

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

高等數學習題集

第一卷

Н. М. ГИОНТЕР, Р. О. КУЗЬМИН 著
鄭醒華 劉紹祖 譯



商務印書館

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本



高等數學習題集

第一卷

H. M. 肯傑爾, P. O. 庫茲明著
鄭醒華 劉紹祖譯

商務印書館

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社 (Государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的肯傑爾 (Н. М. Гюитер) 和庫茲明 (Р. О. Кузьмин) 合著的“高等數學習題集” (Сборник задач по высшей математике том 1) 第一卷 1949 年修訂版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為高等學校教材。

全書共三卷,第一卷內所收集的是關於平面解析幾何、立體解析幾何、微分法及微分法在分解學上的和在幾何學上的應用等五個部份的習題,共 2166 個。第二卷和第三卷內所收集的則是關於高等代數、重積分、微分方程、級數、近似計算、複變函數、數學物理方程等方面的習題。全書每卷之末,均附有答案。

本書由西北大學數學系鄭醒華和北京工業學院劉紹祖合譯。

高等數學習題集

第一卷

鄭醒華 劉紹祖譯

★ 版權所有 ★

商務印書館出版

上海河南中路二一一號

中國圖書公司發行

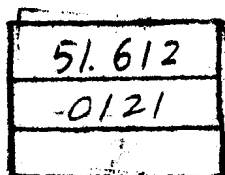
商務印書館上海廠印刷

(50854.1A)

1953 年 9 月初版 版面字數 41,000

印數 1+4,000, 定價 ¥15.000

上海市書刊出版業營業許可證出〇二五號 張



第十版序言的摘錄

在一九一二年，以恩·姆·肯傑爾爲首的交通工程學院數學教研室的工作同志們編纂了一部高等數學習題彙編，那本書就是本書的藍本。列寧格勒大學物理數學系的工作人員曾參與以後幾版的出版工作。最近的幾版書是由恩·姆·肯傑爾和我校訂而問世的。由於肯傑爾在一九四一年的逝世，新版本的全部工作是由我完成的。

第十二版的序言

在準備這一版付印時，把前一版書中存在的錯字及因疏忽大意而引起的錯誤都改正了。爲此目的，全部習題又經列寧格勒市的加里寧工業學院數學教研室的同志們驗算過。下面諸位同志曾參與此次重大的工作：

斯·依·阿茂索夫，葉·阿·阿費爾赤葉娃，姆·依·波爾高夫，格·恩·卜若夫考維赤，傑·洛·加夫拉，傑·斯·高爾希柯夫，阿·卜·古爾-米利聶，阿·依·道卜拉姬娜，姆·姆·道布列維赤，弗·利·卡恩，阿·卜·考爾達盛柯，特·依·藍蒲，恩·阿·尼柯列斯卡雅，斯·恩·怒米洛夫，阿·蒲·索包列夫，蒲·弗·千潤柯夫。

對於他們，謹表示我深切的謝意。

路·奧·庫茲明

· 002909

~~491027~~

目 錄

第一章 平面解析幾何

§ 1. 平面上的向量、射影及座標,最簡單的應用.....	1
§ 2. 直線和圓.....	4
§ 3. 軌跡.....	10
§ 4. 最簡單的二次曲線.....	13
§ 5. 用一般形式方程式表示出的二次曲線.....	17
§ 6. 中心、直徑和二次方程式的簡化.....	20
§ 7. 共軛直徑,對稱軸,漸近線.....	24
§ 8. 焦點和準線.....	25
§ 9. 二次曲線的切線、極點和極線.....	26
§ 10. 雜題.....	28

第二章 立體解析幾何

§ 1. 空間的向量和座標.....	31
§ 2. 平面.....	34
§ 3. 空間的直線.....	36
§ 4. 曲面的形成.....	42
§ 5. 二次曲面。中心和直徑面.....	45
§ 6. 二次曲面的切面和切線.....	50
§ 7. 二次曲面方程式的簡化.....	55
§ 8. 圓形截線,直母線和其他問題.....	60

第三章 微分法

§ 1. 極限的理論.....	64
§ 2. 雜題.....	71
§ 3. 函數概念,連續性。函數的圖示法.....	76
§ 4. 導函數的尋求.....	82
§ 5. 導數的幾何意義.....	86

§ 6. 高階導數	88
§ 7. 多變數函數。它們的導函數和微分	98
§ 8. 隱函數的微分	99
§ 9. 變數更換	102

第四章 微分法在分析上的應用

§ 1. 洛勒定理, 拉格朗奇定理及柯希定理。函數的增大和減小, 不等式	108
§ 2. 單變數函數的極大值和極小值	111
§ 3. 函數圖形的構成	113
§ 4. 關於極大值和極小值的雜題	116
§ 5. 級數及其收斂性	120
§ 6. 級數展開式	127
§ 7. 級數的運算	133
§ 8. 未定形	138
§ 9. 多變數函數的極值	141

第五章 微分法在幾何上的應用

§ 1. 曲線的方程式及其形狀	143
§ 2. 切線及法線	151
§ 3. 凸形, 曲率及曲率半徑	157
§ 4. 曲線之縮閉線	161
§ 5. 曲線的包線	162
§ 6. 曲線的構成	164
§ 7. 有兩個曲率的曲線: 切線和法面	173
§ 8. 有兩個曲率的曲線: 密切平面, 法線和副法線	176
§ 9. 曲面和曲面的方程式	180
§ 10. 切面和法線。包面	183
§ 11. 曲面上的曲線和曲面的曲率	187

答 案	193
-----	-----

高等數學習題集

第一章 平面解析幾何

§ 1. 平面上的向量、射影及座標,最簡單的應用

1. 給了點 $A(2,5)$ 和 $B(-3,2)$ 。求向量 AB 在二座標軸上的射影。
2. 給了點 $A(1,2)$ 和 $B(5,-1)$ 。求向量 AB 與 Ox 軸及 Oy 軸所成的角、及此向量之長度。
3. 給了點 $A(2,-1), B(5,3), C(3,5), D(-5,11)$ 。求向量 AB 和 CD 間的夾角。
4. 給了點 $A(2,-1), B(-1,3), C(4,7), D(-1,-5)$ 。求向量 AB 在向量 CD 方向上的射影。
5. 給了點 $A(3,5), B(6,-2)$ 。求向量 AB 在第一象限分角線上的射影。
6. 從座標原點至點 $A(1,2), B(-2,3), C(6,-10)$ 引出三個向量。求它們幾何和的大小同方向。
7. 長方形對角的頂點是 $A(3,7), B(11,-1)$ 。求長方形的中心。
8. 從點 $A(2,3)$ 引一線段到點 $B(7,-2)$, 再延長同樣的長度。求延線端點的座標。
9. 線段 AB 被點 $M_1(1,2)$ 和 $M_2(3,4)$ 分成相等的三部份。求點 A 和 B 。
10. 點 $M_1(1,1), M_2(2,2), M_3(3,-1)$ 是平行四邊形相鄰的三個頂點。求第四個頂點。

11. 三角形三邊的中點是 $M_1(-2,1)$, $M_2(2,3)$, $M_3(4,-1)$ 。求頂點的座標。

12. 正方形兩個相鄰的頂點是 $A(2,3)$, $B(6,6)$ 。其餘的頂點在何處？

13. 正六邊形兩個相鄰的頂點是 $M_1(0,0)$, $M_2(4,0)$ 。下一個頂點在何處？

14. 在點 $(3,5)$ 和 $(9,-7)$ 上放有質量 2 和 1。這些質量的重心在何處？

15. 把質量 m_1, m_2 和 m_3 依次放在點 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ 和 $M_3(x_3, y_3)$ 上。證明這些質量的重心的座標可以用公式

$$x_c = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y_c = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

表示出。

16. 把同等的質量放在多角形的頂點上。證明它們重心的座標等於各頂點座標的算術平均值。

17. 設正多角形的中心在原點。證明各頂點座標的和等於零。

18. 向多邊形各邊作與邊長成比例的外向垂線。證明，它們的幾何和等於零。

19. 有一奇數個邊的多角形，已給出各邊中點的座標： $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $\dots$, $M_{2n-1}(x_{2n-1}, y_{2n-1})$ 。求各頂點的座標。

20. 在 Ox 軸上求出與點 $(5, 12)$ 之距離為 13 的點。

21. 三角形的頂點是 $M_1(2,1)$, $M_2(-3,2)$, $M_3(-1,1)$ 。求外接圓的圓心和半徑。

22. 三角形的頂點是 $O(0,0)$, $M_1(3,5)$, $M_2(-2,3)$ 。求它的面積。

23. 三角形的頂點是 $A(1,2)$, $B(3,-1)$, $C(-2,-5)$ 。求它的面積。

24. 三角形的兩個頂點是 $(5,1)$, $(-2,2)$, 第三個頂點在 Ox 軸上。已知三角形的面積等於10, 求第三個頂點。

25. 已知四邊形頂點的座標: $M_1(5,6)$, $M_2(5,-6)$, $M_3(-2,-1)$, $M_4(-2,1)$, 求它的面積。

26. 已知四邊形頂點的座標: $M_1(5,6)$, $M_2(5,-6)$, $M_3(-2,1)$, $M_4(-2,-1)$, 求它的面積。

27. 已知五邊形的頂點: $M_1(0,0)$, $M_2(3,-2)$, $M_3(5,-1)$, $M_4(8,4)$, $M_5(4,5)$, 求它的面積。

28. 在移軸之後, 點 $(2,4)$ 得到了座標 $(-3,0)$ 。求新原點原來的座標。

29. 新座標軸把原座標軸間夾角分成相等的部份。軸 Ox_1 與軸 Oy 作成正的銳角。寫出座標變換的公式。

30. 新原點在點 $(2,3)$ 處。點 $(6,0)$ 在新縱座標軸的正方向上。問點 $(7,8)$ 的新座標怎樣?

31. 正方形的頂點在點 $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$ 處。如果取正方形的對角線為新座標軸, 而點 $(2,0)$ 在軸 O_1x_1 的正方向上, 試求出座標變換的公式。

32. 新原點在點 $(1,-2)$ 處。新縱軸與原橫軸作成銳角, 它的正切是 $\frac{3}{4}$ 。求出在兩個座標系中有相同座標的點。

33. 怎樣轉軸, 才能使式子 $x^2 - y^2$ 變為 $2x_1y_1$?

34. 證明, 對於一般的座標變換(包括轉軸), 可以用繞某一點旋轉全平面的方法, 使舊軸變為新軸。

35. 給了點的極座標: $r=10$, $\varphi=30^\circ$ 。如果極點在點 $(2,3)$ 處, 而極軸平行於 Ox 軸, 求點的直角座標。

36. 已知點的極座標: $r_1=3$, $\varphi_1=10^\circ$; $r_2=5$, $\varphi_2=130^\circ$, 求兩點間的距離。

37. 極點在點 $(3,5)$ 處, 極軸平行於軸 Oy 的正方向。求點 $M_1(9$,

-1)和點 $M_2(5, 5+2\sqrt{3})$ 的極座標。

38. 考察某一拆線的射影, 來證明公式:

$$\sin \varphi + \sin 3\varphi + \cdots + \sin (2n-1)\varphi = \frac{1 - \cos 2n\varphi}{2 \sin \varphi};$$

$$\cos \varphi + \cos 3\varphi + \cdots + \cos (2n-1)\varphi = \frac{\sin 2n\varphi}{2 \sin \varphi}.$$

§ 2. 直線和圓

39. 設一直線與 Ox 軸平行, 到 Ox 軸的距離是 h , 求其方程式。

40. 設一直線平行於 Oy 軸, 到 Oy 軸的距離是 h , 求其方程式。

41. 正方形的頂點在點 $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ 處。求它的對角線的方程式。

42. 在直線 $y = 2x - 3$ 上, 求縱座標是 7 的點。

43. 假定 Ox 軸是水平的, 在點 $M_1(-1, 2), M_2(-3, -10), M_3(2, 1), M_4(5, 4)$ 中, 確定那些點在直線 $y = 2x - 3$ 上面, 那些在下面, 那些在直線上。

44. 設一直線通過點 $(2, 1)$ 並與 Ox 軸成 45° 的角。求它的方程式。

45. 求通過點 $M_1(-1, 2)$ 和點 $M_2(2, 1)$ 的直線方程式。

46. 求通過點 $(3, 7)$ 和點 $(3, -2)$ 的直線方程式。

47. 三角形的頂點在點 $M_1(1, -1), M_2(3, 5), M_3(-7, 11)$ 處, 求各邊的方程式。

48. 求通過點 $(2, -1)$, 並且平行於直線 $2x + 3y = 0$ 的直線方程式。

49. 求通過點 $(2, -3)$, 並且垂直於直線 $y = 2x + 1$ 的直線方程式。

50. 求通過點 $(3, 5)$ 並與直線 $3x - 2y + 7 = 0$ 成 45° 角的直線方程式。

51. 三角形的頂點在點 $M_1(0, 2), M_2(2, 2), M_3(3 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$

處。求各內角。

52. 按照三角形三邊的方程式 $x-y=0$, $2x+3y+5=0$, $x+2y+6=0$, 求它的頂點。

53. 按照三角形三邊的方程式 $y=3x-9$, $y=-2x+1$, $y=-x+3$, 求它的面積。

54. 通過點(1,2)引一直線,使得它與點(2,3)和點(4,-5)的距離相等。求其方程式。

55. 平行四邊形兩條邊的方程式是: $x+2y+1=0$, $2x+y-3=0$, 它的中心在點(1,2)處。求其他兩邊的方程式。

56. 求通過點(-1,2),且與點(6,1)的距離等於5的直線方程式。

57. 求通過點(2,-2),且與點(5,2)的距離等於3的直線方程式,

58. 通過點(6,8),引一直線,使得與兩座標軸所成三角形的面積等於12。求其方程式。

59. 求通過點(-4,3),並與原點距離為5的直線方程式。

60. 給了直線 $4x+3y+1=0$ 。求平行於此直線並與它距離等於3的直線方程式。

61. 求二直線 $2x+3y=7$, $4x+6y=11$ 間的距離。

62. 求位於兩直線 $x+2y=1$, $x+2y=3$ 間,平行於它們,並且將此二直線間的距離分成1:3的直線方程式。

63. 求位於二直線 $3x+2y=5$, $6x+4y+3=0$ 間正當中的直線方程式。

64. 求與直線 $2x+3y+6=0$ 平行,而和座標軸所成三角形之面積等於3的直線方程式。

65. 給出直線 $2x+y-3=0$ 和它上面的一點 $M(1,1)$ 。在此直線上找出與 M 距離為 $\sqrt{5}$ 的點。

66. 設三角形二高線的方程式是 $2x-3y+1=0$, $x+y=0$, 而 $M(1,2)$ 是它的一個頂點。求各邊的方程式。

67. $M_1(2,1)$ 和 $M_2(4,9)$ 是三角形的頂點, $N(3,4)$ 是高線的交點。求各邊的方程式。

68. 三角形三邊的中點在點 $(1,2)$, $(7,4)$, $(3,-4)$ 處。求各邊的方程式。

69. 三角形中線的交點在點 $(-1,0)$ 處, 而 $x+y-1=0$ 和 $y+1=0$ 是兩條邊的方程式。求第三邊的方程式。

70. 三角形的頂點在點 $A(1,3)$, $B(-1,0)$, $C(2,-2)$ 處。求高線的方程式。

71. 求通過直線 $x-y-1=0$ 和 $x+2y-2=0$ 的交點及點 $(-1,1)$ 的直線方程式。

72. 求通過原點及直線 $17x+29y=317$ 和 $3x+10y=634$ 之交點的直線方程式。

73. 求通過直線 $x+2y-11=0$ 和 $2x-y-2=0$ 之交點, 並與原點距離為 5 的直線方程式。

74. 設一直線通過點 $(-1,1)$, 它在二直線 $x+2y-1=0$, $x+2y-3=0$ 間的線段的中點在直線 $x-y-1=0$ 上。求其方程式。

75. 設一直線通過原點, 它在二直線 $x-y+1=0$, $x-y-2=0$ 間的線段的長度為 3。求其方程式。

76. 已知一直線在二直線 $3x+4y-7=0$, $3x+4y+3=0$ 間的線段之長為 $3\sqrt{2}$, 並通過點 $(2,3)$ 。求其方程式。

77. 求直線 $3x+4y-1=0$ 和 $4x-3y+5=0$ 間夾角的分角線。

78. 求直線 $4x+7y-3=0$ 和 $8x-y+6=0$ 間包括原點的夾角的分角線。

79. 三角形的頂點是 $(1,2)$, $(-1,-1)$, $(2,1)$ 。求在點 $(-1,-1)$ 處內角分角線的方程式。

80. 給了三角形三邊的方程式: $3x-4y=25$, $5x+12y=65$, $8x+15y+85=0$, 求內切圓的半徑。

81. 等腰三角形兩腰的方程式是 $2x - y + 8 = 0$, $x - 2y - 12 = 0$. 點 $(4, 0)$ 在底邊上. 求底邊的方程式。

82. 光線通過點 $(2, 3)$, 在直線 $x + y + 1 = 0$ 上反射出, 然後穿過點 $(1, 1)$. 求光入射線和反射線的方程式。

83. 直線 $2x + y - 1 = 0$ 是三角形的一條內角分角線, 而點 $(1, 2)$ 和點 $(-1, -1)$ 是兩個頂點. 求第三個頂點。

84. 點 $(2, 5)$ 是三角形的頂點, 直線 $x + 4y - 12 = 0$, $x - y - 1 = 0$ 是內角分角線. 求各邊的方程式。

85. 點 $(1, 1)$ 和 $(5, 4)$ 是三角形的頂點, $2x - y - 1 = 0$ 是內角分角線. 已知三角形的面積等於 5, 求各邊的方程式。

86. 等腰三角形底邊的方程式是 $x + y - 1 = 0$, 一腰之方程式是 $x - 2y - 2 = 0$. 點 $(-2, 0)$ 在另一腰上, 求此腰的方程式。

87. 證明等邊三角形內任意一點到各邊距離之和是一常數。

88. 三角形內角 A 和 B 的分角線與它們的對邊交於點 M 和 N . 證明線段 MN 上任一點到 AC 和 BC 邊的距離之和等於到 AB 邊的距離。

89. 通過一角分角線上的一點引出兩條直線. 其中的一條在角的兩邊上, 從角頂算起, 截取了兩個線段 a 和 b , 另一條則截取了線段 a_1 和 b_1 . 證明, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}$.

90. 取直線 $2x - y + 1 = 0$, $x + 2y - 1 = 0$ 為新座標軸 Ox_1 和 Oy_1 , 如此選擇它們的方向, 使得原點的新座標為正值. 求從一個座標系到另一個座標系間變換的公式。

91. 取直線 $x - y - 1 = 0$ 和 $x + y + 2 = 0$ 的新座標軸, 使得原點的新座標是負值. 求原座標軸的新方程式。

92. 直線與三角形的兩邊 AB 和 CB 相交於點 M 和 N , 而與 AC 邊的延線交於點 P . 證明等式

$$AM \cdot BN \cdot CP = AP \cdot BM \cdot CN$$

(梅爾拉斯定理)。

93. 點 M, N, P 在三角形的 BC, CA, AB 邊上。直線 AM, BN 和 OP 交於一點。證明等式

$$AN \cdot BP \cdot CM = NC \cdot PA \cdot MB.$$

94. 證明, 三角形分角線的方程式能够寫成下面的形式:

$$s_1 \pm s_2 = 0, \quad s_1 \pm s_3 = 0, \quad s_2 \pm s_3 = 0,$$

這裏, s_1, s_2, s_3 用來表示三角形各邊法線式方程式的左端。

95. 所謂平面上的射影變換乃是將每一點 (x, y) 變為點 (x_1, y_1) , 而

$$x_1 = \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_0x + b_0y + c_0}; \quad y_1 = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_0x + b_0y + c_0}; \quad a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 > 0.$$

證明, 對於任意選擇的係數 a_k, b_k, c_k ($k=0, 1, 2$), 射影變換是同素的, 就是說, 把直線仍然變成直線。

96. 對於直線上的四點 A, B, C, D , 我們把比值

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}.$$

稱作它們的交比。證明, 在射影變換下, 交比的值是不變的。

97. 來與 Ox 軸在座標原點相切的圓的一般方程式。

98. 如果極軸與 Ox 的正軸重合, 求前題中圓的極座標方程式。

99. 求圓

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$$

的中心和半徑。

100. 三角形的頂點在點 $M_1(6, 0), M_2(10, 0), M_3(6, 8)$ 處。求外接圓的方程式。

101. 在圓 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 求與點 $(1, 3), (-2, 2)$ 等距離的點。

102. 給了三角形三邊的方程式。

$$3x + 4y = 25, \quad 5x - 12y = 65, \quad 8x - 15y + 85 = 0,$$

求內切圓的方程式。

103. 求通過點 $(1, 2)$ 並與圓 $x^2 + y^2 = 5$ 相切的切線方程式。

104. 求通過點 $(-1, 3)$ 並與圓 $x^2 + y^2 = 5$ 相切的切線方程式。

105. 求兩圓

$$x^2 + y^2 = 2ax, \quad x^2 + y^2 = 2by.$$

公共弦的方程式。

106. 求兩圓

$$x^2 + y^2 = 6x, \quad x^2 + y^2 = 6y.$$

公切線的方程式。

107. 點 (x_1, y_1) 在圓 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 之外。求從此點到圓周的切線長 l 。

108. 點 (x_1, y_1) 在圓 $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ 之內。證明通過 (x_1, y_1) 的弦被此點分成兩部份時，它們的積等於

$$x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C.$$

109. 一個與座標軸相切且通過點 $(4, 8)$ 。求其方程式。

110. 一圓與 Oy 軸相切且通過原點及點 $(3, 6)$ 。求其方程式。

111. 在 Ox 軸上，求出與圓 $x^2 + y^2 = 6y - 6$ 和 $x^2 + y^2 = 2x$ 有等長切線的點。

112. 求與座標角兩條分角線相切的圓的一般方程式。

113. 一動點和兩個定點的距離成比例，比值不等於一。證明此點的軌跡是一個圓(阿坡勞尼圓)。

114. 從一點到二已知圓的切線有相等的長度。證明此點的軌跡是一條直線(兩圓的根軸)。

115. 對於任意的 a 和 b ，證明圓 $x^2 + y^2 = ax$ 和 $x^2 + y^2 = by$ 以直角相交。這裏，和平常一樣，曲線之間的夾角總被了解為在交點處的兩條切線的夾角。

116. 證明圓族

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 + h^2$$

中的每一個圓和另一圓族

$$x^2 + (y \pm \sqrt{r^2 + h^2})^2 = r^2.$$

中的每一個圓以直角相交。

117. 證明圓族

$$x^2 + y^2 - 2ax + b^2 = 0$$

中的每一個圓和另一圓族

$$x^2 + y^2 - 2ay - b^2 = 0$$

中的每一個圓以直角相交。

§ 3. 軌 跡

118. 從座標原點作圓 $x^2 + y^2 = 2ax$ 的弦。求弦中點的軌跡。

119. 從動點到直線 $Ax + By + C = 0$ 和 $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ 的距離之比為 $m:n$ 。求動點軌跡的方程式。

120. 長度為 $a+b$ 的線段的兩端沿着二座標軸滑動。一點 M 分此線段為 a 和 b 兩部份。求 M 點所畫的曲線(達·芬奇的橢圓規)。

121. 以原點為圓心,作半徑為 b 和 a 的兩個圓。動半徑交內圓於 A 點,交外圓於 B 點。過 A 點作平行於 Ox 軸的直線,過 B 點作平行於 Oy 軸的直線,兩條直線的交點是 M 。求 M 點的軌跡。

122. 從原點作直線和 Oy 軸成 $\frac{\pi\theta}{2}$ 角。這直線與直線 $x = a\theta$ 交於 M 點。求 M 點軌跡的方程式(狄諾脫拉德的圓積曲線)。

123. 從原點引出圓 $x^2 + y^2 = 2ax$ 的弦,並延長至與直線 $x = 2a$ 的交點。在弦上,自原點開始截取與延線等長的線段。求線段端點的軌跡(簡歐克列斯蔓葉線,即歧點蔓葉線)。

124. 從原點引一任意的直線,和圓 $x^2 + y^2 = ay$ 及直線 $y = a$ 交於 A 和 B 二點。從 A 點引一直線平行於 Ox 軸,從 B 點引一直線平行於 Oy 軸。求此二直線交點的軌跡(箕舌線)。

125. 一動點至兩定點距離的乘積是常數。求它的軌跡(喀西尼卵形線)。

126. 一動點至兩定點距離的乘積等於此二定點間距離之半的平方。求它的軌跡(柏努利雙紐線)。

127. 一動點至兩定點距離滿足線性關係式 $r_1 - ar_2 = b$ 。求此點的軌跡(笛卡爾卵形線)。

128. 過點 $(0, -a)$ 引直線和 Ox 軸相交。在每一條直線上, 從 Ox 軸上的交點開始, 沿着線的兩個方向, 截取長度為 h 的兩條線段。求這些線段端點的軌跡(尼歌米德蚌線)。

129. 從直徑為 a 的圓上一點 A 引出割線。在每一條割線上, 從圓上的另一交點開始, 沿着線的兩個方向, 截取長度的兩條線段。求它們的端點的軌跡(巴斯加蝸線)。

130. 纏繞在圓 $x^2 + y^2 = a^2$ 上的線, 緊牽着將它迴開。如果此線端點起始的位置在點 $(a, 0)$ 處, 求端點的軌跡(圓的伸開線)。

131. 半徑為 a 的圓沿 Ox 軸滾動, 沒有滑動。在開始時圓切 Ox 軸於原點。求圓上此點所畫出的曲線的方程式(擺線)。

132. 半徑為 a 的圓不滑動地沿 Ox 軸滾動。當此圓切 Ox 軸於原點時, 其內有一點在 $(0, a-b)$ 處。求此點所畫出的曲線的方程式(輻點平旋線)。

133. 半徑為 a 的圓不滑動地沿着圓 $x^2 + y^2 = a^2 n^2$ 滾動。如果動圓在開始時和定圓外切於 Ox 軸, 求動圓上切點的軌跡(外擺線)。

134. 半徑為 a 的圓沿着圓 $x^2 + y^2 = a^2 n^2$ 在其內部滾動, 沒有滑動。如果動圓開始時和定圓切於 Ox 軸上, 求動圓切點的軌跡(內擺線)。

135. 證明, 當 $n=4$ 時, 內擺線變為星形線:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

136. 當 $n=1$ 時, 外擺線變成心臟曲線。證明 在適當選擇的極座