关专业研究生和大学生的教学用书或参考书。

结构分析中的有限元素法

诸德超　王寿梅　编

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

$850\times1168^{1}/_{32}$　印张 $11^{3}/_{8}$　288千字

1981年8月第一版　1981年8月第一次印刷　印数：0,001—5,300册

统一书号：15034·2222　　定价：1.40元

前　言

有限元素法的思想萌芽，可以追溯到十八世纪的欧拉。但是，它的迅猛发展，却只是在电子计算机问世以后，近二十多年来的事。今天，在科技工程界的各个领域内，有限元素法已得到了广泛重视和普遍应用。每年发表的论文，要以万来计数。各种领域内的通用或专用计算程序，也如雨后春笋，应运而生。为了适应这种情况，七十年代以来，国内很多院校纷纷开设“有限元素法”这门课程。我们则在编写航空院校结构力学专业所用有限元素法教材的基础上，加以适当扩充，草成本书。

有限元素法的内容十分丰富，不可能在一本不大的书中全面涉及。鉴于在结构分析中，以最小位能原理为基础的有限元素法发展最为成熟，应用最为普遍。因此，本书围绕最小位能原理，系统地介绍有限元素法的基本概念、基本原理和基本方法，着重讨论位移函数的选择及其构成方法，还顺便提到与使用电子计算机解题相关的一些问题。至于收敛性等问题，只叙述一些主要结论，不作详细的论证。

本书要求读者具备结构力学、矩阵运算和初等变分法等方面的知识。在编写本书时力图做到深入浅出、循序渐进，推导力求简洁，尽量少用专门知识。例如，先讲杆系结构，后讲连续系统。先用力学概念比较明确的直观方法，然后转向比较抽象的能量方法。又如，为使初学者加深理解位移协调的必要性，本书给出了分块情况下最小位能原理的推导过程。

本书的内容大致如下：

第一章讲述桁架、连续梁及刚架等的有限元素法，着重介绍

总体分析阶段中的理论和问题，例如总体刚度矩阵的形成及性质、各种坐标变换的原理和公式，边界条件的不同处理方法等等。另外，还用假设位移函数导出了剪切梁元素的刚度矩阵。

第二章通过平面问题介绍连续体离散化的原理、步骤和公式，并对现有的多种元素族作了系统的介绍。另外，还讨论了协调性和收敛性的关系以及如何正确构造元素的形状函数。

第三章讲述空间问题的有限元素法，并介绍几种常用的元素族。

第四章讨论轴对称体的分析方法，其中包括有非轴对称载荷情况下的分析方法和公式。

第五章介绍分析实际结构时碰到的问题和处理方法。如分析大型结构时常用的子结构法和波前法，分析复杂结构时常遇到的广义约束和几何可变性的处理方法，以及某些特殊元素等等。

第六章讲述弹性厚板和薄板的有限元素法。系统地介绍了以最小位能原理为基础的各种现有的薄板协调元素和非协调元素，其中着重讨论了协调元素的构成法，还简单地提到检验非协调元素用的拼片试验以及收敛速率等问题。

第七章从能量原理出发，利用雷莱商计算梁和板的临界屈曲载荷以及相应的有限元素法。

本书内容，一部份取自国内外有关文献和专著，一部份系编者在工作和教学中得到的体会。书稿主要写于 1977 到 1978 年，第一章到第五章由王寿梅编写，第六章和第七章由诸德超编写。初稿完成后，承西北工业大学叶天祺、葛守廉，最后又经曹大卫同志仔细审阅，他们提出了不少宝贵意见，谨在此表示深切的谢意。但毕竟限于作者的水平和精力，书中难免有许多缺点乃至错误，内容也不够完备，敬希读者批评指正。

如用本书为教学用书，则标题上带有 * 者，不宜作为大学生的阅读内容。

编　者

目　录

绪 论

§0-1 什么是有限元素法

有限元素法(亦称有限元法或有限单元法等)的基本思想，可以从两个不同的角度去理解，但其实质却是一样的。

一种是朴素的、实质上是工程的推想：把一个连续的弹性体（或是结构）简化为由若干个离散的元素组合而成的等效组合体。例如，用许多杆件、梁段、受纯剪切的平板、受纯扭转的盒段等“元素”来近似地代替一个真实的弹性体，然后加以分析。图0-1就表示这样的实际例子。这种作法的好处是显而易见的。因为上

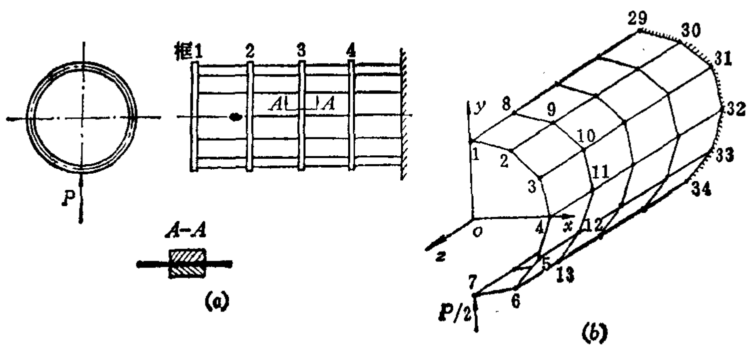

图0-1 计算模型

面提到的那些元素是一般工程人员都很熟悉的标准构件，其力学性质简单明了，并且只要用有限个参数（例如元素端点的轴力、弯矩、位移、转角……）即可加以描述。而整个结构又是由有限个数目的元素组合而成的，当然也可以用有限个参数来加以描述。所以，它的基本方程式将是一个代数方程组，在数学上属于离散体系。即用代数方程组来取代描述真实弹性体的微分方程组，在

求解时当然极为有利。因为，我们知道，在满足一定边界条件的前提下求解微分方程组的问题，要比求解代数方程组的问题困难得多。

另一方面，从数学的角度来看，有限元素法是求解数学物理方程的一种数值方法。它是各种经典数值方法如雷莱(Rayleigh)-里茨(Ritz)法、迦辽金(Галеркин)法、最小二乘法等等的新形式。有限元素法同上述各种经典方法的基本差别在于对"测试函数"的选取方式不同。在经典方法中，我们应当在所研究的整个域❶上选取统一的测试函数，并要求该函数在域内部和域的边界上均满足一定的条件(譬如位移协调或应力平衡)。在有限元素法中，测试函数要"分片地"选取。这就是说：首先把整个域划分成若干"子域"(即元素)，然后分别在子域上选取测试函数，并要求这些测试函数在各个子域内部、在子域之间的分界面上(称为内部边界)以及子域与外界的分界面上(称为外部边界)均满足一定的条件(譬如位移协调或应力平衡)。以后我们将会看到，有限元素法与经典数值方法之间的这种差别具有十分重大的意义，它使有限元素法的实用价值远远超过了经典方法。当然，有限元素法与经典数值方法均能把一个连续系统的偏微分方程组"离散化"为等效的代数方程组，就这一点说来，它们的性质是相同的；它又与前边提到的那种工程上的想法相一致。

电子计算机技术对有限元素法的发展有着决定性的影响。有限元素法要求具体解算大规模的联立代数方程，未知数的个数高达几万甚至几十万，没有高速度、大容量的计算机运算是很难想像的。因此，有限元素法又可以称为"电子计算机化的"分析方法。虽然，有限元素法的基本思想早在四十年代初期就由力学工作者[1,2]和数学工作者[3]分别提出来了❷，但是直到五十年代中

---

❶ "域"是数学上的说法；在物理上，就是指弹性体或结构所占据的空间，即为位移、应力等各种变量的定义域。

❷ 从历史上看，在十八世纪，欧拉就曾经使用与现代有限元素法相同的方法计算过杆在轴力作用下的平衡问题。

期，由于电子计算机的发展，提供了可靠的计算工具，才开始大量应用和迅猛发展。

有限元素法的实际成形和发展主要是由从事结构分析的工程人员完成的，特别在六十年代是如此。数学工作者在稍晚的时候才重新注意到这个研究方向，并进行了较多的研究，从而为有限元素法奠定了比较坚实的理论基础[4]。我们这本书，目的是训练工程人员具体应用有限元素法解决实际问题的，因此将着重从工程方面作介绍。而在涉及到数学方面基础理论的时候，将只作一些简明的论证，或者不作论证而直接引用其某些结论。

§0-2 有限元素法的内容

有限元素法只不过是求解数学物理方程的一种数值方法，所以它适用的学科和领域是十分广泛的。事实上，不论是固体力学、流体力学，还是电磁学、传热学等等都可以使用有限元素法。单就固体力学的范畴而言，静力分析、动力分析或稳定性分析，不论它们是线性分析，还是非线性分析，有限元素法均能适用。我们这本书仅限于有限元素法在固体力学中的应用，而且重点在于介绍有限元素法在线弹性静力分析和稳定性问题中的应用。

前已谈到，有限元素法是经典数值方法的变种。不论是从雷莱-里茨法，还是从伽辽金法或最小二乘法等等，均可以导出有限元素法的计算公式。但是在结构分析方面，雷莱-里茨法一般是适用的，而且过去使用得颇为普遍而且成功。所以，以后我们将仅以这种方法作为讨论的理论基础。

用有限元素法分析结构的工作可分为两大部份。第一部份是“元素分析”，即探讨单个元素的力学特性；第二部份是“结构分析”，即用众多的元素集合成整个结构。在元素分析阶段，所选取的测试函数可以是描述一个处处连续的位移场，这称为“协调模型”；可以是描述一个处处平衡的应力场，这称为“平衡模型”；也可以在元素内部选取位移场（或应力场），而在元素边界上选取应

力场（或位移场），从而构成所谓“杂交模型”；也可以同时选取位移场和应力场作为测试函数而构成“混合模型”等。在结构分析阶段，最后得到的方程组中所含未知数的性质也会有三种不同的情形：全部未知数均是未知位移（广义位移）；或者均是未知应力（广义应力）；或者一部分未知数是未知位移，而另一部分则为未知应力。以上三种情况分别属于“位移法”、“力法”和“混合法”。本书将仅限于介绍协调模型的位移法，因为这种类型的有限元素法在过去的研究工作中，特别是在实际应用中，均占有优势。

§0-3 有限元素法在结构分析中的地位

有限元素法是用来分析各种结构问题的强有力的工具。在经典的固体力学理论工作中，尽管人们已经进行了几百年的努力，但所能解决的实际问题为数不多，特别是在非线性力学方面更少。然而有限元素法却能成功地解决各种各样的固体力学问题，如杆系、板与壳（包括薄板、厚板、筒壳、任意壳等）和二维与三维固体等的静、动、热强度以及稳定性、弹塑性、粘弹性问题和大变形问题等等。不论结构的几何形状和支持条件多么复杂，不论材料性质和外加载荷如何多变，使用有限元素法处理均可能获得满意的答案。有限元素法解决实际问题的能力远远地超过了经典方法，并且已经取得了光辉的成就，因而受到普遍重视。现在，掌握有限元素法的原理和应用，对于一个从事结构分析与构造设计的工程技术工作者来说，已经是必不可缺的了。

前面已经说过，我们将着重从应用的角度来讨论有限元素法，因而并不要求读者具备很多的预备知识。在数学方面，除微积分之外，读者应当了解线性代数和计算机程序设计的基本内容；在力学方面，读者应当具备弹性理论和变分法方面的基本知识。

参考文献

〔1〕 Hrenikoff, A., "Solutions of Problems in Elasticity by the Framework Method". J. Appl. Mech. **8**, 169~175, 1941.

〔2〕 McHenry, D., "A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems". J. Inst. Civ. Eng. 21, 59~82, 1943.

〔3〕 Courant, R., "Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration", Bull. Am. Math. Soc., **49**, 1~43, 1943.

〔4〕 Strang, G. and Fix, G., "An Analysis of the Finite Element Methods". Prentice-Hall, 1973.

第一章 杆件系统

§1-1 前 言

我们从杆系入手来介绍有限元素法，这是由于在传统上过去一直是把杆系结构当作离散体系来处理的。把分析杆系结构的思想方法推广到连续弹性体或其他组合结构上去，就形成了有限元素法。所以，在掌握连续体的有限元素法之前，先熟悉杆系结构的矩阵分析方法将是有益的。

前已提及，用有限元素法分析结构的工作，可以分成两大部分：元素分析和整体分析。元素分析就是研究单个元素的受力特性，整体分析就是研究整体系统方程组的组成原理和求解方法。对于杆系来说，元素的分析原理比较简单，实际上它们在材料力学中已经被仔细地研究过了。另外，整体分析方程组的建立也很直观，只要考虑结点的受力情况和平衡条件就行了。从这两点说来，我们在这一章内尚未真正涉及到“连续体的离散化”这一课题。但是就整个分析步骤来说，有限元素法同分析杆系的矩阵方法是一样的。

为了便于在下一章中过渡到连续体的有限元素法，本章不打算仅仅局限于简单地回顾分析杆系的矩阵位移法。我们将使用有限元素法中常用的术语、记号和表达方式。在建立杆件元素的力学特性公式时，也将尽量采取连续体中准备采用的步骤。另外，在第六节中将谈到高次形状函数，实际涉及到一维连续体的离散化问题。

§1-2 用矩阵位移法计算桁架

用位移法计算桁架时，取结点位移为基本未知数。这些结点

位移也常称为“自由度”。各杆的应力和内力虽属未知，但均可用结点位移来表示之（即写成结点位移的函数）。然后，利用结点平衡条件建立起求解结点位移的基本方程式。当解出结点位移之后，再利用上述的结点位移与杆件内力、应力的函数关系，即可算出各杆的内力和应力。下面通过例题说明这一分析过程。

图 1-1 表示一个平面桁架和它的参考坐标系。该桁架由六根等截面的杆元素组成。杆的两端是铰接点。载荷作用于结点上，所以轴力值沿杆 由保持不变，这样的杆元素称为“铰接杆元素”。

在使用电子计算机计算时，各结点、结点位移、元素等均应采用事先约定的顺序编号来加以标识和区分。故在计算开始时，即应将它们编号。此例题的编号约定如图 1-1 所示。①、②、③、……是结点号码。(1)、(2)、(3)、…… 是元素号码。1、2、3、……是结点位移及对应的结点力（或支反力）的号码。为了方便起见，后者应依结点的先后次序排列：对结点 1 是 U_1 和 U_2；对结点 2 是 U_3 和 U_4；对任一结点 i 是 U_{2i-1} 和 U_{2i}。这样可以在结点号码同结点位移之间建立简单的对应规律。

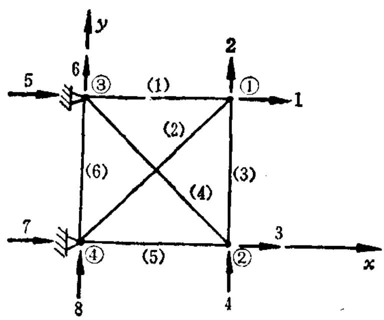

图1-1 平面桁架

设此桁架的已知原始数据于下：

结点数据（结点坐标）

结 点 号	x (cm)	y (cm)
1	50	50
2	50	0
3	0	50
4	0	0

元素数据

元素号	有关结点号	切面积(cm²)	材料弹性模量E(kg/cm²)
1	1-3	10	7×10^5
2	1-4	3.5355	7×10^5
3	1-2	10	7×10^5
4	2-3	3.5355	7×10^5
5	2-4	10	7×10^5
6	3-4	10	7×10^5

载荷数据

$$P_2=500\text{kg}$$

$$P_1=P_3=\cdots\cdots=0$$

(下标为对应的结点位移序号)

边界条件数据（支座情况）

$$U_5=U_6=U_7=U_8=0$$

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}=\lfloor U_1\ U_2\ U_3\ U_4\ U_5\ U_6\ U_7\ U_8\rfloor^T ●$$

以及各元素的应变、应力及结点对元素的作用力

$$\boldsymbol{S}^{(e)}=\lfloor S_1\ S_2\ S_3\ S_4\rfloor^T$$

其中，上标（e）表示元素号，$e=1$、2、3、…、6。S及其下标见后（参看图1-2)。

问题的描述就到此为止，下边开始叙述分析的方法、步骤和公式推导。

元素特性矩阵

前面已经说过，在位移法中的基本未知数取为结点位移，其基本方程组是用位移表示的平衡方程。为了写出这种方程组，首先应把元素的应力、内力及其同结点间的相互作用力（称做元素

● 列阵也常称向量，当写出它的全体元素或子阵时，记为{ ⋮ }或是⌊…⌋^{T}，后者表示一个行阵的转置，T是转置符号。另外，用〔⋮⋮⋮〕表示一般的矩阵。任何一种矩阵，当不写出它们的元素时，用黑体字来标志。

的结点力）等等写成用结点位移来表示的函数。

图 1-2 表示某一元素，其序号为 e。如前所述，为了便于在电子计算机上计算元素的特性，各结点、结点位移、结点力也应该用序号来加以命名和区分。我们采用的编号约定如图 1-2 所示。应该注意到，图中的号码是针对某个元素来说的，所以称做“局部序号”。而在图 1-1 中的号码是针对整个结构来说的，称做“整体序号”。今后同时使用这两种序号可能混淆不清，所以我们将把整体序号放在圆括号中以示区别●。

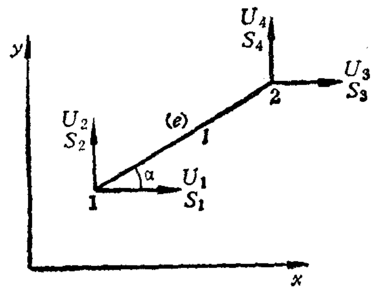

图1-2　杆元素

按局部序号排列的元素结点位移列阵和元素结点力列阵是

$$\boldsymbol{U} = \lfloor U_1\ U_2\ U_3\ U_4 \rfloor^T$$

$$\boldsymbol{S} = \lfloor S_1\ S_2\ S_3\ S_4 \rfloor^T$$

显然，对于某一确定的元素而言，局部序号与整体序号之间有着一一对应的关系。例如当 $e=4$ 时，由元素数据表可知第一端点（局部序号为 1 的结点）的整体序号为(2)，而局部序号为 2 的结点所对应的整体序号则是(3)。由此，进一步可以列出

$$\boldsymbol{U}^{(4)} = \lfloor U_1\ U_2\ U_3\ U_4 \rfloor^T = \lfloor U_{(3)}\ U_{(4)}\ U_{(5)}\ U_{(6)} \rfloor^T$$

根据我们的编号约定，一般说来，若某一元素的第一结点的整体序号为(i)，第二结点的整体序号为(j)，则必有

$$\boldsymbol{U} = \lfloor U_{(2i-1)}\ U_{(2i)}\ U_{(2j-1)}\ U_{(2j)} \rfloor^T \tag{1-1}$$

$$\boldsymbol{S} = \lfloor S_{(2i-1)}\ S_{(2i)}\ S_{(2j-1)}\ S_{(2j)} \rfloor^T \tag{1-2}$$

显然，元素的结点位移列阵 $\boldsymbol{U}$ 只不过是从整体的结点位移

● 这类问题在程序设计中非常要紧。由于同一个数据在不同的数组或是不同的程序段中可能各有不同的序号，这就一定要求程序员弄清楚这些序号的区别和对应换算关系式。

列阵 $\widetilde{U}$ 中抽出一部分所组成的，所以 U 也就是基本未知数。U 和 $\widetilde{U}$ 之间的关系式可用矩阵方程表示为

$$U^{(e)}=A^{(e)}\widetilde{U} \tag{1-3 a}$$

例如，当 $e=4$ 时

$$A=\begin{bmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \end{bmatrix}$$

一般地，当某元素的端部结点依次为(i)、(j)时

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} (1)&(2)&&&&(i)&&&(j)&&& \end{array}\\ \begin{bmatrix} 0&0&0&0&\cdots&1&0&\cdots&0&0&\cdots\\ 0&0&0&0&\cdots&0&1&\cdots&0&0&\cdots\\ 0&0&0&0&\cdots&0&0&\cdots&1&0&\cdots\\ 0&0&0&0&\cdots&0&0&\cdots&0&1&\cdots \end{bmatrix} \end{array} \tag{1-3 b}$$

上式矩阵中的“·”代表零元素●。

矩阵 A 有许多名称，例如布尔矩阵、指示矩阵、迁移矩阵、选择矩阵等等。往后讨论可以知道，在具体计算中该矩阵的用处不大，所以不再对它作详细讨论。

为了写出平衡方程，需要用 $\widetilde{U}$ 来表示S，这就应该计算杆的变形、应力和内力。设杆的长度为 l，对 x 轴的倾角为 α（参看图 1-2)，则由结点坐标数据可得

$$\begin{aligned} l&=[(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2]^{1/2}\\ \alpha&=\mathrm{tg}^{-1}[(y_j-y_i)/(x_j-x_i)] \end{aligned} \tag{1-4}$$

而杆的伸长为

$$\begin{aligned} \Delta l&=U_3\cos\alpha+U_4\sin\alpha-U_1\cos\alpha-U_2\sin\alpha\\ &=[-\cos\alpha\quad -\sin\alpha\quad \cos\alpha\quad \sin\alpha]U \end{aligned}$$

● “元素”这个词，有时候是指结构元素，有时候是指矩阵或行列式的元素（即一个表值），依上下文而定。