



《中国工程物理研究院科技丛书》第 027 号

无穷维动力系统

(上册)

郭柏灵 著

国防工业出版社

455653

G86《中国工程物理研究院科技丛书》第 027 号

无穷维动力系统

(上册)

郭柏灵 著



00455653

国防工业出版社

· 北京 ·

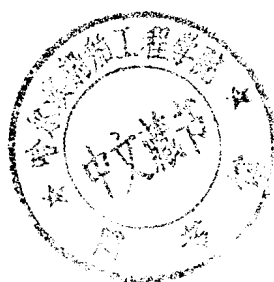
455656

《中国工程物理研究院科技丛书》第 027 号

无穷维动力系统

(下册)

郭柏灵 著



00455656

国防工业出版社

· 北京 ·

240 / 26
图书在版编目(CIP)数据

无穷维动力系统/郭柏灵著. —北京:国防工业出版社, 2000. 1

(中国工程物理研究院科技丛书)

ISBN 7-118-02105-9

I. 无… II. 郭… III. 核武器-动力系统-计算
IV. TJ91

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 14307 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 30⁷/₈ 806 千字

2000 年 1 月第 1 版 2000 年 1 月北京第 1 次印刷

印数:1—1000 册 定价:48.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

《中国工程物理研究院科技丛书》出版说明

中国工程物理研究院建院 30 年来,坚持理论研究、科学实验和工程设计密切结合的科研方向,完成了国家下达的各项国防科研任务。通过完成任务,在许多专业学科领域里,不论在基础理论方面,还是在实验测试技术和工程应用技术方面,都有重要发展和创新,积累了丰富的知识和经验,造就了一大批优秀科技人材。

为了扩大科技交流与合作,促进我院事业的继承与发展,系统地总结我院 30 年来在各个专业领域里集体积累起来的经验,吸收国内外最新科技成果,形成一套系列科技丛书,无疑是一件十分有意义的事情。

这套丛书将部分地反映中国工程物理研究院科研工作的成果,内容涉及本院过去开设过的二十几个主要学科。现在和今后开设的新学科,也将编著出书,续入本丛书中。

这套丛书将在今后几年里陆续编辑出版。我院早些年零散编著出版的专业书籍,经编委会审定后,也纳入本丛书系列。

谨以这套丛书献给 30 年来为我国国防现代化而献身的人们!

《中国工程物理研究院科技丛书》编审委员会

1989 年 1 月 25 日

《中国工程物理研究院科技丛书》
第三届编审委员会

主 副 委	主 任 员	任 杜祥琬				
		任 章冠人 华欣生 王新堂				
		员 (以姓氏笔画为序)				
		水鸿寿	方宗璠	邓门才	田常津	刘庆兆
		刘常龄	花平环	吴宏志	汪源浚	沈元如
		陈银亮	张寿齐	张俊哲	张富堂	范宗喜
		罗顺火	竺家亨	周关林	赵维晋	俞大光
		姜学贤	高国桐	赖祖武	蒲仁壁	魏奎超
丛书编辑部负责人		吴衍斌				
本 册 编 辑		郭玉团 吴衍斌				

《中国工程物理研究院科技丛书》

已 出 版 书 目

- | | | | |
|--------------------------|-----------|---------|-------------|
| 001 高能炸药及相关物性能 | 董海山、周芬芬主编 | 科学出版社 | 1989 年 11 月 |
| 002 光学高速摄影测试技术 | 谭显祥编著 | 科学出版社 | 1990 年 02 月 |
| 003 凝聚炸药起爆动力学 | 章冠人等编著 | 国防工业出版社 | 1991 年 09 月 |
| 004 线性代数方程组的迭代解法 | 胡家赣编著 | 科学出版社 | 1991 年 12 月 |
| 005 映象与混沌 | 陈式刚编著 | 国防工业出版社 | 1992 年 06 月 |
| 006 再入遥测技术(上册) | 谢铭勋编著 | 国防工业出版社 | 1992 年 06 月 |
| 007 再入遥测技术(下册) | 谢铭勋编著 | 国防工业出版社 | 1992 年 12 月 |
| 008 高温辐射物理与量子辐射理论 | 李世昌编著 | 国防工业出版社 | 1992 年 10 月 |
| 009 粘性滑动法和差分格式粘性 | 郭柏灵著 | 科学出版社 | 1993 年 03 月 |
| 010 无损检测技术及其应用 | 张俊哲等著 | 科学出版社 | 1993 年 05 月 |
| 011 半导体材料辐射效应 | 曹建中著 | 科学出版社 | 1993 年 05 月 |
| 012 炸药热分析 | 楚士晋编著 | 科学出版社 | 1994 年 12 月 |
| 013 脉冲辐射场诊断技术 | | | |

- | | | | |
|------------|-------------------------|---------|-------------|
| | 刘庆兆主编 | 科学出版社 | 1994 年 12 月 |
| 014 | 放射性核素活度的测量方法和技术 | | |
| | · 古当长编著 | 科学出版社 | 1994 年 12 月 |
| 015 | 二维非定常流和激波 | | |
| | 王继海编著 | 科学出版社 | 1994 年 12 月 |
| 016 | 抛物型方程差分方法引论 | | |
| | 李德元 陈光南著 | 科学出版社 | 1995 年 12 月 |
| 017 | 特种结构分析 | | |
| | 刘新民 韦日演主编 | 国防工业出版社 | 1995 年 12 月 |
| 018 | 理论爆轰物理 | | |
| | 孙锦山 朱建士著 | 国防工业出版社 | 1995 年 12 月 |
| 019 | 可靠性维修性可用性评估手册 | | |
| | 潘吉安编著 | 国防工业出版社 | 1995 年 12 月 |
| 020 | 脉冲辐射场测量数据处理与误差分析 | | |
| | 陈元金编著 | 国防工业出版社 | 1997 年 01 月 |
| 021 | 近代成象技术与图象处理 | | |
| | 吴世法著 | 国防工业出版社 | 1997 年 03 月 |
| 022 | 一维流体力学差分方法 | | |
| | 水鸿寿著 | 国防工业出版社 | 1998 年 02 月 |
| 023 | 抗辐射电子学 | | |
| | —— 辐射效应及加固原理 | | |
| | 赖祖武等著 | 国防工业出版社 | 1998 年 07 月 |
| 024 | 金属的环境氢脆及其试验技术 | | |
| | 周德惠 谭云编著 | 国防工业出版社 | 1998 年 12 月 |
| 025 | 实验核物理测量中的粒子分辨 | | |
| | 段绍节编著 | 国防工业出版社 | 1999 年 06 月 |
| 026 | 实验物态方程导引(第二版) | | |
| | 经福谦著 | 科学出版社 | 1999 年 09 月 |
| 027 | 无穷维动力系统 | | |
| | 郭柏灵著 | 国防工业出版社 | 2000 年 01 月 |

前 言

1993 年,作者在“非线性演化方程”一书第五章中曾对无穷维动力系统的基本概念、研究方法和研究概况作了一个简要的介绍。由于篇幅所限,未能对这些内容作进一步深入的讨论,再加上最近五年来又有不少新的重要结果不断出现,这就促使作者下了一个决心:写一本有关无穷维动力系统的专门著作。

本书旨在让读者了解有关无穷维动力系统基本知识的基础上,用比较简单明了、深入浅出的方法和尽量少的篇幅,来介绍当前无穷维动力系统研究中令人关注的问题以及取得的重要的新结果,其中包括作者本人以及他的合作者所得到的一些结果。第一章,吸引子以及维数估计,主要介绍近代物理中提出的某些具耗散的非线性发展方程整体吸引子的存在性及其 Hausdorff 维数、fractal 维数的估计,其中包括有界域和无界域的、空间一维和高维的。第二章,惯性流形,主要介绍对于很广泛的抽象微分方程在很一般的情况下给出了精确的谱间隙条件,证明了惯性流形的存在性,同时还讨论了惯性流形的光滑性、正规双曲性等。第三章,近似惯性流形,主要介绍各种近似惯性流形的构造和数值逼近,以及近似惯性流形的收敛性,并从而导致了惯性流形存在性的另一种构造性证明。第四章,离散吸引子及近似计算,主要介绍各种离散形式吸引子的存在性,它们和有限维动力系统紧密联系起来,用数值计算结果显示了整体吸引子、近似惯性流形的具体图象。第五章,整体吸引子的某些性质,主要介绍了整体吸引子的振荡性质。它的渐近行为可由少数几个点决定的性质以及它和双曲不动点的不稳定流形的紧密联系,用几何测度论的方法和结果估计了整体吸引子水平集 Hausdorff 测度的上界,同时,还给出了一种方法,估计

了吸引子维数的下界。第六章,具小耗散系统的结构,主要介绍了用几何摄动理论、无限维中心流形理论以及多维 Melnikov 函数研究在小扰动下稳定、不稳定流形的不变性以及出现混沌的状况,其中稳定流形、不稳定流形的性质还和纤维丛上的第一陈数密切相关。第七章,孤立波的存在性和稳定性,主要介绍用集中紧致原理证明多维孤立波的存在性以及用某种能量泛函方法和谱分析方法研究孤立波的非线性稳定性、不稳定性和渐近稳定性。

由于无穷维动力系统的研究内容十分丰富和非常广泛,它和许多学科如流体力学、分形理论、泛函分析、拓扑学、几何测度论、计算数学等紧密相连,各种研究方法和结果不断涌现,限于作者现有的水平和能力,本书难免存在许多不妥、不够全面甚至错误,敬请读者给予批评和指正。

这里我要衷心感谢鲁百年、蒋慕蓉、李用声、苗晨霞、高洪俊、林国广、邢家省、元荣等,他们热情地帮助作者校对、修改、打印全书的书稿,为此他们付出了许多艰辛的劳动,使作者深受感动。

最后,作者衷心感谢周毓麟院士对本书的关心和帮助;衷心感谢孙和生、井竹君、常谦顺、水鸿寿教授,他们审阅本书的内容,并提出了许多宝贵的意见。

郭 柏 灵

1998 年春节于北京

内 容 简 介

本书是有关无穷维动力系统数学理论方面的专著。

本书旨在让读者了解有关无穷维动力系统基本知识的基础上,用比较简单明了,深入浅出的方法和尽量少的篇幅,来介绍当前无穷维动力系统研究中令人关注的问题以及取得的重要的新结果,其中包括作者本人以及其他的写作者所得到的一些结果。

全书共分七章:第一章吸引子及维数估计,第二章惯性流形,第三章近似惯性流形,第四章离散吸引子及近似计算,第五章整体吸引子的某些性质,第六章具小耗散系统的结构,第七章孤立波的存在性和稳定性。

本书可供应用数学专业的高年级本科生和研究生作参考书,也可供从事非线性科学研究的科研人员参考。

目 录

第一章 吸引子及其维数估计	1
1.1 整体吸引子及其 Hausdorff、分形维数估计	1
1.2 Kuramoto-Sivashinsky 方程	7
1.3 一类具粘弹性项的非线性波动方程	30
1.4 KdV 耦合方程组	46
1.5 Davey-Stewartson 方程	62
1.6 导数 Ginzburg-Landau 方程	74
1.7 超导中的 Ginzburg-Landau 模型	94
1.8 Landau-Lifshitz-Maxwell 方程	103
1.9 非线性 Schrödinger-Boussinesq 方程	130
1.10 一种证明强拓扑吸引子的新方法	149
1.11 非线性 KdV-Schrödinger 方程	157
1.12 在 Riemann 流形上的 Landau-Lifshitz 方程	174
1.13 R^3 上耗散 Klein-Gordon-Schrödinger 方程组	196
1.14 二维无界区域上导数 Ginzburg-Landau 方程	216
1.15 吸引子和湍流的联系	229
第二章 惯性流形	237
2.1 一类非线性演化方程的惯性流形	239
2.2 惯性流形与法向双曲性	260
2.3 一维广义 Ginzburg-Landau 方程的有限维惯性形式	302
2.4 广义 KS 型方程惯性流形的存在性	323
第三章 近似惯性流形	362
3.1 二维 Navier Stokes 方程	362
3.2 解的 Gevrey 正则性	372
3.3 一类耗散非线性发展方程解的时间解析性	380
3.4 二维 Ginzburg-Landau 方程	396

3.5	Bernard 对流方程	411
3.6	长短波(LS)方程	426
3.7	一维铁磁链方程	440
3.8	非线性 Schrödinger 方程	449
3.9	近似惯性流形的收敛性	462
第四章 离散吸引子及近似计算		489
4.1	广义 Ginzburg-Landau 方程	489
4.2	Zakharov 方程组	511
4.3	时间离散化的惯性流形	543
4.4	Landau-Lifschitz 方程	580
4.5	非线性 Galerkin 方法	593
4.6	稳定性分析及数值结果	623
4.7	二维 Newton-Boussinesq 方程	630
4.8	立方 Ginzburg-Landau 方程的数值计算和分析	650
4.9	一维 Kuramoto-Sivashinsky 方程	658
第五章 整体吸引子的某些性质		669
5.1	Kuramoto-Sivashinsky 方程	669
5.2	广义 Ginzburg-Landau 方程	675
5.3	环绕数的上界估计	684
5.4	KS 方程解的振荡性	694
5.5	水平集的 Hausdorff 测度	699
5.6	一类整体吸引子的结构及其维数的下界估计	714
第六章 具小耗散动力系统的结构		720
6.1	五次 Ginzburg-Landau 方程	720
6.2	具导数项 Ginzburg-Landau 方程	742
6.3	扰动非线性 Schrödinger 方程	755
6.4	无穷维的中心流形理论	805
第七章 孤立波的存在性和稳定性		817
7.1	轨道稳定性	818
7.2	具导数非线性 Schrödinger 方程	846
7.3	长短波方程	864
7.4	广义 Kadomtsev-Petviashvili 方程	875

7.5 Davey-Stewartson 方程	890
7.6 非线性 Schrödinger-Kadomtsev-Petviashvili 方程	909
7.7 BBM 方程孤立波的渐近稳定性	920
参考文献	943

第一章 吸引子及其维数估计

1.1 整体吸引子及其 Hausdorff、分形维数估计

本节将引入无穷维动力系统中的一个非常重要的概念——整体吸引子,叙述整体吸引子的存在定理以及对其 Hausdorff 维数、分形维数的估计。

定义 1.1.1 设 E 为 Banach 空间, $S(t)$ 为连续的算子半群, 即有 $S(t): E \rightarrow E, S(t+\tau) = S(t) \cdot S(\tau), \forall t, \tau \geq 0, S(0) = I$ (恒等算子)。如果紧集 $\mathcal{A} \subset E$ 满足:

(i) 不变性: 即在半群 $S(t)$ 作用下为不变集

$$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}; \forall t \geq 0 \quad (1.1.1)$$

(ii) 吸引性: $\mathcal{A}$ 吸引 E 中一切有界集, 即对任何有界集 $B \subset E$ 有

$$\text{dist}(S(t)B, \mathcal{A}) = \sup_{x \in B} \inf_{y \in \mathcal{A}} \|S(t)x - y\|_E \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \quad (1.1.2)$$

特别地, 有当 $t \rightarrow \infty$ 时, 从 u_0 出发的一切轨线 $S(t)u_0$ 收敛于 $\mathcal{A}$, 即有

$$\text{dist}(S(t)u_0, \mathcal{A}) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty \quad (1.1.3)$$

那么, 紧集 $\mathcal{A}$ 称为半群 $S(t)$ 的整体吸引子。

整体吸引子的结构是很复杂的。对于一个非线性演化方程初值问题

$$\frac{du(t)}{dt} = F(u(t)) \quad (1.1.4)$$

$$u(0) = u_0 \quad (1.1.5)$$

它所生成的半群 $S(t)$ 除了包括方程的简单平衡点(可能是多重解)外,还包括时间周期的轨道,拟周期解的轨道,以及分形、奇异吸引子等,它可能不是光滑流形,且具有非整数维数。

为了给出整体吸引子的存在定理,我们需要引进吸收集的概念。

定义 1.1.2 对于有界集 $B_0 \subset E$, 使得对任何有界集 $B \subset E$, 如存在 $t_0(B) > 0$, 有

$$S(t)B \subset B_0, \quad \forall t \geq t_0(B) \quad (1.1.6)$$

则称 B_0 为 E 中的有界吸收集。

定理 1.1.1 设 E 为 Banach 空间, $S(t), t \geq 0$ 为算子半群, $S(t): E \rightarrow E, S(t+\tau) = S(t) \cdot S(\tau), t, \tau \geq 0, S(0) = I$, 其中 I 为恒等算子。设半群 $S(t)$ 满足以下条件:

(i) 半群 $S(t)$ 在 E 中一致有界, 即对一切 $R > 0$, 存在常数 $C(R)$, 使得当 $\|u\|_E \leq R$ 时, 有

$$\|S(t)u\|_E \leq C(R), \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (1.1.7)$$

(ii) 存在 E 中有界的吸收集 B_0 。 (1.1.8)

(iii) 当 $t > 0$ 时, $S(t)$ 为全连续算子。

则半群 $S(t)$ 具有紧的整体吸引子 $\mathcal{A}$ 。

附注 1.1.1 如将条件(ii)中的有界吸收集 B_0 改换为存在紧的吸收集合 B_0 , 则条件(iii)中 $S(t)$ 的全连续性可改为 $S(t)$ 为连续算子, 这时定理 1.1.1 仍成立。

附注 1.1.2 可以证明上述的整体吸引子 $\mathcal{A}$ 为吸收集 B_0 的 ω 极限集, 即有

$$\mathcal{A} = \omega(B_0) = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} S(t)B_0} \quad (1.1.9)$$

其中闭包在 E 上取。

另一个常用的吸引子的存在定理为:

定理 1.1.2 设 E 为 Banach 空间, 半群 $S(t)$ 是连续的。设存在一个开集 $\mathcal{U} \subset E$ 和 $\mathcal{U}$ 的一个有界集 $\mathcal{B}$, 使得 $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{U}$ 中是吸收的。又设满足条件:

(1) 算子 $S(t)$ 对充分大的 t 是一致紧的, 即对每个有界集 $\mathcal{B}$,

存在 $t=t_0(\mathcal{B})$, 使得

$$\bigcup_{t \geq t_0} S(t) \mathcal{B} \quad (1.1.10)$$

在 E 中是相对紧的。或

(2) $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$, 其中算子 $S_1(\cdot)$ 对充分大的 t 是一致紧的(即满足条件(1.1.10)), 算子 $S_2(t)$ 为连续映射, $S_2(t): E \rightarrow E$, 且对每个有界集 $B \subset E$,

$$r_B(t) = \sup_{\phi \in B} \|S_2(t)\phi\|_E \rightarrow 0 \quad (1.1.11)$$

则 $\mathcal{B}$ 的 ω 极限集 $\mathcal{A} = \omega(\mathcal{B})$ 是紧的吸引子, 它吸引 $\mathcal{U}$ 中的有界集。它是在 $\mathcal{U}$ 中的最大有界吸引子, 且当 $\mathcal{U}$ 既凸又连通时, $\mathcal{A}$ 是连通的。

因此, 要证明整体吸引子的存在性, 就是要验证定理 1.1.1 或定理 1.1.2 的假设是否成立, 最主要的是:

- (i) 半群 $S(t)$ 的存在性与连续性;
- (ii) 存在一个有界或紧的吸收集;
- (iii) $S(t) (t \geq 0)$ 为全连续算子或满足条件(1.1.10)(或条件(1.1.11))。

为了对整体吸引子的几何性质作最简单的刻画, 我们可对它的 Hausdorff 维数、分形维数作一些估计。

定义 1.1.3 集合 X 的 Hausdorff 测度为

$$\mu_H(X, d) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_H(X, d, \epsilon) = \sup_{\epsilon > 0} \mu_H(X, d, \epsilon) \quad (1.1.12)$$

其中

$$\mu_H(X, d, \epsilon) = \inf \sum_i r_i^d \quad (1.1.13)$$

这里 $\inf$ 是对一切覆盖 X 的半径 $r_i \leq \epsilon$ 的球而取的。如果存在一个数 $d = d_H(X) \in [0, +\infty]$, 使得

$$\mu_H(X, d) = 0, d > d_H(X) \quad (1.1.14)$$

$$\mu_H(X, d) = \infty, d < d_H(X) \quad (1.1.15)$$

则称这个数 $d_H(X)$ 为集合 X 的 Hausdorff 维数。

定义 1.1.4 集合 X 的分形维数为