

武汉大学本科生系列教材



(第二版)

物理类专业用

姚端正 梁家宝 编著

# 数学物理方法

武汉大学出版社

# 数 学 物 理 方 法

(物理类专业用)

(第二版)

姚端正 梁家宝 编著

武 汉 大 学 出 版 社

## 图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/姚端正, 梁家宝编著. --2版. --武汉: 武汉大学出版社, 1997. 7  
ISBN 7-307-02428-4

- I 数…
- II ①姚… ②梁…
- III 数学物理方法—教材
- IV O411.1

### 武汉大学出版社出版

(430072 武昌 珞珈山)

湖北科学技术出版社黄冈印刷厂印刷

(436100 湖北省黄冈市宝塔大道85号)

新华书店湖北发行所发行

1992年8月第1版 1997年7月第2版

1997年7月第2版第1次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:15.125

字数:388千字 印数:1—5000

ISBN 7-307-02428-4/O·181 定价:14.60元

本书如有印装质量问题,请寄印刷厂调换

## 序 言

多年来，姚端正和梁家宝两位先生先后相继为武汉大学物理类专业讲授“数学物理方法”课程。本书就是他们在长年教学实践的基础上编写出版的优秀教材。

作者十分注意数学与物理的结合，注意阐述有关物理背景和前景。这个特点对于物理类专业是很重要的。

非线性方程和积分方程对于物理学科的一些新进展很有用，但在同类教科书中却往往阙如。本书则将有关内容编为第四篇，体现出课程现代化之精神。

本书选材恰当，文字清晰，要言不繁。尽管增加了第四篇，全书篇幅并不大于同类教材，十分有利于在有限的学时内很好地完成数学物理方法的教学。

在1995年的优秀教材评选中，本书荣获国家教委第三届优秀教材二等奖，我以为正是实至各归。在本书再版之际，谨以此表示祝贺之忱。

梁 昆 林

1996 丙子仲秋

## 第二版 前 言

本书第一版虽然荣幸获得了国家教委第三届优秀教材二等奖,但一本好的教材必须通过在教学实践中的千锤百炼,不断地充实、更新,才能满足读者和迅猛发展的科学技术的需要。故借此再版之机,我们对本书第一版的内容作了如下一些修改:

1. 对部分章、节的写法和内容作了些改动。如第二篇的 § 3.5, § 5.1, § 5.5, § 8.2; 第三篇的 § 2.3 等,以使本书能更紧密地结合物理学及相关课程的内容。

2. 在第四篇的非线性方程部分增加了“解析近似解和正则摄动法”一节,以满足近代物理学中解大量非线性方程的需要;在附录中增加了“矢量公式和矢量定理”的内容,以便读者学习本课程时查阅;在部分章节中增加了一些例题和习题,特别是将近几年来美国部分高校的研究生试题及 CUSPEA 考题中与本课程相关的内容分别录入到了相关章节的习题中,以进一步开拓学生视野,提高学生分析问题和解决问题的能力。顺便提及,与本书相配套的《数学物理方法学习指导》(作者:姚端正、史新奎、龙理)一书即将由武汉大学出版社出版,其中包含有本教材中部分习题的详细分析和解答。

3. 删去了第三篇中与高等数学重复的“常微分方程的级数解法”的内容和附录中的“贝塞耳函数表”,仅将所需用到的结论和数据简述在相应章节的附注中。

4. 对习题中可作为公式和结论运用的题加上了公式编号;而对习题中的难题、超纲题打上了 \* 标记。

5. 对书中和习题答案中的印刷错误进行了更正。

本书自 1992 年问世以来,得到校内外广大读者和专家的关心与支持,特别是武汉大学物理系 93 级“人才基地班”的同学,为本书的再版提供了许多宝贵的意见,武汉大学出版社为本书的再版给予了大力支持,在此一并表示衷心的感谢。

这次再版,尽管我们倾注了不少心血,但由于水平和时间的限制,错误或不妥之处在所难免,敬请读者批评指正。

编者

1996 年暑期于珞珈山

## 前 言

本书是在多年来武汉大学物理类专业数学物理方法课程所用的自编教材和讲义的基础上修改而成的。其内容包括复变函数论、数学物理方程、特殊函数、积分方程和非线性方程简介四个部分。适合物理类专业和相应的专业教学使用。

数学物理方法是物理系基础理论课——四大力学之间的粘合剂，是解决物理学中各种具体问题的重要工具之一。为了编写出一本较为理想的数学物理方法教材，使之不仅局限于叙述知识，更主要的是引导学生去思考问题，使他们具有分析问题和解决问题的能力，在编写时我们注意了以下几点：

一、第二篇是以数学物理方程的各种解法为主线进行编写的。这样可使读者一目了然数理方程一般有哪些解法，同时还便于读者将同一问题的不同解法进行对比，从而选择最佳方法来解决具体问题。

二、在每一小节的内容后都编入了相当数量的习题（在附录中有参考答案），使读者能及时消化所学知识。在习题中还编入了一定量的能开拓学生知识面的内容，这样既不挤占教材篇幅，又可使学生掌握更多知识。

三、每一章后都附有小结，使学生对整章内容融会贯通，加强知识的条理性、系统性。小结的形式多采用表格或框图，以便于学生对比和加深印象。

四、考虑到物理类专业的特点，对有些定理或公式不是单从数学上进行推导，而是先从物理背景、物理前景方面进行阐述；书中的内容、例题和习题也都尽量结合物理问题和物理实例，以使读者

易于理解、接受。

五、随着学科的新进展,根据需要,将传统数学物理方法教科书中没有而对物理学又十分有用的某些积分方程和非线性方程的解法作为第四篇编入到了本书中。

六、为了教学的方便,将本课程用到的其他课程的部分定理、公式,编写到了本书相应章节的注释中。

七、书中打“\*”的章节,若受学时限制,教师可只选讲,或放入习题课中讲解,也可不讲。

本书的出版,得到了武汉大学教务处、物理系、物理系基地班及出版社有关负责同志的大力支持。保宗悌教授在百忙中对本书进行了审阅;李中辅教授对本书的编写提出了一些宝贵的意见并作了有益的指教;龙理老师为本书核对了习题答案,在此一并表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,再加之时间仓促,难免有不妥甚至谬误之处,敬请读者批评指正。

编 者

1991年10月



# 目 录

## 第一篇 复变函数论

|                         |      |
|-------------------------|------|
| <b>第一章 解析函数</b> .....   | (2)  |
| § 1.1 复数及其运算.....       | (2)  |
| 习题 1.1 .....            | (7)  |
| § 1.2 复变函数 .....        | (8)  |
| 习题 1.2 .....            | (12) |
| § 1.3 微商及解析函数.....      | (13) |
| 习题 1.3 .....            | (20) |
| § 1.4 初等解析函数.....       | (21) |
| 习题 1.4 .....            | (30) |
| 本章小结 .....              | (32) |
| <b>第二章 解析函数积分</b> ..... | (33) |
| § 2.1 复变函数的积分.....      | (33) |
| 习题 2.1 .....            | (37) |
| § 2.2 科西定理.....         | (37) |
| 习题 2.2 .....            | (44) |
| § 2.3 科西积分公式.....       | (45) |
| 习题 2.3 .....            | (51) |
| 本章小结 .....              | (53) |
| <b>第三章 无穷级数</b> .....   | (54) |
| § 3.1 复级数.....          | (54) |
| § 3.2 幂级数.....          | (58) |
| 习题 3.2 .....            | (61) |
| § 3.3 泰勒级数.....         | (62) |

|  |       |
|--|-------|
| 习题 3.3 .....                                 | (66)  |
| § 3.4 罗朗级数 .....                             | (67)  |
| 习题 3.4 .....                                 | (74)  |
| § 3.5 单值函数的孤立奇点 .....                        | (75)  |
| 习题 3.5 .....                                 | (81)  |
| 本章小结 .....                                   | (83)  |
| <b>第四章 解析延拓·<math>\Gamma</math> 函数</b> ..... | (84)  |
| § 4.1 解析延拓 .....                             | (84)  |
| 习题 4.1 .....                                 | (88)  |
| § 4.2 $\Gamma$ 函数 .....                      | (88)  |
| 习题 4.2 .....                                 | (91)  |
| 本章小结 .....                                   | (92)  |
| <b>第五章 留数理论</b> .....                        | (93)  |
| § 5.1 留数定理 .....                             | (93)  |
| 习题 5.1 .....                                 | (98)  |
| § 5.2 利用留数计算实积分 .....                        | (99)  |
| 习题 5.2 .....                                 | (106) |
| § 5.3 物理问题中的几个积分 .....                       | (108) |
| 习题 5.3 .....                                 | (113) |
| § 5.4 多值函数的积分 .....                          | (115) |
| 习题 5.4 .....                                 | (117) |
| 本章小结 .....                                   | (119) |

## 第二篇 数学物理方程

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| <b>第一章 定解问题</b> ..... | (121) |
| § 1.1 引言 .....        | (121) |
| § 1.2 三类数理方程的导出 ..... | (124) |
| 习题 1.2 .....          | (130) |
| § 1.3 定解条件 .....      | (131) |

|                           |       |
|---------------------------|-------|
| 习题 1.3 .....              | (137) |
| 本章小结 .....                | (138) |
| <b>第二章 行波法</b> .....      | (139) |
| § 2.1 达朗贝尔公式 .....        | (139) |
| 习题 2.1 .....              | (144) |
| § 2.2' 反射波 .....          | (146) |
| 习题 2.2 .....              | (148) |
| § 2.3 泊松公式 .....          | (149) |
| 习题 2.3 .....              | (155) |
| § 2.4 纯强迫振动 .....         | (156) |
| 习题 2.4 .....              | (161) |
| § 2.5 推迟势 .....           | (162) |
| 本章小结 .....                | (165) |
| <b>第三章 分离变量法</b> .....    | (166) |
| § 3.1 有界弦的自由振动 .....      | (166) |
| 习题 3.1 .....              | (175) |
| § 3.2 非齐次方程——纯强迫振动 .....  | (177) |
| 习题 3.2 .....              | (181) |
| § 3.3 非齐次边界条件的处理 .....    | (182) |
| 习题 3.3 .....              | (188) |
| § 3.4 正交曲线坐标系 .....       | (188) |
| § 3.5 正交曲线坐标系中的分离变量 ..... | (192) |
| 习题 3.5 .....              | (200) |
| 本章小结 .....                | (202) |
| <b>第四章 积分变换法</b> .....    | (203) |
| § 4.1 傅里叶变换 .....         | (203) |
| 习题 4.1 .....              | (214) |
| § 4.2 傅里叶变换法 .....        | (215) |
| 习题 4.2 .....              | (219) |

|             |                    |       |
|-------------|--------------------|-------|
| § 4.3*      | 拉普拉斯变换             | (220) |
|             | 习题 4.3             | (229) |
| § 4.4*      | 拉普拉斯变换法            | (230) |
|             | 习题 4.4             | (233) |
|             | 本章小结               | (234) |
| <b>第五章</b>  | <b>格林函数法</b>       | (235) |
| § 5.1       | $\delta$ 函数        | (235) |
|             | 习题 5.1             | (240) |
| § 5.2       | 泊松方程的边值问题          | (240) |
|             | 习题 5.2             | (248) |
| § 5.3       | 格林函数的一般求法          | (248) |
|             | 习题 5.3             | (253) |
| § 5.4       | 用电像法求某些特殊区域的狄氏格林函数 | (254) |
|             | 习题 5.4             | (260) |
| § 5.5*      | 含时间的定解问题           | (261) |
|             | 习题 5.5             | (268) |
|             | 本章小结               | (269) |
| <b>第六章*</b> | <b>保角变换法</b>       | (271) |
| § 6.1       | 保角变换               | (271) |
|             | 习题 6.1             | (276) |
| § 6.2       | 几种具有保圆性的变换         | (276) |
|             | 习题 6.2             | (284) |
| § 6.3       | 几种初等函数所构成的变换       | (285) |
|             | 习题 6.3             | (290) |
|             | 本章小结               | (292) |
| <b>第七章*</b> | <b>复变函数法</b>       | (293) |
|             | 习题 7.1             | (295) |
|             | 本章小结               | (296) |
| <b>第八章</b>  | <b>变分法</b>         | (297) |

|                       |       |
|-----------------------|-------|
| § 8.1 泛函和泛函的极值 .....  | (297) |
| 习题 8.1 .....          | (308) |
| § 8.2 用变分法解数理方程 ..... | (309) |
| 习题 8.2 .....          | (319) |
| 本章小结 .....            | (320) |

### 第三篇 特殊函数

|                              |       |
|------------------------------|-------|
| <b>第一章 勒让德多项式</b> .....      | (322) |
| § 1.1 勒让德多项式 .....           | (322) |
| 习题 1.1 .....                 | (329) |
| § 1.2 勒让德多项式的性质 .....        | (329) |
| 习题 1.2 .....                 | (337) |
| § 1.3 球函数 .....              | (338) |
| 习题 1.3 .....                 | (345) |
| <b>第二章 贝塞耳函数</b> .....       | (347) |
| § 2.1 贝塞耳函数 .....            | (347) |
| 习题 2.1 .....                 | (354) |
| § 2.2 贝塞耳函数的性质 .....         | (354) |
| 习题 2.2 .....                 | (361) |
| § 2.3* 其他柱函数 .....           | (363) |
| 习题 2.3 .....                 | (372) |
| <b>第三章 斯特姆—刘维本征值问题</b> ..... | (374) |
| 习题 3.1 .....                 | (378) |
| 本章小结 .....                   | (380) |

### 第四篇 非线性方程和积分方程

|                          |       |
|--------------------------|-------|
| <b>第一章 非线性方程</b> .....   | (382) |
| § 1.1 非线性方程的某些初等解法 ..... | (382) |
| 习题 1.1 .....             | (388) |

|                          |       |
|--------------------------|-------|
| § 1.2* 孤波和孤子 .....       | (389) |
| 习题 1.2 .....             | (397) |
| § 1.3* 解析近似解和正则摄动法 ..... | (399) |
| 习题 1.3 .....             | (402) |
| 本章小结 .....               | (403) |
| <b>第二章 积分方程</b> .....    | (404) |
| § 2.1 积分方程的几种解法 .....    | (404) |
| 习题 2.1 .....             | (412) |
| § 2.2* 施密特—希尔伯特理论 .....  | (414) |
| 习题 2.2 .....             | (419) |
| § 2.3* 维恩纳—霍普夫方法 .....   | (420) |
| 习题 2.3 .....             | (422) |
| 本章小结 .....               | (423) |
| <b>附 录</b> .....         | (424) |
| 一、高斯方程和库默尔方程 .....       | (424) |
| 二、最陡下降法 .....            | (426) |
| 三、傅里叶变换简表 .....          | (431) |
| 四、拉普拉斯变换简表 .....         | (433) |
| 五、矢量公式和矢量定理 .....        | (436) |
| 六、习题参考答案 .....           | (439) |
| 七、主要参考书目 .....           | (466) |

# 第一篇 复变函数论

# 第一章 解析函数

复变函数的理论特别是其中的解析函数在物理学中有着广泛的应用. 本章将建立复变函数的基本概念, 并在此基础上引入解析函数; 在以后各章将介绍解析函数的性质和应用.

## § 1.1 复数及其运算

1. **复数的概念** 一对有序的实数  $(x, y)$  定义为**复数**, 通常表示为:

$$z = x + iy \quad (1.1.1)$$

式中  $i$  满足  $i^2 = -1$ , 称为**虚单位**; 而  $x$  和  $y$  都是实数, 分别称为复数  $z$  的**实部**和**虚部**, 常记为:

$$x = \operatorname{Re} z$$

$$y = \operatorname{Im} z$$

虚部为零的复数就可看作是实数, 即  $x + i0 = x$ . 因此, 全体实数是全体复数的一部分. 实部为零的复数称为**纯虚数**. 两个复数相等, 是指它们的实部和虚部分别相等, 即

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$$

必须且只须

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

复数  $x + iy$  和  $x - iy$  互称为**共轭复数**, 常用  $\bar{z}$  表示  $z$  的共轭复数, 于是



$$\bar{z} = x - iy \quad (1.1.2)$$

2. 复数的几何表示 复数的几何表示对于了解复变函数理论中的一些概念,例如多值函数、解析延拓等,很有帮助,而在复变函数论的一个重要应用方面——保角变换,更是必须的.

复数  $z = x + iy$  可以用平面上的点表示(见图 1).

在平面上作一直角坐标系,取横轴  $OX$  为实轴,单位为 1,纵轴  $OY$  为虚轴,单位为  $i$ ,则复数  $z$  就可以用横坐标等于  $x$ 、纵坐标等于  $y$  的点表示.显然,对于每一复数,平面上有唯一的点与之相应;反过来,对于平面上的每一点,也有唯一的一个复数与之相应.这也就是说,复数全体与平面上的点有一一对应的关系.这样的平面称为复平面(或  $z$  平面).

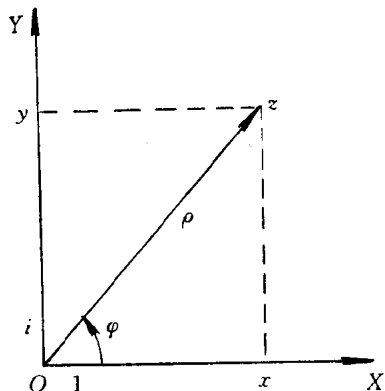


图 1

也可用从原点到  $z$  点所引的向量  $\vec{oz}$  表示复数  $z = x + iy$ ①.显然,  $\vec{oz}$  在实轴和虚轴上的投影分别表示  $z = x + iy$  的  $x$  和  $y$ (图 1).若引入极坐标变量  $(\rho, \varphi)$ , 则

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

于是 
$$z = \rho \cos \varphi + i \rho \sin \varphi \quad (1.1.3)$$

或 
$$z = \rho e^{i\varphi} \quad (1.1.4)$$

(1.1.3)式和(1.1.4)式分别称为复数  $z$  的三角表示式和指数表示式.式中的  $\rho$  为向量  $\vec{oz}$  的长度,称为复数  $z$  的模或绝对值,记作

$$|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.1.5)$$